Examen – 17 avril 2025

La durée de l'évaluation est 1h. Aucun document n'autorisé. Le barème est indicatif. Les réponses doivent être correctement rédigées. Les deux jeexercices sont indépendants. Toute question non résolue peut être admise dans la suite.

Exercice 1 (sur 10 pts). *Une machine de Turing*

Soit $\mathcal{M}$ la machine de Turing décrite par la table de transition ci-dessous. *Chaque ligne représente un quintuplet (état courant, symbole lu, symbole écrit, déplacement, nouvel état). L'état initial est q_0. Il est fortement conseillé de dessiner la machine sur un brouillon.*

q_0	1	0	$\rightarrow$	q_0
	$\square$	$\square$	$\leftarrow$	q_1
q_1	0	1	$\rightarrow$	q_2
	1	1	$\leftarrow$	q_1
	$\square$	$\square$	$\rightarrow$	q_3
q_2	1	1	$\rightarrow$	q_2
	$\square$	1	$\leftarrow$	q_1

1. Pour chacun des mots w suivants, donner la suite des configurations de $\mathcal{M}$ sur l'entrée w :
   - **i.** $w = \varepsilon$ (le mot vide) ;
   - **ii.** $w = 1$;
   - **iii.** $w = 11$;
   - **iv.** $w = 101$.
2. Soit $w \in \{0,1\}^*$ tel que w contient au moins un 0. Montrer que la machine $\mathcal{M}$ s'arrête et décrire le contenu du ruban lorsqu'elle s'arrête.
3. Soit $w = 1^n$ (mot constitué de n symboles 1).
   - **i.** Donner la configuration précise lorsque la machine arrive dans l'état q_1 pour la première fois.
   - **ii.** Depuis l'état q_1, la machine va passer dans l'état q_2 puis revenir dans l'état q_1 : donner la configuration lorsque la machine revient pour la $2^{\text{ème}}$ fois dans l'état q_1.
   - **iii.** Généraliser : quelle est la configuration lorsque la machine rentre pour la $k^{\text{ème}}$ fois dans l'état q_1, pour $k \leq n$?
4. Décrire aussi précisément que possible la fonction $f_{\mathcal{M}}$ calculée par la machine $\mathcal{M}$. *Attention : on demande de décrire le résultat du calcul pour chaque mot* $w \in \{0,1\}^*$.

Exercice 2 (sur 10 pts). *Vrai, faux ou absurde*

Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie, fausse ou absurde (elle ne veut rien dire). **Justifier la réponse. Tout résultat du cours peut être utilisé en l'énonçant clairement, mais une réponse sans justification ne donne pas de point.**

1. Pour toute fonction $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$, il existe une machine de Turing $\mathcal{M}$ qui calcule f (c'est-à-dire que $f = f_{\mathcal{M}}$).
2. Un algorithme décidable est récursivement énumérable, sauf s'il est co-récursivement énumérable.
3. Il existe un algorithme $\mathcal{A}$ qui, étant donné la description $\langle \mathcal{A}' \rangle$ d'un autre algorithme $\mathcal{A}'$ et une entrée w, boucle si $\mathcal{A}'$ s'arrête sur l'entrée w, et termine si $\mathcal{A}'$ boucle sur l'entrée w.
4. Toute fonction primitive récursive (c'est-à-dire calculée par un programme LOOP) est calculable.
5. Un langage est décidable si et seulement si son complémentaire est décidable.
6. Deux algorithmes différents calculent toujours des fonctions différentes.
7. Soit $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ une fonction partielle calculable. L'ensemble $\{w \in \{0,1\}^* : f(w) \text{ est défini}\}$ est un langage reconnaissable.
8. Le théorème de Rice permet d'affirmer que le problème suivant est indécidable : étant donné un algorithme $\mathcal{A}$, est-ce qu'il existe au moins 2025 entrées sur lesquelles $\mathcal{A}$ ne boucle pas ?
9. Le théorème de Rice permet d'affirmer que le problème suivant est indécidable : étant donné un algorithme $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ reconnaît-il le complémentaire du problème de l'arrêt ?
10. La fonction suivante t est incalculable : étant donné une machine de Turing $\mathcal{M}$ et une entrée w, $t(\mathcal{M}, w)$ est le nombre d'étapes de calcul avant que $\mathcal{M}$ s'arrête, ou $+\infty$ si $\mathcal{M}$ boucle sur w.