

**CORRECTION DU TD 8 : LE THÉORÈME DE SHANNON ET LA TRANSFORMÉE
EN z**

CONTENTS

1. Exercice 1: un avatar du théorème de Shannon	1
2. Exercice 2: calcul de quelques transformées en z	7
3. Exercice 3: encore une transformée en z	9
4. Exercice 4: Le circuit RLC	10

1. EXERCICE 1: UN AVATAR DU THÉORÈME DE SHANNON

Ce premier exercice nécessite une bonne compréhension de la formule de Poisson, et de sa signification en termes d'échantillonnage. Nous avons déjà utilisé – et rappelé – la formule de Poisson au cours du TD 4, mais par souci de commodité, les principaux éléments à ce sujet sont reproduits ci-dessous. Cette formule s'écrit formellement :

$$(1) \quad a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x - na) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{n}{a}\right) e^{2i\pi n \frac{x}{a}}.$$

Cette formule admet deux cadres d'utilisation un peu différents :

- *Cas 1* : $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ est une distribution à support compact. Alors, le terme de gauche de (1) est à comprendre comme la convolution

$$a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x - na) = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_{na} f = a \Delta_a * f,$$

où

$$\Delta_a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{na} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

est le *peigne de Dirac*. Ce terme de gauche est une distribution tempérée, puisqu'il s'agit de la convolution entre la distribution $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et la distribution tempérée $\Delta_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Le terme de droite dans (1) est également bien défini comme une distribution tempérée. En effet, la transformée de Fourier \widehat{f} de la distribution à support compact f est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ à croissance lente. Ainsi, la suite $\left\{ \widehat{f}\left(\frac{n}{a}\right) \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est à croissance lente, et le cours assure que la somme considérée est une distribution tempérée.

- *Cas 2* : f est une fonction de $L^1(\mathbb{R})$. Alors, on peut montrer que le terme de gauche de (1) définit une fonction sur \mathbb{R} , périodique de période a , qui est intégrable sur une période:

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x - na) \right\|_{L^1(0,a)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

En particulier, ce terme de gauche définit une distribution périodique, et donc une distribution tempérée, par le cours.

Le terme de droite dans (1) est également une distribution tempérée, puisque la transformée de Fourier \widehat{f} de la fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est une fonction continue et bornée sur \mathbb{R} (qui tend vers 0 en $\pm\infty$), de sorte que la suite $\left\{\widehat{f}\left(\frac{n}{a}\right)\right\}$ est à croissance lente.

Dans ce second cadre, la formule de Poisson peut être comprise de la manière suivante : la distribution tempérée $a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x - na)$ est une version périodisée de f à la période a (au facteur multiplicatif a près) ; le terme de droite dans (1) est alors la décomposition de cette version périodisée en série de Fourier.

Une autre interprétation intéressante de la formule de Poisson est obtenue lorsqu'on l'applique à $f = \widehat{g}$, la transformée de Fourier d'un signal $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sous réserve que \widehat{g} réponde aux hypothèses sous-jacentes à l'un des deux cadre ci-dessus, on a :

$$(2) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{g}\left(\xi - \frac{n}{a}\right) = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(na) e^{-2i\pi na\xi}.$$

Cette formule est souvent appelée *formule de Poisson duale*. Le terme de droite est la transformée de Fourier du signal g échantillonné avec le pas a :

$$\mathcal{F}\left(a \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(na) \delta_{na}\right)(\xi) = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(na) e^{-2i\pi na\xi}.$$

Le terme de gauche est la périodisation de la transformée de Fourier de g , avec la période $\frac{1}{a}$. Ainsi,

La transformée de Fourier d'un signal analogique g qui a été échantillonné avec le pas a est la périodisation à la période $\frac{1}{a}$ de la transformée de Fourier de g .

Cette remarque fondamentale est le point de départ du théorème de Shannon, dont on rappelle à présent l'énoncé.

