Permanent versus Déterminant

Bruno Grenet

ÉNS Lyon
&
University of Toronto

École Jeunes Chercheurs en Informatique Mathématique

Amiens, 30 mars 2011

Cadre

	Modèle booléen	Modèle de Valiant
Objets		
Problèmes		
Mesure		
Classes		

Cadre

	Modèle booléen	Modèle de Valiant
Objets	Mots booléens	
Problèmes		
Mesure		
Classes		

Cadre

	Modèle booléen	**Modèle de Valiant**
Objets	Mots booléens	
Problèmes	CouplageMax, Sat	
Mesure		
Classes		

Cadre

	Modèle booléen	Modèle de Valiant
Objets	Mots booléens	
Problèmes	CouplageMax, Sat	
Mesure	Temps	
Classes		

Cadre

	Modèle booléen	Modèle de Valiant
Objets	Mots booléens	
Problèmes	CouplageMax, Sat	
Mesure	Temps	
Classes	P, NP	

Cadre

	Modèle booléen	Modèle de Valiant
Objets	Mots booléens	Polynômes
Problèmes	CouplageMax, Sat	
Mesure	Temps	
Classes	P, NP	

Cadre

	Modèle booléen	**Modèle de Valiant**
Objets	Mots booléens	Polynômes
Problèmes	CouplageMax, Sat	Ising, Déterminant
Mesure	Temps	
Classes	P, NP	

Cadre

	Modèle booléen	**Modèle de Valiant**
Objets	Mots booléens	Polynômes
Problèmes	CouplageMax, Sat	Ising, Déterminant
Mesure	Temps	Nombre de $+$ et de $\times$
Classes	P, NP	

Cadre

	Modèle booléen	Modèle de Valiant
Objets	Mots booléens	Polynômes
Problèmes	CouplageMax, Sat	Ising, Déterminant
Mesure	Temps	Nombre de $+$ et de $\times$
Classes	P, NP	VP, VNP

Cadre

	Modèle booléen	**Modèle de Valiant**
Objets	Mots booléens	Polynômes
Problèmes	CouplageMax, Sat	Ising, Déterminant
Mesure	Temps	Nombre de $+$ et de $\times$
Classes	P, NP	VP, VNP

Théorème de Valiant (1979)

Permanent *est* VNP*-complet.*

Cadre

	Modèle booléen	Modèle de Valiant
Objets	Mots booléens	Polynômes
Problèmes	CouplageMax, Sat	Ising, Déterminant
Mesure	Temps	Nombre de $+$ et de $\times$
Classes	P, NP	VP, VNP

Théorème de Valiant (1979)

Permanent *est* VNP*-complet.*

Question ouverte

Est-ce que $\mathrm{VP} \neq \mathrm{VNP}$?

Déterminant

Définition

$\mathfrak{S}_n$ = Groupe de permutations de $\{1, \ldots, n\}$

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$$

Déterminant

Définition

$\mathfrak{S}_n$ = Groupe de permutations de $\{1, \dots, n\}$

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$$

Historique : premières traces au XVI$^{\text{ème}}$ siècle

Propriétés

Linéarité $\det(C_1 + C_1', C_2, \ldots, C_n) =$
$\det(C_1, \ldots, C_n) + \det(C_1', \ldots, C_n)$

Propriétés

Linéarité $\det(C_1 + C_1', C_2, \dots, C_n) =$
$\det(C_1, \dots, C_n) + \det(C_1', \dots, C_n)$

Morphisme $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$

Propriétés

Linéarité $\det(C_1 + C'_1, C_2, \ldots, C_n) = \det(C_1, \ldots, C_n) + \det(C'_1, \ldots, C_n)$

Morphisme $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$

Géométrie volume du parallélépipède défini par $(C_1, \ldots, C_n)$

Propriétés

Linéarité	$\det(C_1 + C_1', C_2, \dots, C_n) =$ $\det(C_1, \dots, C_n) + \det(C_1', \dots, C_n)$
Morphisme	$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$
Géométrie	volume du parallélépipède défini par $(C_1, \dots, C_n)$
Algèbre	$\det A = \prod_i \lambda_i$, où λ_i : valeurs propres de A

Propriétés

Linéarité $\det(C_1 + C_1', C_2, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_n) + \det(C_1', \dots, C_n)$

