Permanent versus Déterminant

Bruno Grenet

ÉNS Lyon

Semaine ski-études des L3 de l'ÉNS de Lyon, Le Pleynet, 22 janvier 2012

Cadre

	Modèle booléen	Modèle de Valiant
Objets		
Problèmes		
Mesure		
Classes		

Cadre

	Modèle booléen	**Modèle de Valiant**
Objets	Mots booléens	
Problèmes		
Mesure		
Classes		

Cadre

	Modèle booléen	**Modèle de Valiant**
Objets	Mots booléens	
Problèmes	CouplageMax, Sat	
Mesure		
Classes		

Cadre

	Modèle booléen	**Modèle de Valiant**
Objets	Mots booléens	
Problèmes	CouplageMax, Sat	
Mesure	Temps	
Classes		

Cadre

	Modèle booléen	**Modèle de Valiant**
Objets	Mots booléens	
Problèmes	CouplageMax, Sat	
Mesure	Temps	
Classes	P, NP	

Cadre

	Modèle booléen	**Modèle de Valiant**
Objets	Mots booléens	Polynômes
Problèmes	CouplageMax, Sat	
Mesure	Temps	
Classes	P, NP	

Cadre

	Modèle booléen	Modèle de Valiant
Objets	Mots booléens	Polynômes
Problèmes	CouplageMax, Sat	Ising, Déterminant
Mesure	Temps	
Classes	P, NP	

Cadre

	Modèle booléen	**Modèle de Valiant**
Objets	Mots booléens	Polynômes
Problèmes	CouplageMax, Sat	Ising, Déterminant
Mesure	Temps	Nombre de $+$ et de $\times$
Classes	P, NP	

Cadre

	Modèle booléen	Modèle de Valiant
Objets	Mots booléens	Polynômes
Problèmes	CouplageMax, Sat	Ising, Déterminant
Mesure	Temps	Nombre de $+$ et de $\times$
Classes	P, NP	VP, VNP

Cadre

	Modèle booléen	Modèle de Valiant
Objets	Mots booléens	Polynômes
Problèmes	CouplageMax, Sat	Ising, Déterminant
Mesure	Temps	Nombre de $+$ et de $\times$
Classes	P, NP	VP, VNP

Théorème de Valiant (1979)

Permanent *est* VNP*-complet.*

Cadre

	Modèle booléen	Modèle de Valiant
Objets	Mots booléens	Polynômes
Problèmes	CouplageMax, Sat	Ising, Déterminant
Mesure	Temps	Nombre de $+$ et de $\times$
Classes	P, NP	VP, VNP

Théorème de Valiant (1979)

Permanent *est* VNP*-complet.*

Question ouverte

Est-ce que VP $\neq$ VNP ?

Déterminant

Définition

$\mathfrak{S}_n =$ Groupe de permutations de $\{1, \ldots, n\}$

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$$

Déterminant

Définition

$\mathfrak{S}_n$ = Groupe de permutations de $\{1, \ldots, n\}$

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$$

Historique : premières traces au XVIème siècle

Propriétés

Linéarité $\det(C_1 + C_1', C_2, \ldots, C_n) = \det(C_1, \ldots, C_n) + \det(C_1', \ldots, C_n)$

Propriétés

Linéarité $\det(C_1 + C_1', C_2, \ldots, C_n) = \det(C_1, \ldots, C_n) + \det(C_1', \ldots, C_n)$

Morphisme $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$

Propriétés

Linéarité $\det(C_1 + C'_1, C_2, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_n) + \det(C'_1, \dots, C_n)$

Morphisme $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$

Géométrie volume du parallélépipède défini par $(C_1, \dots, C_n)$

Propriétés

Linéarité $\det(C_1 + C_1', C_2, \ldots, C_n) = \det(C_1, \ldots, C_n) + \det(C_1', \ldots, C_n)$

Morphisme $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$

Géométrie volume du parallélépipède défini par $(C_1, \ldots, C_n)$

Algèbre $\det A = \prod_i \lambda_i$, où λ_i : valeurs propres de A

Propriétés

Linéarité	$\det(C_1 + C_1', C_2, \ldots, C_n) = \det(C_1, \ldots, C_n) + \det(C_1', \ldots, C_n)$
Morphisme	$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$
Géométrie	volume du parallélépipède défini par $(C_1, \ldots, C_n)$
Algèbre	$\det A = \prod_i \lambda_i$, où λ_i : valeurs propres de A
Calcul	$\det A = [B^m]_{1,1}$ pour B, m facilement calculables