Théorème 1. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ une fonction à bande limitée, i.e. dont la transformée de Fourier est à support compact, inclus dans un intervalle $[-\lambda_c, \lambda_c]$. Alors :*

$$(i) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(na)|^2 < \infty;$$

(ii) *Si de plus le pas d'échantillonnage a est "assez petit", i.e.*

$$a \leq \frac{1}{2\lambda_c},$$

alors la fonction f peut être parfaitement reconstruite par la seule donnée des échantillons $\{f(na)\}_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$(3) \quad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}(x - na)\right)}{\frac{\pi}{a}(x - na)},$$

la somme au second membre convergeant dans $L^2(\mathbb{R})$.

Pour ce premier exercice, une bonne compréhension de la preuve de ce résultat est essentielle, et nous la rappelons brièvement.

Esquisse de preuve. Preuve de (i) : Puisque \widehat{f} est une distribution à support compact, on peut lui appliquer la formule de Poisson duale (voir (2)), ce qui produit :

$$(4) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\xi - \frac{n}{a}\right) = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) e^{-2i\pi na\xi}.$$

Notons $F(\xi) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\xi - \frac{n}{a}\right)$. Il s'agit d'une fonction périodique de période $\frac{1}{a}$, qui est de carré intégrable sur une période, i.e. $F \in L^2\left(0, \frac{1}{a}\right)$; en effet, la somme définissant $F(\xi)$ porte sur un nombre fini d'indices $n = -M, \dots, M$ pour chaque $\xi \in \left[0, \frac{1}{a}\right]$ puisque \widehat{f} est à support compact.

Ainsi, par la théorie des séries de Fourier pour les fonctions périodiques et de carré intégrable sur un intervalle de \mathbb{R} , la fonction $F(\xi)$ admet une décomposition en série de Fourier, disons:

$$F(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi n a \xi}, \text{ pour des coefficients } c_n \in \mathbb{C} \text{ tels que } \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty.$$

D'autre part, la formule de Poisson duale (4) fournit également une décomposition en série de Fourier de $F(\xi)$ en tant que distribution périodique. Comme la décomposition en série de Fourier d'une distribution périodique est unique par le cours, on en déduit que:

$$c_{-n} = a f(na),$$

et le point (i) en résulte.

Preuve de (ii): Considérons encore la formule de Poisson duale (2):

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\xi - \frac{n}{a}\right) = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) e^{-2i\pi n a \xi}.$$

Comme nous l'avons expliqué, le terme de gauche $F(\xi)$ de cette équation est la périodisation de \widehat{f} à la période $\frac{1}{a}$. Deux cas peuvent se produire, en fonction des valeurs relatives du pas d'échantillonnage a et de la borne λ_c sur la bande de fréquences de f :

- Dans le cas où $a \leq \frac{1}{2\lambda_c}$, les différents translatés (encore appelés *lobes* ou *alias*) $\xi \mapsto \widehat{f}\left(\xi - \frac{n}{a}\right)$ (indiqués par $n \in \mathbb{Z}$) du spectre \widehat{f} sont *disjoints*; voir la Figure 1 (haut);
- Lorsque $a > \frac{1}{2\lambda_c}$, deux (ou plus) translatés différents $\xi \mapsto \widehat{f}\left(\xi - \frac{n}{a}\right)$, $\xi \mapsto \widehat{f}\left(\xi - \frac{m}{a}\right)$ de \widehat{f} (pour $n \neq m$) peuvent se chevaucher. Ce phénomène est souvent appelé *repliement du spectre* ou *aliasing*; voir la Figure 1 (bas) pour une illustration.

Intuitivement, dans le premier cas (absence d'aliasing), aucune information n'est perdue concernant \widehat{f} : il suffit de regarder la fonction $F(\xi)$ entre $\xi = -\frac{1}{2a}$ et $\frac{1}{2a}$ pour reconstituer toute l'information concernant \widehat{f} , et donc f , par inversion de Fourier. Dans le second cas en revanche (aliasing), l'information concernant \widehat{f} est "brouillée" car deux lobes (ou alias) consécutifs $\xi \mapsto \widehat{f}\left(\xi - \frac{n}{a}\right)$ et $\xi \mapsto \widehat{f}\left(\xi - \frac{n+1}{a}\right)$ (au moins) se chevauchent: la donnée de $F(\xi)$ n'est pas suffisante pour reconstituer \widehat{f} .