Morphisme $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$

Géométrie volume du parallélépipède défini par $(C_1, \dots, C_n)$

Algèbre $\det A = \prod_i \lambda_i$, où λ_i : valeurs propres de A

Calcul $\det A = [B^m]_{1,1}$ pour B, m facilement calculables

Permanent

Définition

$\mathfrak{S}_n =$ Groupe de permutations de $\{1, \dots, n\}$

$$\operatorname{per} A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$$

Permanent

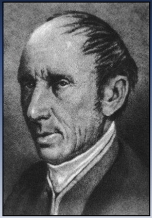
Définition

$\mathfrak{S}_n$ = Groupe de permutations de $\{1, \ldots, n\}$

$$\operatorname{per} A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$$

Idem déterminant, sans les signatures

Permanent



Définition

$\mathfrak{S}_n$ = Groupe de permutations de $\{1, \ldots, n\}$

$$\operatorname{per} A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$$

Idem déterminant, sans les signatures

Historique : Augustin-Louis Cauchy (1812)

MÉMOIRE

SUR LE

NOMBRE DES VALEURS QU'UNE FONCTION PEUT ACQUÉRIR,

LORSQU'ON Y PERMUTE DE TOUTES LES MANIÈRES POSSIBLES
LES QUANTITÉS QU'ELLE RENFERME.

Journal de l'École Polytechnique, XVII[e] Cahier, Tome X, p. 1; 1815.

MM. Lagrange et Vandermonde sont, je crois, les premiers qui aient considéré les fonctions de plusieurs variables relativement au nombre de valeurs qu'elles peuvent obtenir, lorsqu'on substitue ces variables à la place les unes des autres. Ils ont donné plusieurs théorèmes intéressants relatifs à ce sujet dans deux Mémoires imprimés en 1771, l'un à Berlin, l'autre à Paris. Depuis ce temps, quelques géomètres italiens se sont occupés avec succès de cette matière et, particulièrement, M. Ruffini, qui a consigné le résultat de ses recherches dans le Tome XII des *Mémoires de la Société italienne* et dans sa *Théorie des équations numériques*. Une des conséquences les plus remarquables des travaux de ces divers géomètres est que, avec un nombre donné de lettres, on ne peut pas toujours former une fonction qui ait un nombre déterminé de valeurs. Les caractères par lesquels cette impossibilité se manifeste ne sont pas toujours faciles à saisir; mais on peut du moins, pour un nombre donné de lettres, assigner des limites que le nombre des valeurs ne peut dépasser et déterminer en outre un grand nombre de cas d'exclusion. Je vais exposer dans ce Mémoire ce qu'on avait déjà trouvé de plus important sur cet objet et ce que mes propres recherches

MÉMOIRE

SUR LES

FONCTIONS QUI NE PEUVENT OBTENIR QUE DEUX VALEURS

ÉGALES ET DE SIGNES CONTRAIRES PAR SUITE DES TRANSPOSITIONS
OPÉRÉES ENTRE LES VARIABLES QU'ELLES RENFERMENT (1).

Journal de l'École Polytechnique, XVII[e] Cahier, Tome X, p. 29; 1815.

PREMIÈRE PARTIE.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES ALTERNÉES.

§ I[er]. Après les fonctions qu'on appelle ordinairement *symétriques* et qui ne changent ni de valeur ni de signe, par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment, les plus remarquables sont celles qui peuvent changer de signe, mais non pas de valeur, en vertu des mêmes transpositions. Lorsqu'on développe ces dernières, on les trouve composées de plusieurs termes alternativement positifs et négatifs et, pour les transformer en fonctions symétriques ordinaires, il suffirait de changer le signe des termes négatifs. En faveur de cette analogie, je comprendrai sous la dénomination commune de *fonctions symétriques* toutes les fonctions qui ne changent pas de valeur, mais tout au plus de signe en vertu de transpositions opérées entre les

(1) Lu à l'Institut, le 30 novembre 1812.