Permanent

Définition

$\mathfrak{S}_n =$ Groupe de permutations de $\{1, \ldots, n\}$

$$\operatorname{per} A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$$

Permanent

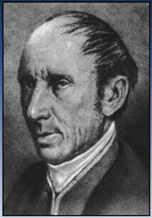
Définition

$\mathfrak{S}_n$ = Groupe de permutations de $\{1, \dots, n\}$

$$\operatorname{per} A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$$

Idem déterminant, sans les signatures

Permanent



Définition

$\mathfrak{S}_n$ = Groupe de permutations de $\{1, \ldots, n\}$

$$\operatorname{per} A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$$

Idem déterminant, sans les signatures

Historique : Augustin-Louis Cauchy (1812)

MÉMOIRE

SUR LE

NOMBRE DES VALEURS QU'UNE FONCTION PEUT ACQUÉRIR,

LORSQU'ON Y PERMUTE DE TOUTES LES MANIÈRES POSSIBLES
LES QUANTITÉS QU'ELLE RENFERME.

Journal de l'École Polytechnique, XVII^e Cahier, Tome X, p. 1; 1815.

MM. Lagrange et Vandermonde sont, je crois, les premiers qui aient considéré les fonctions de plusieurs variables relativement au nombre de valeurs qu'elles peuvent obtenir, lorsqu'on substitue ces variables à la place les unes des autres. Ils ont donné plusieurs théorèmes intéressants relatifs à ce sujet dans deux Mémoires imprimés en 1771, l'un à Berlin, l'autre à Paris. Depuis ce temps, quelques géomètres italiens se sont occupés avec succès de cette matière et, particulièrement, M. Ruffini, qui a consigné le résultat de ses recherches dans le Tome XII des *Mémoires de la Société italienne* et dans sa *Théorie des équations numériques*. Une des conséquences les plus remarquables des travaux de ces divers géomètres est que, avec un nombre donné de lettres, on ne peut pas toujours former une fonction qui ait un nombre déterminé de valeurs. Les caractères par lesquels cette impossibilité se manifeste ne sont pas toujours faciles à saisir; mais on peut du moins, pour un nombre donné de lettres, assigner des limites que le nombre des valeurs ne peut dépasser et déterminer en outre un grand nombre de cas d'exclusion. Je vais exposer dans ce Mémoire ce qu'on avait déjà trouvé de plus important sur cet objet et ce que mes propres recherches

MÉMOIRE

SUR LES

FONCTIONS QUI NE PEUVENT OBTENIR QUE DEUX VALEURS

ÉGALES ET DE SIGNES CONTRAIRES PAR SUITE DES TRANSPOSITIONS
OPÉRÉES ENTRE LES VARIABLES QU'ELLES RENFERMENT (1).

Journal de l'École Polytechnique, XVII^e Cahier, Tome X, p. 29; 1815.

PREMIÈRE PARTIE.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES ALTERNÉES.

§ I^er. Après les fonctions qu'on appelle ordinairement *symétriques* et qui ne changent ni de valeur ni de signe, par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment, les plus remarquables sont celles qui peuvent changer de signe, mais non pas de valeur, en vertu des mêmes transpositions. Lorsqu'on développe ces dernières, on les trouve composées de plusieurs termes alternativement positifs et négatifs et, pour les transformer en fonctions symétriques ordinaires, il suffirait de changer le signe des termes négatifs. En faveur de cette analogie, je comprendrai sous la dénomination commune de *fonctions symétriques* toutes les fonctions qui ne changent pas de valeur, mais tout au plus de signe en vertu de transpositions opérées entre les

(1) Lu à l'Institut, le 30 novembre 1812.