Utilisons maintenant ces observations pour démontrer le théorème de Shannon. Lorsque $a \leq \frac{1}{2\lambda_c}$, nous sommes dans le premier cas, ce qui se traduit mathématiquement par:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{f}(\xi) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}]}(\xi) F(\xi),$$

et donc, par la formule de Poisson duale (4):

$$(5) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{f}(\xi) = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}]}(\xi) e^{-2i\pi n a \xi}.$$

Ainsi, nous avons parfaitement reconstitué le spectre \widehat{f} de f en fonction des valeurs de f aux points d'échantillonnage na , $n \in \mathbb{Z}$. Appliquant la transformation de Fourier inverse \mathcal{F}^{-1} à cette dernière expression, nous obtenons:

$$f(x) = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) \mathcal{F}^{-1}\left(\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}]}(\xi) e^{-2i\pi n a \xi}\right)(x).$$

Notons que l'intervention des symboles \mathcal{F}^{-1} et \sum dans l'égalité ci-dessus est justifiée par le fait que la série (5) converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, en application de la formule de Poisson duale. Finalement, un calcul explicite donne:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}]}(\xi) e^{-2i\pi n a \xi}\right)(x) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}(x - na)\right)}{\pi(x - na)},$$

ce qui termine la preuve. □

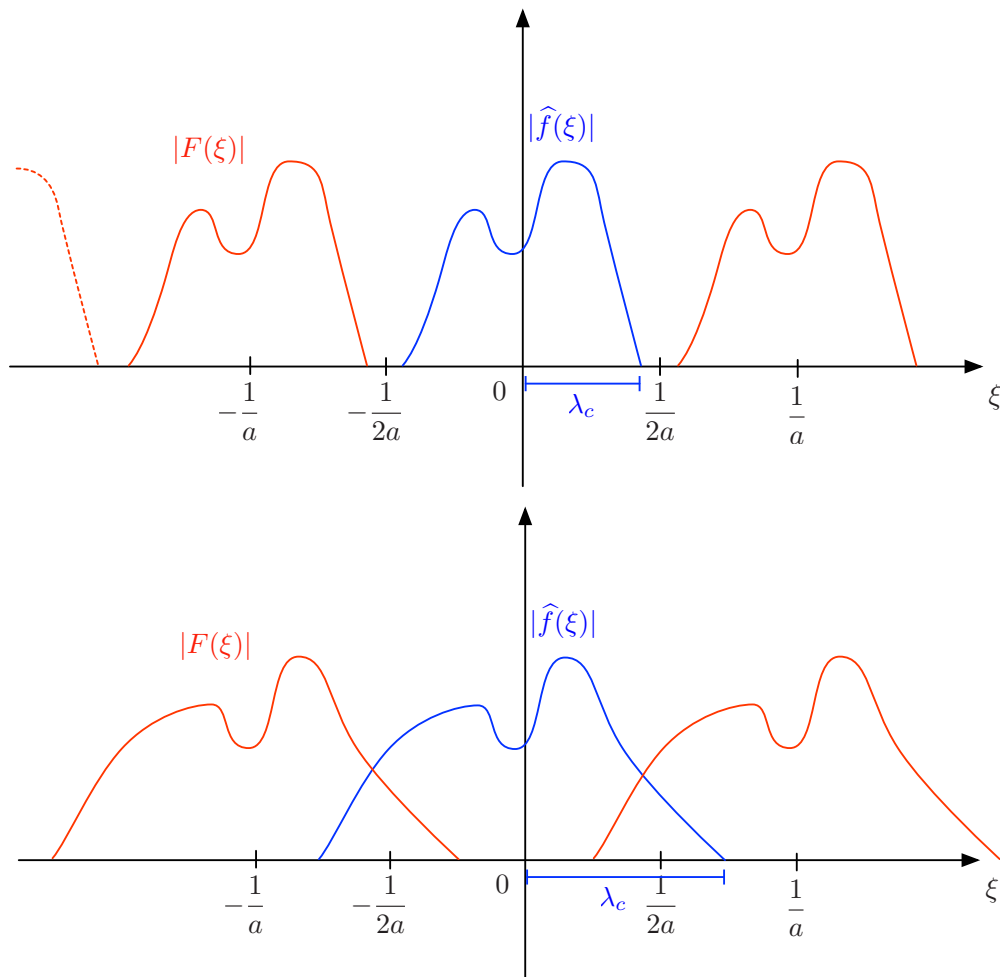


FIGURE 1. (Haut) Périodisation $F(\xi)$ du spectre $\widehat{f}(\xi)$ dans le cas où $\frac{1}{2a} \leq \lambda_c$: pas de repliement du spectre ; (bas) périodisation $F(\xi)$ du spectre $\widehat{f}(\xi)$ dans le cas où $\frac{1}{2a} > \lambda_c$: différents alias $\widehat{f}(\xi - \frac{n}{a})$ de \widehat{f} se chevauchent.

Énoncé : Soit f une fonction à valeurs réelles, telle que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\text{supp}(\widehat{f}) \subset [-f_2, -f_1] \cup [f_1, f_2]$, pour deux réels f_1, f_2 tels que $2f_1 \geq f_2$.

- (i) Quelle relation lie $\widehat{f}(\xi)$ et $\widehat{f}(-\xi)$?
- (ii) Que doit a priori vérifier la fréquence d'échantillonnage pour que le théorème de Shannon s'applique ?
- (iii) Expliquer comment périodiser le signal fréquentiel en utilisant la fréquence d'échantillonnage la plus petite possible.
- (iv) En déduire une méthode de reconstruction du spectre.

