Évaluation continue – 9 février 2026

La durée de l'évaluation est 1h. Aucun document n'autorisé. Le barème est indicatif. Les réponses doivent être correctement rédigées. Les trois exercices sont indépendants. Toute question non résolue peut être admise dans la suite.

Exercice 1 (sur 4 pts). *Vrai ou faux*

Déterminer si chaque affirmation suivante est vraie ou fausse, en **justifiant la réponse. Tout résultat du cours peut être utilisé en l'énonçant clairement, mais une réponse vrai/faux sans justification ne donne pas de point.**

1. Une machine de Turing à un ruban peut être simulée par une machine RAM standard (dont chaque registre contient un entier de n bits).
2. L'ensemble des programmes WHILE est un ensemble dénombrable.
3. Il est possible de définir une machine de Turing qui, étant donné le texte d'un programme WHILE (avec ses entrées), effectue le même calcul que ce programme.
4. Il est possible d'écrire un programme (dans votre langage préféré) qui, étant donné la table de transition d'une machine de Turing $\mathcal{M}$ et une configuration initiale, renvoie VRAI si en partant de cette configuration initiale, la suite des configurations est finie et FAUX sinon.

Exercice 2 (sur 6 pts). *Des calculs*

1. Décrire une machine de Turing qui, étant donné un entier n écrit en binaire sur son ruban, calcule le mot 1^n (n fois le symbole 1). Par exemple, sur l'entrée 101, la machine doit calculer 11111. *Remarque. La machine doit être donnée explicitement par un automate ou une table de transition. Il est conseillé, mais pas obligatoire, de n'utiliser qu'un seul ruban.*
2. En utilisant l'égalité $\binom{n}{2} = \sum_{i=0}^{n-1} i$, écrire un programme WHILE qui étant donné n (dans la variable x_1), calcule $\binom{n}{2}$ (dans la variable x_0). *Il est autorisé d'utiliser l'instruction d'addition $x_i \leftarrow x_j + x_k$.*
3. Traduire ce programme en machine RAM qui effectue le même calcul.

Exercice 3 (sur 10 pts). *Une machine de Turing*

Soit $\mathcal{M}$ la machine de Turing décrite par la table de transition ci-dessous. *Chaque ligne représente un quintuplet (état courant, symbole lu, symbole écrit, déplacement, nouvel état). L'état initial est q_0.*

Il est fortement conseillé de dessiner la machine sur un brouillon.

q_0	0	$\square$	$\rightarrow$	q_1
	0	X	$\rightarrow$	q_2
q_1	X	X	$\rightarrow$	q_1
	$\square$	$\square$	$\rightarrow$	oui
	0	0	$\rightarrow$	q_3
q_2	X	X	$\rightarrow$	q_2
	$\square$	$\square$	$\leftarrow$	q_4
q_3	0	X	$\rightarrow$	q_2
	X	X	$\rightarrow$	q_3
	0	0	$\leftarrow$	q_4
q_4	X	X	$\leftarrow$	q_4
	$\square$	$\square$	$\rightarrow$	q_1

1. Parmi les mots 0, 00, 000 et 000000, lesquels appartiennent à $L(\mathcal{M})$? *Justifier en donnant la configuration finale atteinte.*

On souhaite maintenant comprendre ce que fait cette machine. Supposons que l'entrée est 0^n pour un certain $n > 1$.Après une étape de calcul, la machine arrive dans la configuration $q_1 : \check{0}^{n-1}$. *Note. La notation $\check{w}$ signifie que la tête est sur la première lettre de w.*

Au cours du calcul, certains 0 sont remplacés par des X. À tout moment du calcul, le mot inscrit sur le ruban est donc un mot $w \in \{0, X\}^*$.

2. Supposons que la machine est dans la configuration $q_1 : \check{w}$ où w possède k symboles 0. On écrit $k = 2^t \cdot m - 1$ avec m impair, c'est-à-dire qu'on *factorise* la plus grande puissance de 2 possible dans $k + 1$.
Exemples. Pour la configuration $q_1 : \check{X}0X0$, $k = 2 = 2^0 \times 3 - 1$ donc $t = 0$ et $m = 3$; pour la configuration $q_1 : \check{0}00$, $k = 3 = 2^2 \times 1 - 1$ donc $t = 2$ et $m = 1$.
   - **i.** Montrer que si $t = 0$ et $m > 1$ (donc $k = m - 1$ est pair), alors la machine se bloque en q_3.
   - **ii.** Montrer que si $t > 0$ (donc $k = 2^t \cdot m - 1$ est impair), la machine finit par revenir dans une configuration $q_1 : \check{w}'$ où w' possède $2^{t-1} \cdot m - 1$ symboles 0.
   - **iii.** Que se passe-t-il si $k = 0$?
3.
   - **i.** Si l'entrée sur le ruban est 0^n, déduire de ce qui précède la condition sur n pour que la machine accepte l'entrée.
   - **ii.** Décrire aussi précisément que possible le langage $L(\mathcal{M})$.