Moins de propriétés

Linéarité $\mathrm{per}(C_1 + C_1', C_2, \ldots, C_n) =$
$\mathrm{per}(C_1, \ldots, C_n) + \mathrm{per}(C_1', \ldots, C_n)$

Moins de propriétés

Linéarité $\operatorname{per}(C_1 + C_1', C_2, \ldots, C_n) = \operatorname{per}(C_1, \ldots, C_n) + \operatorname{per}(C_1', \ldots, C_n)$

Graphes Nombre de couvertures par cycles

Moins de propriétés

Linéarité $\mathrm{per}(C_1 + C_1', C_2, \ldots, C_n) = \mathrm{per}(C_1, \ldots, C_n) + \mathrm{per}(C_1', \ldots, C_n)$

Graphes Nombre de couvertures par cycles

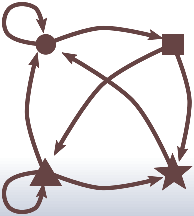
Ou encore Nombre de couplages parfaits dans un graphe biparti

Exemple

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

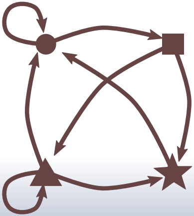
Exemple

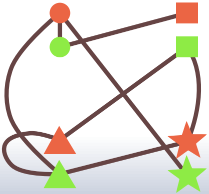
$$\begin{array}{c} \bullet \\ \blacksquare \\ \bigstar \\ \blacktriangle \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Exemple

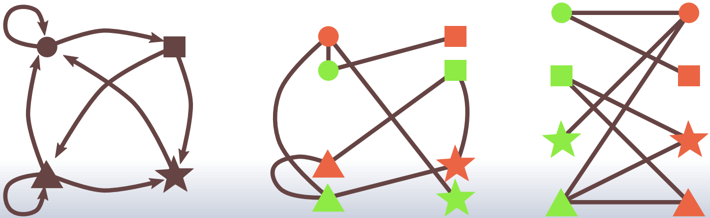
$$\begin{array}{c} \bullet \\ \blacksquare \\ \bigstar \\ \blacktriangle \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





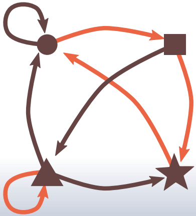
Exemple

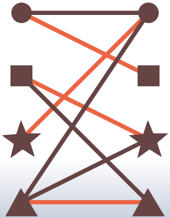
$$
\begin{array}{c}
\bullet \\ \blacksquare \\ \bigstar \\ \blacktriangle
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$



Exemple

$$\begin{array}{c}\bullet\\ \blacksquare\\ \bigstar\\ \blacktriangle\end{array}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$





Complexité déterminantale

Permanent vs. Déterminant

Entrée Matrice P de taille $n \times n$

Question Trouver une matrice D de taille minimale $\mathrm{dc}(n)$ telle que $\mathrm{per}\, P = \det D$.

Complexité déterminantale

Permanent vs. Déterminant

Entrée Matrice P de taille $n \times n$

Question Trouver une matrice D de taille minimale $\mathrm{dc}(n)$ telle que $\mathrm{per}\, P = \det D$.

La fonction $\mathrm{dc}(n)$ est la complexité déterminantale du permanent.

Complexité déterminantale

Permanent vs. Déterminant

Entrée Matrice P de taille $n \times n$

Question Trouver une matrice D de taille minimale $\mathrm{dc}(n)$ telle que $\operatorname{per} P = \det D$.

La fonction $\mathrm{dc}(n)$ est la complexité déterminantale du permanent.

$$\mathsf{VP} = \mathsf{VNP} \iff \mathrm{dc}(n) = n^{\mathcal{O}(1)}$$

(ou presque...)

Formalisation

- $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$: $\det A, \operatorname{per} A \in \mathbb{K}[a_{11}, \ldots, a_{nn}]$

Formalisation

- $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$: $\det A, \operatorname{per} A \in \mathbb{K}[a_{11}, \ldots, a_{nn}]$
  - $\rightsquigarrow$ Polynômes multilinéaires de degré n à n^2 variables

Formalisation

- $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$: $\det A, \operatorname{per} A \in \mathbb{K}[a_{11}, \ldots, a_{nn}]$
  - $\leadsto$ Polynômes multilinéaires de degré n à n^2 variables
- Graphes avec poids sur les arcs

Exemples

$$\operatorname{per}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Exemples

$$\operatorname{per}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \rightsquigarrow \mathrm{dc}(2) = 2$$

Exemples

$$\operatorname{per}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \rightsquigarrow \color{red}{\mathrm{dc}(2) = 2}$$

$$\operatorname{per}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & a & d & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & i & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 & f \\ e & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemples

$$\mathrm{per}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \rightsquigarrow \mathrm{dc}(2) = 2$$

$$\mathrm{per}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & a & d & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & i & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 & f \\ e & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \rightsquigarrow \mathrm{dc}(3) \leq 7$$

