Problème d'optimisation de forme impliquant la loi de Tresca dans un cas scalaire

- Samir Adly, (Institut de recherche XLIM. UMR CNRS 7252. Université de Limoges, France)
- Loïc Bourdin (Institut de recherche XLIM. UMR CNRS 7252. Université de Limoges, France)
- Fabien Caubet (Université de Pau et des Pays de l'Adour, E2S UPPA, CNRS, LMAP, UMR 5142, Pau, France)
- **Aymeric Jacob de Cordemoy** (Université de Pau et des Pays de l'Adour, E2S UPPA, CNRS, LMAP, UMR 5142, Pau, France)

Mots-clé : optimisation de forme, loi de Tresca, conditions unilatérales de Signorini, mécanique du contact, opérateur proximal, épi-différentiabilité d'ordre 2.

Résumé : Dans ce travail nous étudions, sans procédure de régularisation ou de pénalisation, un problème d'optimisation de forme impliquant un phénomène de frottement modélisé par la *loi de Tresca* dans un cas scalaire (e.g., [2, Section 1.3 Chapter 1]). Plus précisement, pour $d \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d)$, avec $g > 0$ p.p. sur $\mathbb{R}^d$, nous cherchons à calculer le *gradient de forme* (e.g., [3]) de la fonctionnelle énergie J définie par

$$\begin{array}{rccl} J: & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \Omega & \longmapsto & J(\Omega) := \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega \left(\|\nabla u_\Omega\|^2 + |u_\Omega|^2\right) + \int_{\partial\Omega} g|u_\Omega| - \int_\Omega f u_\Omega, \end{array}$$

où $\mathcal{U}$ est l'ensemble admissible défini par

$$\mathcal{U} := \left\{\Omega \text{ ouvert non vide connexe borné de } \mathbb{R}^d, \partial\Omega \text{ de classe } \mathcal{C}^3\right\},$$

et $u_\Omega \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ est la solution du problème de Tresca

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u + u & = & f & \text{dans } \Omega, \\ |\partial_{\mathrm{n}} u| \leq g \text{ et } u\partial_{\mathrm{n}} u + g|u| & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

Afin de caractériser le gradient de forme de la fonctionnelle énergie, l'analyse de sensibilité du problème de Tresca par rapport à la forme (e.g., [1] pour l'analyse de sensibilité par rapport aux paramètres initiaux f et g) doit être étudiée afin de caractériser la *dérivée directionnelle matérielle* et de *forme* (e.g., [3]) de la solution du problème de Tresca. Ce problème est non-linéaire et non lisse, par conséquent nous utilisons des outils d'analyse convexe tels que l'opérateur proximal [5] ou encore la notion d'épi-différentiabilité d'ordre 2 [6], afin de prouver que la solution du problème de Tresca admet une *dérivée directionnelle matérielle* et de *forme*, et que celles-ci sont chacune l'unique solution d'un problème aux limites impliquant des conditions unilatérales de type Signorini (e.g., [4, Section 1]). Enfin, à l'aide de ces dérivées directionnelles, nous caractérisons le gradient de forme de la fonctionnelle énergie, et nous exposons une direction de descente ce qui permettra de la minimiser numériquement.

Références :

[1] L. Bourdin, F. Caubet et A. Jacob de Cordemoy. Sensitivity analysis of a scalar mechanical contact problem with perturbation of the Tresca's friction law. *J Optim Theory Appl*, 2022.

[2] R. Glowinski, J.-L. Lions et R. Trémolières. Numerical Analysis of Variational Inequalities. *Studies in Mathematics and Its Applications*, *North-Holland, Amsterdam*, 1981.

[3] A. Henrot et M. Pierre. Shape Variation and Optimization : a Geometrical Analysis. *Tracts in Mathematics Vol. 28*, *European Mathematical Society*, 2018

[4] J.-L. Lions. Sur les problèmes unilatéraux. *Séminaire Bourbaki*, *Springer-Verlag*, : vol. 1968/69, exposés 347-363, 1971.

[5] J. J. Moreau. Proximité et dualité dans un espace hilbertien. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 93:273–299, 1965.

[6] R. T. Rockafellar. Maximal monotone relations and the second derivatives of nonsmooth functions. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, Vol. 2, p. 167–184, 1985.