(i) : Soit f une fonction quelconque de $L^2(\mathbb{R})$. Rappelons que la formule usuelle

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi\xi t} dt$$

ne permet pas de définir la transformée de Fourier pour une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ car f n'est pas nécessairement intégrable.

On exploite la définition de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$, qui a été rappelée à l'occasion du TD 3 : soit φ_n une suite de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_n \rightarrow f$ dans $L^2(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier \widehat{f} est définie par :

$$\widehat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\varphi_n} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}),$$

où la limite ne dépend pas de la suite φ_n choisie tant que celle-ci converge vers f .

Or, pour tout n , on a, puisque φ_n est à valeurs réelles :

$$\widehat{\varphi_n}(-\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t) e^{2i\pi n \xi t} dt = \overline{\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t) e^{-2i\pi n \xi t} dt} = \overline{\widehat{\varphi_n}(\xi)}.$$

Passant à la limite $n \rightarrow \infty$, on obtient :

$$\widehat{f}(-\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}.$$

(ii) : Si l'on applique à la lettre le théorème de Shannon à la fonction f , on écrit que la transformée de Fourier \widehat{f} est à support compact dans $[-f_2, f_2]$; voir la Figure 2 (haut). Le théorème de Shannon garantit alors que l'on pourra reconstituer le signal f à partir de la formule (3) sous réserve que le pas d'échantillonnage a vérifie :

$$a \leq \frac{1}{2f_2}.$$

(iii) : On souhaite pouvoir reconstruire parfaitement f à partir de ses échantillons $f(na)$, obtenus avec le pas d'échantillonnage a le plus grand possible. Ceci revient, par la formule de Poisson duale (2) à périodiser le spectre \widehat{f} avec la période la plus petite possible, sans que les différents alias en jeu ne se superposent.

Puisque $f_2 \leq 2f_1$, on voit que la longueur $f_2 - f_1$ de la bande de fréquences de la fonction f est inférieure ou égale à f_1 . Ainsi, la périodisation $F(\xi)$ de \widehat{f} à la période f_2 :

$$F(\xi) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi - n f_2)$$

est composée de différents lobes qui ne se superposent pas ; voir la Figure 2 (bas).