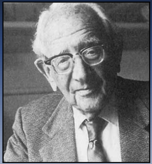
Exemples

$$\operatorname{per}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \rightsquigarrow \mathrm{dc}(2) = 2$$

$$\operatorname{per}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & a & d & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & i & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 & f \\ e & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \rightsquigarrow \mathrm{dc}(3) \leq 7$$

Une solution plus petite ? ($\mathrm{dc}(3) \geq 5$)

Première formulation

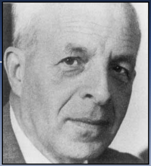


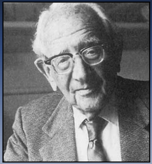
Georges Pólya (1913)

Entrée Matrice P de taille $n \times n$

Question Peut-on attribuer des signes aux coefficients de P pour obtenir D telle que $\operatorname{per} P = \det D$?

Première formulation





Georges Pólya (1913)

Entrée Matrice P de taille $n \times n$

Question Peut-on attribuer des signes aux coefficients de P pour obtenir D telle que $\operatorname{per} P = \det D$?

- Gábor Szegö (1913) : non si $n \geq 3$

Complexité

Théorème [Leslie G. Valiant (1979)]

Le permanent d'une matrice entière (ou même booléenne) est #P*-complet.*

Complexité

Théorème [Leslie G. Valiant (1979)]

Le permanent d'une matrice entière (ou même booléenne) est #P-complet.

Dans un graphe biparti

- on peut trouver un couplage parfait en temps polynomial

Complexité

Théorème [Leslie G. Valiant (1979)]

Le permanent d'une matrice entière (ou même booléenne) est #P-complet.

Dans un graphe biparti

- on peut trouver un couplage parfait en temps polynomial
- mais compter leur nombre est #P-complet.

Bornes inférieures

1913 $\mathrm{dc}(n) \geq n+1$ G. Szegö

Bornes inférieures

1913	$\mathrm{dc}(n) \geq n+1$	G. Szegö
1986	$\mathrm{dc}(n) \geq \sqrt{2}n - 6\sqrt{n}$	J. von zur Gathen

Bornes inférieures

1913	$\mathrm{dc}(n) \geq n + 1$	G. Szegö
1986	$\mathrm{dc}(n) \geq \sqrt{2}n - 6\sqrt{n}$	J. von zur Gathen
1990	$\mathrm{dc}(n) \geq \sqrt{2}n$	J.Y. Cai

Bornes inférieures

1913	$\mathrm{dc}(n) \geq n+1$	G. Szegö
1986	$\mathrm{dc}(n) \geq \sqrt{2}n - 6\sqrt{n}$	J. von zur Gathen
1990	$\mathrm{dc}(n) \geq \sqrt{2}n$	J.Y. Cai
2004	$\mathrm{dc}(n) \geq n^2/2$ en caractéristique 0	T. Mignon, N. Ressayre

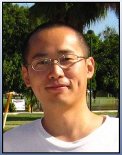
   

Bornes inférieures

1913	$\mathrm{dc}(n) \geq n + 1$	G. Szegö
1986	$\mathrm{dc}(n) \geq \sqrt{2}n - 6\sqrt{n}$	J. von zur Gathen
1990	$\mathrm{dc}(n) \geq \sqrt{2}n$	J.Y. Cai
2004	$\mathrm{dc}(n) \geq n^2/2$ en caractéristique 0	T. Mignon, N. Ressayre
2008	$\mathrm{dc}(n) \geq n^2/2$ en caractéristique $\neq 2$	J.Y. Cai, X. Chen, D. Li





Bornes inférieures

1913	$\mathrm{dc}(n) \geq n + 1$	G. Szegö
1986	$\mathrm{dc}(n) \geq \sqrt{2}n - 6\sqrt{n}$	J. von zur Gathen
1990	$\mathrm{dc}(n) \geq \sqrt{2}n$	J.Y. Cai
2004	$\mathrm{dc}(n) \geq n^2/2$ en caractéristique 0	T. Mignon, N. Ressayre
2008	$\mathrm{dc}(n) \geq n^2/2$ en caractéristique $\neq 2$	J.Y. Cai, X. Chen, D. Li

Conjecture

$$\mathrm{dc}(n) \geq 2^{\Omega(n)}$$

Arithmetic Branching Program (ABP)

Définition

Arithmetic Branching Program (ABP) :

- Graphe orienté sans cycle
- Poids sur les arêtes
- Deux sommets distingués s et t

Poids d'un chemin de s à t : produit des poids des arêtes utilisées

Valeur de l'ABP : somme des poids des chemins de s à t.