Moins de propriétés

Linéarité $\operatorname{per}(C_1 + C'_1, C_2, \ldots, C_n) = \operatorname{per}(C_1, \ldots, C_n) + \operatorname{per}(C'_1, \ldots, C_n)$

Moins de propriétés

Linéarité $\mathrm{per}(C_1 + C_1', C_2, \ldots, C_n) = \mathrm{per}(C_1, \ldots, C_n) + \mathrm{per}(C_1', \ldots, C_n)$

Graphes Nombre de couvertures par cycles

Moins de propriétés

Linéarité $\mathrm{per}(C_1 + C_1', C_2, \ldots, C_n) = \mathrm{per}(C_1, \ldots, C_n) + \mathrm{per}(C_1', \ldots, C_n)$

Graphes Nombre de couvertures par cycles

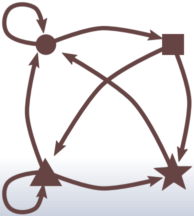
Ou encore Nombre de couplages parfaits dans un graphe biparti

Exemple

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

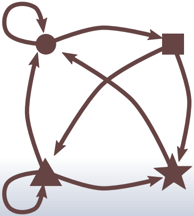
Exemple

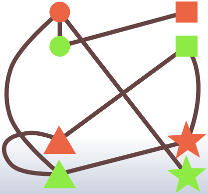
$$
\begin{array}{c c}
\bullet & \\
\blacksquare & \\
\bigstar & \\
\blacktriangle &
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$



Exemple

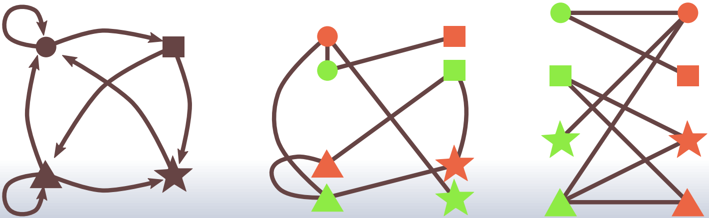
$$
\begin{array}{c}
\bullet \\ \blacksquare \\ \bigstar \\ \blacktriangle
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$





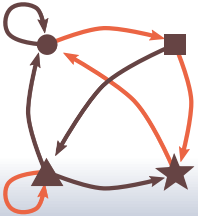
Exemple

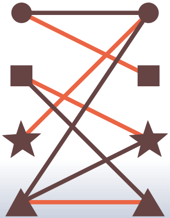
$$\begin{array}{c}
\bullet \\
\blacksquare \\
\bigstar \\
\blacktriangle
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$



Exemple

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \blacksquare \\ \bigstar \\ \blacktriangle \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





Complexité déterminantale

Permanent vs. Déterminant

Entrée Matrice P de taille $n \times n$

Question Trouver une matrice D de taille minimale $\mathrm{dc}(n)$ telle que $\mathrm{per}\, P = \det D$.

Complexité déterminantale

Permanent vs. Déterminant

Entrée Matrice P de taille $n \times n$

Question Trouver une matrice D de taille minimale $\mathrm{dc}(n)$ telle que $\mathrm{per}\, P = \det D$.

La fonction $\mathrm{dc}(n)$ est la complexité déterminantale du permanent.

Complexité déterminantale

Permanent vs. Déterminant

Entrée Matrice P de taille $n \times n$

Question Trouver une matrice D de taille minimale $\mathrm{dc}(n)$ telle que $\mathrm{per}\, P = \det D$.

La fonction $\mathrm{dc}(n)$ est la complexité déterminantale du permanent.

$$\mathrm{VP} = \mathrm{VNP} \iff \mathrm{dc}(n) = n^{\mathcal{O}(1)}$$

(ou presque...)

Formalisation

- $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$: $\det A, \operatorname{per} A \in \mathbb{K}[a_{11}, \dots, a_{nn}]$

Formalisation

- $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$: $\det A, \operatorname{per} A \in \mathbb{K}[a_{11}, \ldots, a_{nn}]$
  - $\rightsquigarrow$ Polynômes multilinéaires de degré n à n^2 variables

Formalisation

- $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$: $\det A, \operatorname{per} A \in \mathbb{K}[a_{11}, \ldots, a_{nn}]$
  - $\rightsquigarrow$ Polynômes multilinéaires de degré n à n^2 variables
- Graphes avec poids sur les arcs

Exemples

$$\operatorname{per}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Exemples

$$\operatorname{per}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \rightsquigarrow \textcolor{red}{\mathrm{dc}(2) = 2}$$

Exemples

$$\operatorname{per}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \rightsquigarrow \mathrm{dc}(2) = 2$$

$$\operatorname{per}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & a & d & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & i & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 & f \\ e & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemples

$$\mathrm{per}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \rightsquigarrow \mathrm{dc}(2) = 2$$

$$\mathrm{per}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & a & d & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & i & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 & f \\ e & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \rightsquigarrow \mathrm{dc}(3) \leq 7$$