(iv) : On écrit que

$$\widehat{f}(\xi) = (\mathbb{1}_{[-f_2, -f_1]}(\xi) + \mathbb{1}_{[f_1, f_2]}(\xi)) F(\xi).$$

D'autre part, la formule de Poisson duale (2) permet de donner une autre expression de $F(\xi)$:

$$F(\xi) = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) e^{-2i\pi n a \xi},$$

où l'on a considéré le pas d'échantillonnage $a = \frac{1}{f_2}$. Il s'ensuit :

$$\widehat{f}(\xi) = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) (\mathbb{1}_{[-f_2, -f_1]}(\xi) + \mathbb{1}_{[f_1, f_2]}(\xi)) e^{-2i\pi n a \xi}.$$

Appliquant la transformée de Fourier inverse à cette dernière identité, on obtient :

$$f(t) = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) \mathcal{F}^{-1}(g_n)(t), \text{ où } g_n(\xi) := (\mathbb{1}_{[-f_2, -f_1]}(\xi) + \mathbb{1}_{[f_1, f_2]}(\xi)) e^{-2i\pi n a \xi},$$

et il reste à calculer la transformée de Fourier inverse de la fonction g_n .

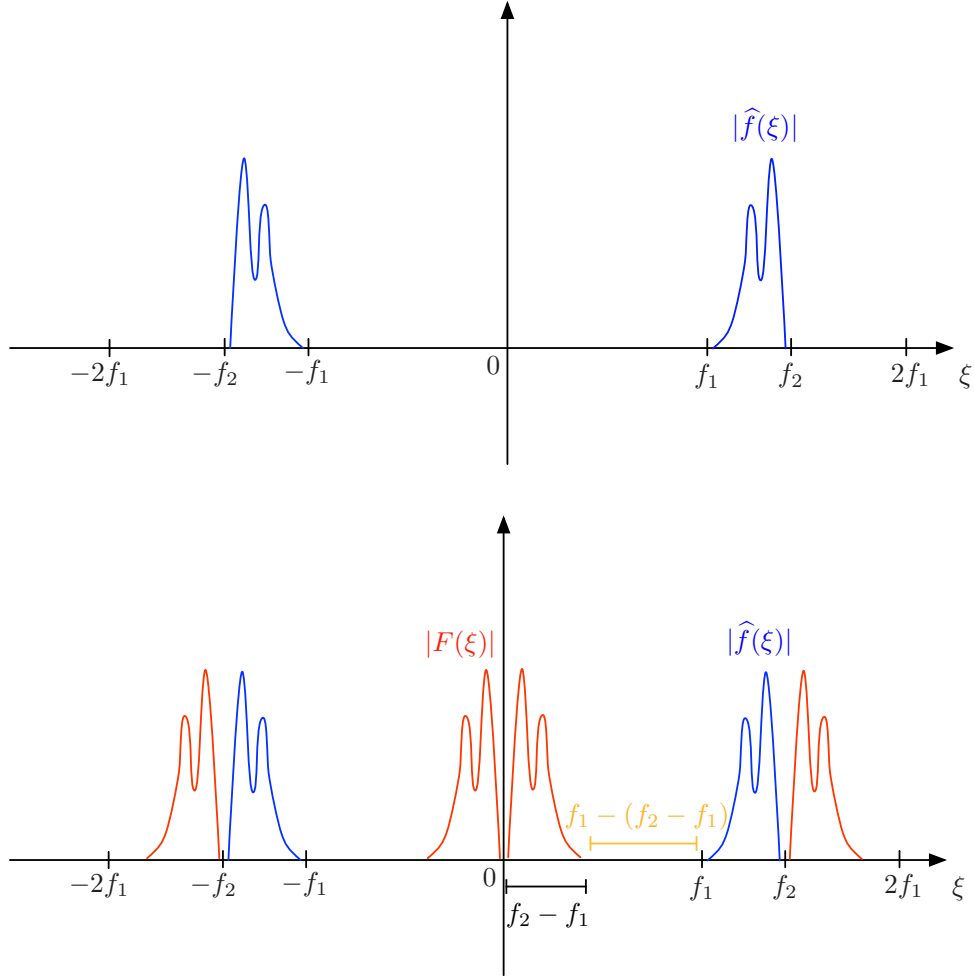


FIGURE 2. (Haut) spectre $\widehat{f}(\xi)$ d'un signal tel que dans l'exercice 1 ; (bas) périodisation $F(\xi)$ du spectre $\widehat{f}(\xi)$ à la période f_2 .