Un ABP pour le permanent

Théorème

Soit $X = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. *Il existe un ABP de taille* 2^n *utilisant les poids* $\{x_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ *dont la valeur est* per X.

Un ABP pour le permanent

Théorème

Soit $X = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. *Il existe un ABP de taille* 2^n *utilisant les poids* $\{x_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ *dont la valeur est* per X.

Construction.

- Sommets : sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$
- Arcs : $E \xrightarrow{x_{ij}} E \cup \{j\}$ si $|E| = i$ et $j \notin E$

De l'ABP au déterminant

Théorème

Soit $X = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. *Il existe une matrice carrée* M *de dimension* $(2^n - 1)$ *à coefficients dans* $\{x_{ij} : 1 \leq i,j \leq n\} \cup \{-1, 0, 1\}$ *telle que* $\operatorname{per} X = \det M$.

De l'ABP au déterminant

Théorème

Soit $X = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$*. Il existe une matrice carrée* M *de dimension* $(2^n - 1)$ *à coefficients dans* $\{x_{ij} : 1 \leq i,j \leq n\} \cup \{-1, 0, 1\}$ *telle que* $\operatorname{per} X = \det M$*.*

Squelette de la preuve.

- ABP B de valeur $\operatorname{per} X$

De l'ABP au déterminant

Théorème

Soit $X = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$*. Il existe une matrice carrée* M *de dimension* $(2^n - 1)$ *à coefficients dans* $\{x_{ij} : 1 \leq i,j \leq n\} \cup \{-1, 0, 1\}$ *telle que* $\operatorname{per} X = \det M$.

Squelette de la preuve.

- ABP B de valeur $\operatorname{per} X$
- G : B + boucles sur les sommets sauf s et t + identification $s = t$

De l'ABP au déterminant

Théorème

Soit $X = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. *Il existe une matrice carrée* M *de dimension* $(2^n - 1)$ *à coefficients dans* $\{x_{ij} : 1 \leq i,j \leq n\} \cup \{-1, 0, 1\}$ *telle que* $\operatorname{per} X = \det M$.

Squelette de la preuve.

- ABP B de valeur $\operatorname{per} X$
- G : B + boucles sur les sommets sauf s et t + identification $s = t$
- M : matrice d'adjacence de G

De l'ABP au déterminant

Théorème

Soit $X = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$*. Il existe une matrice carrée* M *de dimension* $(2^n - 1)$ *à coefficients dans* $\{x_{ij} : 1 \leq i,j \leq n\} \cup \{-1, 0, 1\}$ *telle que* $\operatorname{per} X = \det M$*.*

Squelette de la preuve.

- ABP B de valeur $\operatorname{per} X$
- G : B + boucles sur les sommets sauf s et t + identification $s = t$
- M : matrice d'adjacence de G
- $\det M = \pm \operatorname{per} X$

De l'ABP au déterminant

Théorème

Soit $X = (x_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. *Il existe une matrice carrée* M *de dimension* $(2^n - 1)$ *à coefficients dans* $\{x_{ij} : 1 \leq i,j \leq n\} \cup \{-1, 0, 1\}$ *telle que* $\operatorname{per} X = \det M$.

Squelette de la preuve.

- ABP B de valeur $\operatorname{per} X$
- G : B + boucles sur les sommets sauf s et t + identification $s = t$
- M : matrice d'adjacence de G
- $\det M = \pm \operatorname{per} X$
- Si besoin, ajout de poids -1 pour avoir $\det M = \operatorname{per} X$

En savoir plus

- M. Agrawal, **Determinant versus Permanent**, Proc. ICM, 2006.
- P. Bürgisser, **Completeness and Reduction in Algebraic Complexity Theory**, Springer, 2000.
- R. Lipton & K. Regan, **Valiant's Permanent Contributions**, on `http://rjlipton.wordpress.com`, 2011.

En savoir plus

- M. Agrawal, Determinant versus Permanent, Proc. ICM, 2006.
- P. Bürgisser, Completeness and Reduction in Algebraic Complexity Theory, Springer, 2000.
- R. Lipton & K. Regan, Valiant's Permanent Contributions, on `http://rjlipton.wordpress.com`, 2011.

Merci !