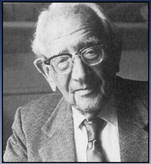
Exemples

$$\mathrm{per}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \rightsquigarrow \mathrm{dc}(2) = 2$$

$$\mathrm{per}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & a & d & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & i & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 & f \\ e & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \rightsquigarrow \mathrm{dc}(3) \leq 7$$

Une solution plus petite ? ($\mathrm{dc}(3) \geq 5$)

Première formulation

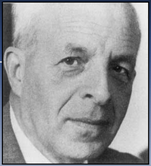


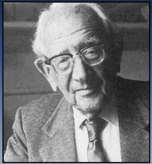
Georges Pólya (1913)

Entrée Matrice P de taille $n \times n$

Question Peut-on attribuer des signes aux cœfficients de P pour obtenir D telle que $\operatorname{per} P = \det D$?

Première formulation





Georges Pólya (1913)

Entrée Matrice P de taille $n \times n$

Question Peut-on attribuer des signes aux cœfficients de P pour obtenir D telle que $\operatorname{per} P = \det D$?

- Gábor Szegö (1913) : non si $n \geq 3$

Complexité

Théorème [Leslie G. Valiant (1979)]

Le permanent d'une matrice entière (ou même booléenne) est #P-*complet.*

Complexité

Théorème [Leslie G. Valiant (1979)]

Le permanent d'une matrice entière (ou même booléenne) est #P-complet.

Dans un graphe biparti

- on peut trouver un couplage parfait en temps polynomial

Complexité

Théorème [Leslie G. Valiant (1979)]

Le permanent d'une matrice entière (ou même booléenne) est #P-complet.

Dans un graphe biparti

- on peut trouver un couplage parfait en temps polynomial
- mais compter leur nombre est #P-complet.

Bornes inférieures

1913 $\mathrm{dc}(n) \geq n+1$ G. Szegö

Bornes inférieures

1913	$\mathrm{dc}(n) \geq n+1$	G. Szegö
1986	$\mathrm{dc}(n) \geq \sqrt{2}n - 6\sqrt{n}$	J. von zur Gathen

Bornes inférieures

1913	$\mathrm{dc}(n) \geq n+1$	G. Szegö
1986	$\mathrm{dc}(n) \geq \sqrt{2}n - 6\sqrt{n}$	J. von zur Gathen
1990	$\mathrm{dc}(n) \geq \sqrt{2}n$	J.Y. Cai

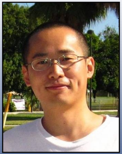
Bornes inférieures

1913	$\mathrm{dc}(n) \geq n+1$	G. Szegö
1986	$\mathrm{dc}(n) \geq \sqrt{2}n - 6\sqrt{n}$	J. von zur Gathen
1990	$\mathrm{dc}(n) \geq \sqrt{2}n$	J.Y. Cai
2004	$\mathrm{dc}(n) \geq n^2/2$ en caractéristique 0	T. Mignon, N. Ressayre




Bornes inférieures

1913	$\mathrm{dc}(n) \geq n+1$	G. Szegö
1986	$\mathrm{dc}(n) \geq \sqrt{2}n - 6\sqrt{n}$	J. von zur Gathen
1990	$\mathrm{dc}(n) \geq \sqrt{2}n$	J.Y. Cai
2004	$\mathrm{dc}(n) \geq n^2/2$ en caractéristique 0	T. Mignon, N. Ressayre
2008	$\mathrm{dc}(n) \geq n^2/2$ en caractéristique $\neq 2$	J.Y. Cai, X. Chen, D. Li

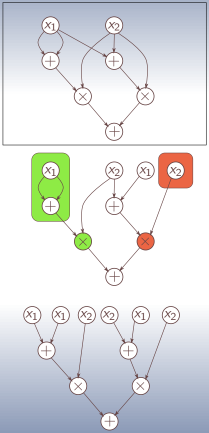
Bornes inférieures

1913	$\mathrm{dc}(n) \geq n+1$	G. Szegö
1986	$\mathrm{dc}(n) \geq \sqrt{2}n - 6\sqrt{n}$	J. von zur Gathen
1990	$\mathrm{dc}(n) \geq \sqrt{2}n$	J.Y. Cai
2004	$\mathrm{dc}(n) \geq n^2/2$ en caractéristique 0	T. Mignon, N. Ressayre
2008	$\mathrm{dc}(n) \geq n^2/2$ en caractéristique $\neq 2$	J.Y. Cai, X. Chen, D. Li