Cette fonction étant une fonction de $L^1(\mathbb{R})$, un calcul direct donne :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}(g_n)(t) &= \int_{\mathbb{R}} g_n(\xi) e^{2i\pi n \xi t} d\xi, \\
&= \int_{-f_2}^{-f_1} e^{-2i\pi n a \xi} e^{2i\pi n \xi t} d\xi + \int_{f_1}^{f_2} e^{-2i\pi n a \xi} e^{2i\pi n \xi t} d\xi, \\
&= \int_{-f_2}^{-f_1} e^{2i\pi n \xi(t-a)} d\xi + \int_{f_1}^{f_2} e^{2i\pi n \xi(t-a)} d\xi, \\
&= \frac{e^{-2i\pi n f_1(t-a)} - e^{-2i\pi n f_2(t-a)}}{2i\pi n(t-a)} + \frac{e^{2i\pi n f_2(t-a)} - e^{2i\pi n f_1(t-a)}}{2i\pi n(t-a)} \\
&= \frac{1}{\pi n(t-a)} (\sin(2\pi n f_2(t-a)) - \sin(2\pi n f_1(t-a))).
\end{aligned}$$

Finalement, on a trouvé :

$$f(t) = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) \frac{1}{\pi n(t-a)} (\sin(2\pi n f_2(t-a)) - \sin(2\pi n f_1(t-a))), \text{ où } a = \frac{1}{f_2}.$$

Remarque 1. La formule ci-dessus est très séduisante car elle permet de reconstruire parfaitement le signal $f(t)$ à partir de ses valeurs aux points d'échantillonnage na , $n \in \mathbb{Z}$, pour un pas $a = \frac{1}{f_2}$ qui est bien supérieur à celui $\frac{1}{2f_2}$ prescrit par le théorème de Shannon (voir la question (ii)). Ceci a été rendu possible par l'hypothèse (forte !) qui a été faite quant à la structure du spectre de f .

2. EXERCICE 2: CALCUL DE QUELQUES TRANSFORMÉES EN z

Les trois exercices suivants sont consacrés à l'étude de *signaux discrets* ; on rappelle ci-dessous quelques éléments de terminologie associée à ces objets.

Soit $a > 0$; on note $X_a \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'espace des signaux discrets obtenus avec le pas d'échantillonnage a :

$$X_a = \left\{ x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \delta_{na} \right\}.$$

Par exemple, on obtient des éléments de X_a en échantillonnant un signal analogique $f(t)$:

$$(6) \quad a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) \delta_{na}.$$

En pratique, il est souvent souhaitable de pratiquer des opérations – appelées *filtres* – sur ces signaux discrets (lissage, troncature, etc.), au moins sur un sous-espace $X \subset X_a$ de tels signaux. Par exemple,

- $X = X_a$;
- $X = \left\{ x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \delta_{na}, \exists n_0 \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } x_n = 0 \text{ pour } n < n_0 \right\}$ est l'espace des signaux finis à gauche.

Formellement, un filtre est défini comme une application linéaire continue $D : X \rightarrow X_a$. Très souvent, un tel filtre agit par convolution :

$$(7) \quad \forall x \in X, Dx = h * x, \text{ c'est-à-dire } (Dx)_n = \sum_{p \in \mathbb{Z}} h_p x_{n-p},$$

pour un certain élément $h \in X_a$ appelé *réponse impulsionnelle* du filtre. On dit qu'un tel filtre D est :

- *Causal* ou *réalisable* si $h_p = 0$ pour tout indice $p < 0$: ainsi, le calcul du signal filtré Dx au temps n par la formule (7) ne fait intervenir que les valeurs du signal x aux instants $\leq n$ (et le signal filtré Dx peut être évalué en temps réel).
- *Stable* si la somme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n|$ est finie ; alors, il existe une constante C telle que, pour tout signal $x \in X$:

$$\|Dx\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{Z}} |(Dx)_n| \|x\|_\infty \leq C \|x\|_\infty.$$

En d'autres termes, l'application du filtre n'amplifie pas "trop" le signal initial x .

