Corrigé contrôle 2. Espace vectoriel normé, différentiabilité

Exercice 1. Soit f une forme linéaire sur E. $\forall x \in E$, posons $N(x) = ||x|| + |f(x)|$.
On vérifie aisément que N définit une norme (à vous de l'écrire!).
Par hypothèse, cette norme N est équivalente à la norme $||\cdot||$ sur E.
En particulier, il existe une constante $C > 0$, telle que :

$$||x|| + |f(x)| \leqslant C||x||.$$

On a donc, $\forall x \in E$:

$$|f(x)| \leqslant (C-1)||x||.$$

Ceci prouve la continuité de la forme linéaire f.

Exercice 2. Nous invitons le lecteur à se reporter à la feuille de TD6, exercice 3. Nous rappelons que l'idée est d'utiliser *le théorème de point fixe de Picard* et *l'inégalité des accroissements finis.*

Posons $f(x,y) = (\frac{1}{4}\sin(x+y); 1 + \frac{2}{3}\arctan(x-y))$.
Calculons la jacobienne de f, au point (x,y) :

$$Jac(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\cos(x+y) & \frac{1}{4}\cos(x+y) \\ \frac{2}{3}\frac{1}{1+(x-y)^2} & \frac{2}{3}\frac{-1}{1+(x-y)^2} \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$Df(x,y)(h,k) = \Big(\frac{1}{4}\cos(x+y)(h+k), \frac{2}{3}\frac{1}{1+(x-y)^2}(h-k)\Big).$$

On en déduit :

$$||Df(x,y)(h,k)||_1 \leqslant \frac{1}{4}|h+k| + \frac{2}{3}|h-k| \leqslant \frac{11}{12}(|h|+|k|) = \frac{11}{12}||(h,k)||_1.$$

D'où,

$$||Df(x,y)|| \leqslant \frac{11}{12} < 1.$$

Il suffit ensuite d'appliquer l'inégalité des accroissements finis, ce qui prouve que f est contractante de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (qui est complet!). Donc par le théorème de point fixe de Picard, f admet un unique point fixe.

Exercice 3. On considère l'application $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $M \mapsto {}^tMM$.
On munit l'espace $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $|||\cdot|||$ définie par :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ |||M||| = \max_{i=1..n} \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|$$

Pour plus de détails sur cette norme, reportez-vous au TD5 exercice 15.

a) On remarque aisément que l'application T : $H \mapsto T(H) = {}^tH$ est linéaire de $M_n(\mathbb{R})$ vers $M_n(\mathbb{R})$. Par ailleurs, $M_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, donc l'application T est continue. Ainsi, si $H \to 0_{M_n(\mathbb{R})}$, alors $T(H) \to T(0) = 0_{M_n(\mathbb{R})}$. D'où le résultat.

b) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} f(M+H) &= {}^t(M+H)(M+H) \\ &= ({}^tM + {}^tH)(M+H) \\ &= {}^tMM + {}^tMH + {}^tHM + {}^tHH \\ &= f(M) + {}^tMH + {}^tHM + {}^tHH. \end{aligned} \tag{1}$$

On pose $l(H) = {}^tMH + {}^tHM$ et on vérifie facilement que l est une application linéaire de $M_n(\mathbb{R})$ vers $M_n(\mathbb{R})$. A nouveau, $M_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, donc l'application linéaire l est continue.
Il reste donc à montrer que le terme de reste ${}^tHH$ est un $o(|||H|||)$, lorsque $|||H||| \to 0$.
Or,

$$\frac{|||{}^tHH|||}{|||H|||} \leqslant \frac{|||{}^tH|||\,|||H|||}{|||H|||} = |||{}^tH||| \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad |||H||| \to 0.$$

c) Soit $M \in O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / {}^tMM = I_n\}$. Alors M et ${}^tM$ sont inversibles et donc l'application linéaire $H \mapsto {}^tMH$ est inversible, (d'inverse $H \to MH$). pour calculer le rang de $D\varphi(M)$, il suffit de calculer la dimension de $\ker(D\varphi(M))$ (théorème du rang).

$$\begin{aligned} \ker(D\varphi(M)) &= \{H \in M_n(\mathbb{R}) / {}^tMH + {}^tHM = 0\} \\ &= \{H \in M_n(\mathbb{R}) / {}^tMH = -{}^t({}^tMH)\} \\ &= \{H \in M_n(\mathbb{R}) / {}^tMH \quad \text{est antisymétrique} \quad \} \end{aligned} \tag{2}$$

Comme l'application $H \mapsto {}^tMH$ est un isomorphisme, on en déduit que $\ker(D\varphi(M))$ est isomorphe à l'espace vectoriel des matrices antisymétriques, qui lui même est de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. Le théorème du rang permet de conclure :

$$rang(D\varphi(M)) = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$