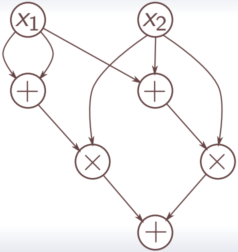
Conjecture

$$\mathrm{dc}(n) \geq 2^{\Omega(n)}$$

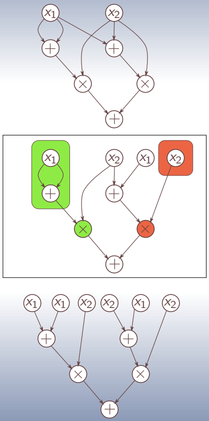
Retour aux polynômes



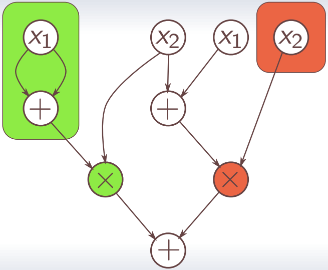
Circuit arithmétique :



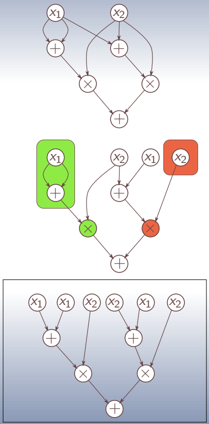
Retour aux polynômes



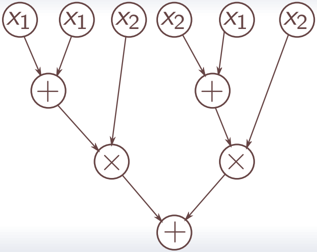
Circuit faiblement asymétrique :



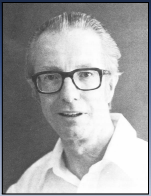
Retour aux polynômes

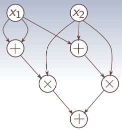


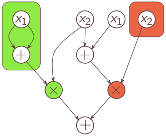
Formule :

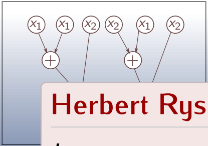


Retour aux polynômes

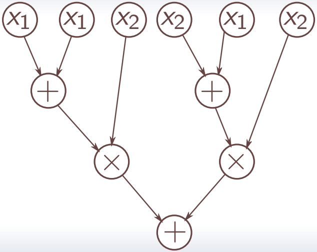








Formule :



Herbert Ryser (1963) & David Glynn (2011)

Le permanent admet une formule de taille $O(n \times 2^n)$.

Liens Circuits – Déterminant

Théorème [Leslie G. Valiant (1979)]

Toute formule de taille s peut s'exprimer comme un déterminant de taille $(s+2) \times (s+2)$.

Liens Circuits – Déterminant

Théorème [Leslie G. Valiant (1979)]

Toute formule de taille s peut s'exprimer comme un déterminant de taille $(s+2)\times(s+2)$.

Extensions :

Liens Circuits – Déterminant

Théorème [Leslie G. Valiant (1979)]

Toute formule de taille s peut s'exprimer comme un déterminant de taille $(s+2) \times (s+2)$.

Extensions :

- Circuits faiblement asymétriques : S. Toda (1992), G. Malod, N. Portier (2008)



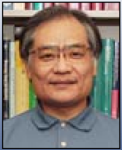
Liens Circuits – Déterminant

Théorème [Leslie G. Valiant (1979)]

Toute formule de taille s peut s'exprimer comme un déterminant de taille $(s+2) \times (s+2)$.

Extensions :

- Circuits faiblement asymétriques : S. Toda (1992), G. Malod, N. Portier (2008)
- Déterminants de matrices symétriques : B.G., E.L. Kaltofen, P. Koiran, N. Portier (2011)





Liens Circuits – Déterminant

Théorème [Leslie G. Valiant (1979)]

Toute formule de taille s peut s'exprimer comme un déterminant de taille $(s+2) \times (s+2)$.