Dans les applications, il est souvent crucial d'étudier le spectre d'un signal discret, et son comportement au travers d'un filtre. Sous réserve que la suite x_n ne croisse "pas trop vite" lorsque $n \rightarrow \pm\infty$, la distribution $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \delta_{na}$ est tempérée, et on peut considérer sa transformée de Fourier au sens des distributions :

$$(8) \quad \mathcal{F} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \delta_{na} \right) (\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi n a \xi}.$$

Remarque 2. Lorsque le signal discret x a été obtenu par échantillonnage d'un signal analogique $f(t)$ (voir (6)), la formule de Poisson permet d'apprécier dans quelle mesure (8) approche le spectre \hat{f} (voir le rappel plus haut).

L'étude de la transformée de Fourier (8) se résume à l'étude de la *transformée en z* du signal discret x

$$X(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n z^{-n}$$

pour les nombres complexes z de module 1.

Il se trouve que l'étude de cette quantité est considérablement simplifiée lorsque l'on considère la somme $X(z)$ pour toutes les valeurs de la variable $z \in \mathbb{C}$ pour lesquelles celle-ci a un sens (i.e. converge). Une telle série admet une *couronne de convergence*, du type

$$C(a, b) = \{z \in \mathbb{C}, a < |z| < b\},$$

où a peut être négatif (convergence en 0) et b peut prendre la valeur ∞ . La somme $X(z)$ converge absolument lorsque $a < |z| < b$, et le comportement de cette série peut-être très compliqué au bord de la couronne de convergence.

La transformée en z est un outil qui se prête particulièrement bien à l'étude des filtres. En effet, si $y \in X$ est un signal discret obtenu par le filtrage $y = h * x$ d'un signal $x \in X$, les transformées en z respectivement associées $Y(z)$ et $X(z)$ sont reliées par :

$$Y(z) = H(z)X(z), \text{ où } H(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n z^{-n}$$

est la *fonction de transfert* du filtre. L'égalité ci-dessus a lieu sur toute couronne de convergence commune pour $X(z)$, $Y(z)$ et $H(z)$.

Enoncé : Calculer la transformée en z des signaux suivants en précisant leur domaine de convergence :

- (i) $x_n = \delta_{n-n_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = n_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- (ii) $x_n = \alpha^n u_n$, où $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- (iii) $x_n = -\alpha^n u_{-n-1}$.

(i) On a simplement

$$X(z) = z^{-n_0},$$

qui converge sur la couronne $C(0, \infty) = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z| < \infty\}$.

(ii) On a $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n}$. Cette série converge absolument sur la couronne

$$C(\alpha, \infty) = \{z \in \mathbb{C}, \alpha < |z| < \infty\}.$$

On obtient alors, par sommation des termes d'une série géométrique :

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{z}} = \frac{z}{z - \alpha}.$$

(iii) On a, par un changement d'indice :

$$X(z) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^n z^{-n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\alpha}\right)^n.$$

Cette série converge absolument lorsque la raison $\frac{z}{\alpha}$ est de module < 1 , c'est-à-dire sur la couronne :

$$C(-1, \alpha) = \{z \in \mathbb{C}, 0 \leq |z| < \alpha\}.$$

Pour z dans cet ensemble, il vient :

$$X(z) = - \frac{\frac{z}{\alpha}}{1 - \frac{z}{\alpha}} = \frac{z}{z - \alpha}.$$

Remarque 3. Il est instructif de comparer les résultats obtenus aux questions (ii) et (iii) : les transformées en z des deux signaux considérés ont la même expression, alors que ceux-ci sont fort différents ! Cette similitude n'est qu'apparente, car les couronnes sur lesquelles la convergence a lieu sont disjointes. Il faut donc bien retenir qu'une expression donnée pour une transformée en z est indissociable de la couronne de convergence sur laquelle elle a lieu.

3. EXERCICE 3: ENCORE UNE TRANSFORMÉE EN z

Énoncé: Calculer la réponse impulsionnelle du filtre donné par la transformée en z suivante :

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}.$$

Ce filtre est-il causal ? Stable ?

