

Évaluation continue – 24 février 2025

La durée de l'évaluation est 1h. Aucun document n'autorisé. Le barème est indicatif. Les réponses doivent être correctement rédigées. Les trois exercices sont indépendants. Toute question non résolue peut être admise dans la suite.

Exercice 1 (sur 7 pts).

Calculs

1. Soit $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ définie par $f(w) = (0w) \oplus (w0)$ où $0w$ et $w0$ sont les mots obtenus en ajoutant un 0 à gauche ou à droite de w respectivement, et \oplus est le XOR bit-à-bit.
Exemples : $f(110) = 0110 \oplus 1100 = 1010$, $f(0101) = 00101 \oplus 01010 = 01111$.
Décrire une machine de Turing qui calcule la fonction f .
2. Étant donné un entier pair n , on souhaite calculer $n/2$ avec l'idée suivante : $n/2$ est le nombre de fois qu'il faut retrancher 2 à n pour obtenir 0.
 - i. Écrire un programme WHILE¹ qui étant donné n pair², calcule $n/2$.
 - ii. Traduire ce programme WHILE en machine RAM.

Exercice 2 (sur 4 pts).

Vrai ou faux

Déterminer si chaque affirmation suivante est vraie ou fausse, en **justifiant la réponse**. **Tout résultat du cours peut être utilisé en l'énonçant clairement, mais une réponse vrai/faux sans justification ne donne pas de point.**

1. Il y a plus de fonctions calculables par des machines de Turing à 2 rubans que par des machines RAM.
2. La fonction f définie nulle part, c'est-à-dire telle que $f(w)$ est indéfini pour tout w , est une fonction calculable.
3. Une machine de Turing *cyclique* est une variante de machine de Turing dont le ruban est un *cycle* : ses cases sont numérotées de 0 à $n-1$; pour $0 \leq i < n-1$, la case $i+1$ est à droite de la case i , et la case 0 est à droite de la case $n-1$. Une machine de Turing cyclique peut calculer toute fonction calculable.
4. Il existe des langages décidables qui ne sont pas co-reconnaisables.

1. Il est conseillé de se restreindre au langage WHILE minimal : uniquement des initialisations $x \leftarrow 0$, des incréments/décréments $x \leftarrow x \pm 1$, des copies $x \leftarrow y$, et une boucle « while $x \neq 0$: ... » ($x \neq 0$ est le seul test autorisé).

2. On suppose que l'entrée est paire, sans avoir besoin de le vérifier.

Exercice 3 (sur 10 pts).

Une machine de Turing

Soit \mathcal{M} la machine de Turing décrite par la table de transition ci-dessous. Chaque ligne représente un quintuplet (état courant, symbole lu, symbole écrit, déplacement, nouvel état). L'état initial est q_0 . La notation «*» désigne un des cinq caractères a , b , c , B ou C , qui est laissé inchangé lors de la transition.

Il est fortement conseillé de dessiner la machine sur un brouillon.

q_0	a	A	→	q_1
	B	B	→	q_4
q_1	a	a	→	q_1
	B	B	→	q_1
	b	B	→	q_2
q_2	b	b	→	q_2
	C	C	→	q_2
	c	C	←	q_3
q_3	*	*	←	q_3
	A	A	→	q_0
q_4	B	B	→	q_4
	C	C	→	q_4
	□	□	→	OUI

- Déterminer si chacune des entrées suivantes est acceptée par \mathcal{M} : a , ac , abc , $aabc$, $abca$, $aabbcc$.

On note $w \in \{a, b, c\}^*$ le mot en entrée, et on l'écrit sous la forme $w = a^\ell b^m c^n w'$ avec $\ell, m, n \geq 0$. Exemples. $aabccbac = a^2 b^1 c^2 w'$ avec $w' = bac$, $bbcb = a^0 b^2 c^1 w'$ avec $w' = b$, $aac = a^2 b^0 c^1 w'$ avec $w' = \varepsilon$ (le mot vide).

- Montrer que si ℓ, m ou n vaut 0, alors la machine se bloque dans l'un des états q_0, q_1 ou q_2 .
 - Si $\ell > 0, m > 0$ et $n > 0$, la machine revient dans l'état q_0 : décrire la configuration lors du (premier) retour en q_0 .
- On suppose maintenant $\ell, m, n > 0$.
 - Montrer que si $m < \ell$ ou $n < \ell$, alors la machine se bloque dans l'un des états q_1, q_2 ou q_4 .
 - Montrer que si $m \geq \ell$ et $n \geq \ell$, alors la machine atteint l'état q_4 , et décrire la configuration obtenue.
- Décrire aussi précisément que possible le langage accepté par \mathcal{M} .