Extensions :

- Circuits faiblement asymétriques : S. Toda (1992), G. Malod, N. Portier (2008)
- Déterminants de matrices symétriques : B.G., E.L. Kaltofen, P. Koiran, N. Portier (2011)

Formule de taille $n^{\log n}$, circuit faiblement asymétrique de taille $n^{\mathcal{O}(1)}$.

Deux approches

- Test d'Identité de Polynômes :

Deux approches

- Test d'Identité de Polynômes :

  Entrée : Polynôme P, représenté par un circuit

Deux approches

- Test d'Identité de Polynômes :

  Entrée : Polynôme P, représenté par un circuit
  Question : Est-ce que $P \equiv 0$?

Deux approches

- Test d'Identité de Polynômes :

Entrée :	Polynôme P, représenté par un circuit
Question :	Est-ce que $P \equiv 0$?
Complexité :	Algorithme probabiliste polynomial

Deux approches

- Test d'Identité de Polynômes :

Entrée :	Polynôme P, représenté par un circuit
Question :	Est-ce que $P \equiv 0$?
Complexité :	Algorithme probabiliste polynomial
Lien :	Algo. poly. déterministe $\implies \mathrm{dc}(n) \not\leq n^{\mathcal{O}(1)}$ (ou presque...)

Deux approches

- Test d'Identité de Polynômes :

  Entrée : Polynôme P, représenté par un circuit
  Question : Est-ce que $P \equiv 0$?
  Complexité : Algorithme probabiliste polynomial
  Lien : Algo. poly. déterministe $\implies \mathrm{dc}(n) \not\leq n^{\mathcal{O}(1)}$
  (ou presque...)

- Geometric Complexity Theory :

Deux approches

- Test d'Identité de Polynômes :

  Entrée : Polynôme P, représenté par un circuit
  Question : Est-ce que $P \equiv 0$?
  Complexité : Algorithme probabiliste polynomial
  Lien : Algo. poly. déterministe $\implies \mathrm{dc}(n) \not\leq n^{\mathcal{O}(1)}$
  (ou presque...)

- Geometric Complexity Theory :

  But : Traduire Permanent vs Déterminant en un problème de géométrie algébrique

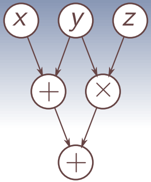
Retour aux matrices symétriques

Théorème [B.G., E.L. Kaltofen, P. Koiran, N. Portier]

Toute formule (ou circuit faiblement asymétrique) de taille s peut être représentée par un déterminant symétrique de taille $2s$.

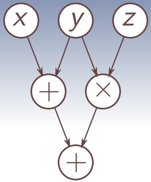
Idée générale

$$(x + y) + (y \times z)$$



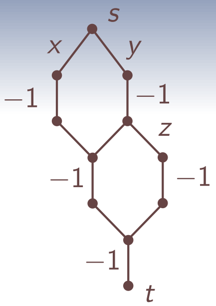
Circuit : formule ou faiblement asymétrique

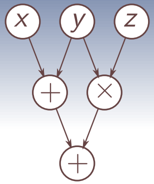
Idée générale



Circuit : formule ou faiblement asymétrique

Idée générale

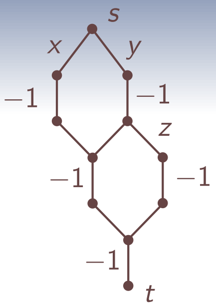




Arithmetic Branching Program

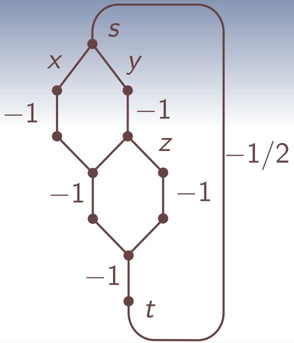
Circuit $\Longrightarrow$ ABP

Idée générale



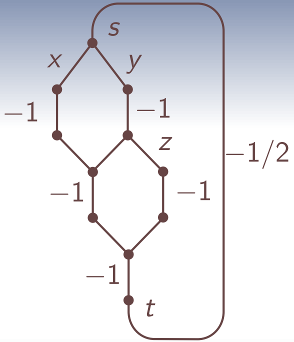
Circit $\Longrightarrow$ ABP

Idée générale



Circuit $\Longrightarrow$ ABP $\Longrightarrow$ Graphe

Idée générale

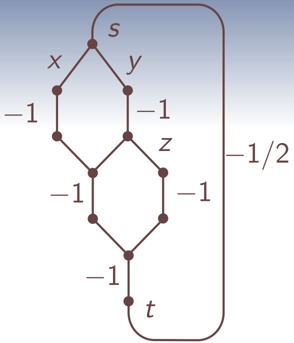


$$\det \begin{vmatrix} 0 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ x & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (x + y) + (y \times z)$$