Nous avons vu au cours de l'exercice précédent qu'une même expression de la variable complexe z peut aboutir à plusieurs développements en série entière, associés à des couronnes de convergence disjointes. En général, il est souhaitable de manipuler des filtres réalisables, i.e. dont la réponse impulsionnelle h_n est nulle aux indices $n < 0$. Afin de se donner le plus de chances d'aboutir à un tel comportement, on privilégie un développement en série entière de la fonction de transfert $H(z)$ ci-dessus en termes de la variable $u := z^{-1}$ (en espérant alors que le développement résultant ne contiendra que des termes de la forme z^{-n} , $n \in \mathbb{N}$). Écrivons :

$$H(z) = G(u) := \frac{1 - u}{1 - 5u + 6u^2} = \frac{1 - u}{(1 - 2u)(1 - 3u)}.$$

On effectue la décomposition en éléments simples de cette expression :

$$G(u) = \frac{\alpha}{1 - 2u} + \frac{\beta}{1 - 3u},$$

où les réels α, β sont donnés par les formules :

$$\alpha = ((1 - 2u)G(u))\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1 - u}{1 - 3u}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -1,$$

et

$$\beta = ((1 - 3u)G(u))\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1 - u}{1 - 2u}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2.$$

Ainsi, on a :

$$G(u) = \frac{-1}{1 - 2u} + \frac{2}{1 - 3u}.$$

On effectue maintenant un développement en série entière de chacun des deux termes au second membre ci-dessus :

$$G(u) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^n u^n + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} 3^n u^n,$$

développement qui est valide pour $|u| < \frac{1}{3}$.

Revenant finalement à $H(z)$, on a, pour tout $z \in C(3, \infty)$,

$$H(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (2 \cdot 3^n - 2^n) z^{-n},$$

d'où l'on identifie le filtre :

$$h_n = \begin{cases} 2 \cdot 3^n - 2^n & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Ce filtre est causal (on a tout fait pour !) puisque $h_n = 0$ lorsque $n < 0$. En revanche, il n'est pas stable, puisque $h_n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$ (la suite h_n n'est même pas bornée !).

4. EXERCICE 4: LE CIRCUIT RLC

Enoncé: On considère l'opération de filtrage $x_n \mapsto y_n$, où y_n est obtenue par l'équation :

$$RC(y_n - y_{n-1}) + y_n = x_n,$$

qui mime l'équation différentielle (s'appliquant sur un signal analogique) :

$$RCy'(t) = y(t) = x(t).$$

- (i) Ecrire le filtre sous la forme d'une équation aux différences linéaires à coefficients constants.
- (ii) En déduire la fonction de transfert du filtre.
- (iii) Calculer la réponse impulsionnelle du filtre. Vérifier que le filtre est causal et stable.

(i): On a :

$$(RC + 1)y_n - RCy_{n-1} = x_n,$$

et donc :

$$y_n - ay_{n-1} = bx_n, \text{ où l'on a posé } a = \frac{RC}{RC + 1} \text{ et } b = \frac{1}{RC + 1}.$$

(ii): Appliquons la transformée en z à l'identité précédente :

$$Y(z) - az^{-1}Y(z) = bX(z).$$

où l'on a utilisé le fait que la transformée en z de la suite $\{y_{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, obtenue à partir de y_n par décalage d'indice vaut :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} y_{n-1} z^{-n} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} y_m z^{-m-1} = z^{-1}Y(z).$$

Ainsi, on a :

$$Y(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}} X(z),$$

et l'on identifie la fonction de transfert du filtre par :

$$H(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}}.$$

(iii): Utilisant finalement un développement en série entière, on obtient :

$$H(z) = b \sum_{n \in \mathbb{N}} a^n z^{-n},$$

développement valable sur la couronne de convergence $C(a, \infty)$.

Ainsi, la réponse impulsionnelle h_n du filtre est :

$$h_n = \begin{cases} ba^n & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

On voit immédiatement que ce filtre est causal. Il est stable car $a < 1$, et donc :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n| = b \sum_{n \in \mathbb{N}} a^n = \frac{b}{1 - a} < \infty.$$