Circuit $\Longrightarrow$ ABP $\Longrightarrow$ Graphe $\Longrightarrow$ Matrice

Idée générale



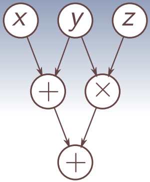
$$\det \begin{vmatrix} 0 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ x & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

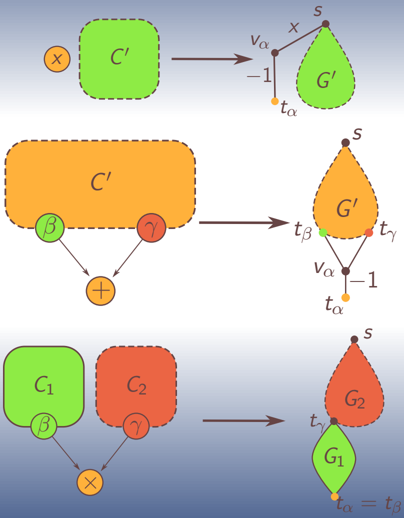
$$= (x + y) + (y \times z)$$

Caractéristique $\neq 2$

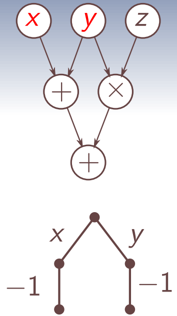
Circuit $\Longrightarrow$ ABP $\Longrightarrow$ Graphe $\Longrightarrow$ Matrice

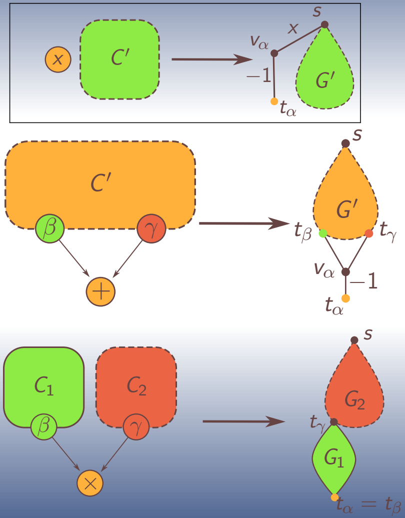
Circuit $\Longrightarrow$ ABP



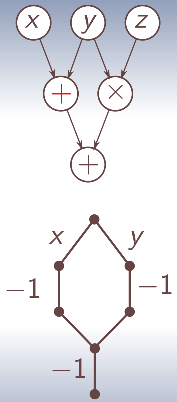


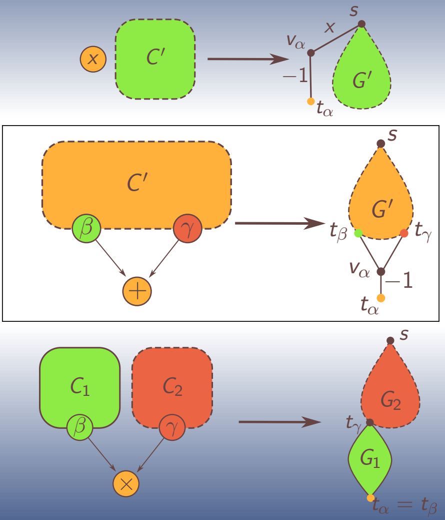
Circuit $\Longrightarrow$ ABP



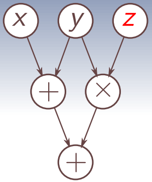


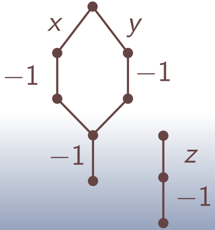
Circuit $\Longrightarrow$ ABP

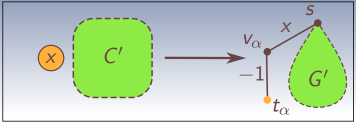


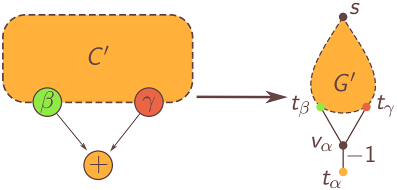


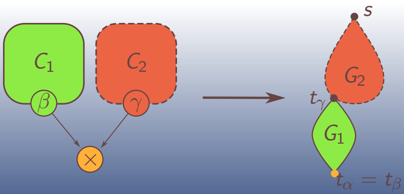
Circuit $\Longrightarrow$ ABP



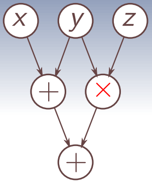


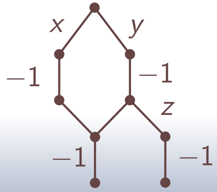


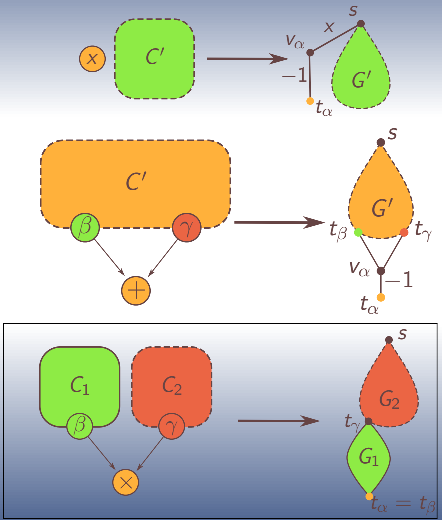




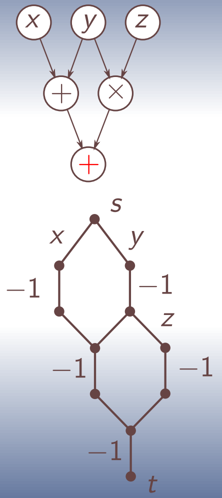
Circuit $\Longrightarrow$ ABP

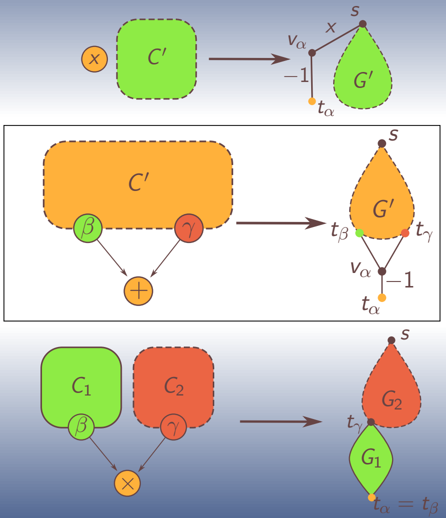






Circuit $\Longrightarrow$ ABP





Caractéristique 2

- Constructions non valides

Caractéristique 2

- Constructions non valides
- Couverture par cycles $\equiv$ couverture par monomères-dimères

Caractéristique 2

- Constructions non valides
- Couverture par cycles $\equiv$ couverture par monomères-dimères

Théorème [B.G., T. Monteil, S. Thomassé (2011)]

Il existe des polynômes qui ne peuvent pas être représentés par des déterminants de matrices symétriques.

Caractéristique 2

- Constructions non valides
- Couverture par cycles $\equiv$ couverture par monomères-dimères

Théorème [B.G., T. Monteil, S. Thomassé (2011)]

Il existe des polynômes qui ne peuvent pas être représentés par des déterminants de matrices symétriques.

- Exemples : $xy + z$, $xyz + 1$

En savoir plus

- M. Agrawal, Determinant versus Permanent, Proc. ICM, 2006.
- P. Bürgisser, Completeness and Reduction in Algebraic Complexity Theory, Springer, 2000.
- R. Lipton & K. Regan, Valiant's Permanent Contributions, on `http://rjlipton.wordpress.com`, 2011.

En savoir plus

- M. Agrawal, **Determinant versus Permanent**, Proc. ICM, 2006.
- P. Bürgisser, **Completeness and Reduction in Algebraic Complexity Theory**, Springer, 2000.
- R. Lipton & K. Regan, **Valiant's Permanent Contributions**, on `http://rjlipton.wordpress.com`, 2011.

Merci !