6. Incalculabilité – exemples

Bruno Grenet

Université Grenoble Alpes – IM²AG

L3 Informatique

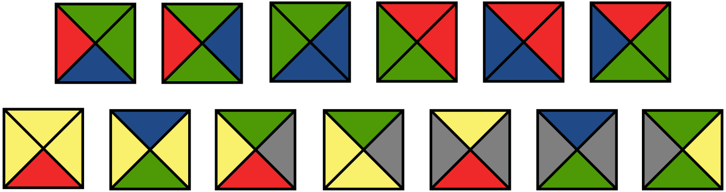
UE Modèles de calcul – Machines de Turing

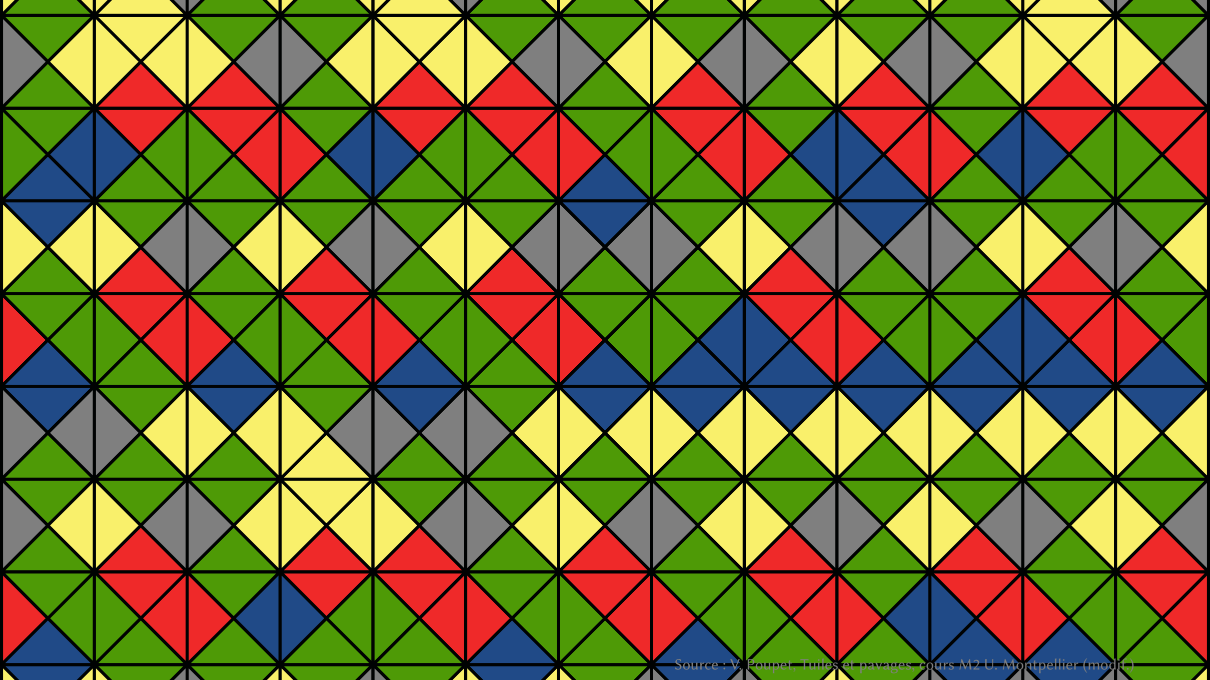
https://membres-ljk.imag.fr/Bruno.Grenet/MCAL-MT.html

Table des matières

Table des matières

Peut-on paver tout le plan avec ces tuiles ?





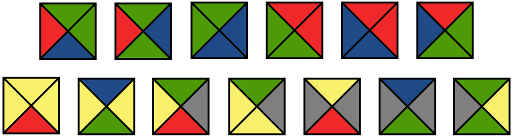
Source : V. Poupet, Tuiles et pavages, cours M2 U. Montpellier (modif.)

Tuiles de Wang pavage

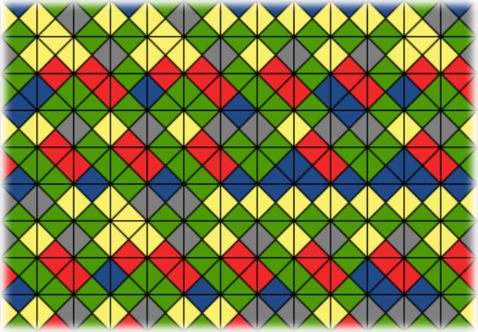
Définitions

- Une tuile est un carré unité dont les bords ont une couleur
- Un jeu de tuiles est un ensemble fini de tuiles
- Un pavage du plan est le placement de copies de tuiles, bord-à-bord, de façon à ce que les couleurs en contact coincident

Tuiles



Pavage



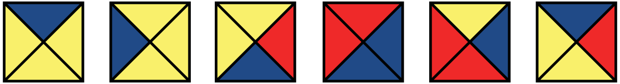
Remarque

Les tuiles ne peuvent pas être tournées

 $\neq$  $\neq$ 

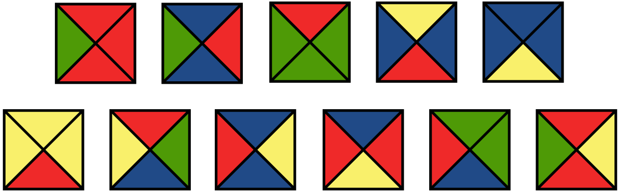
Exemple 1

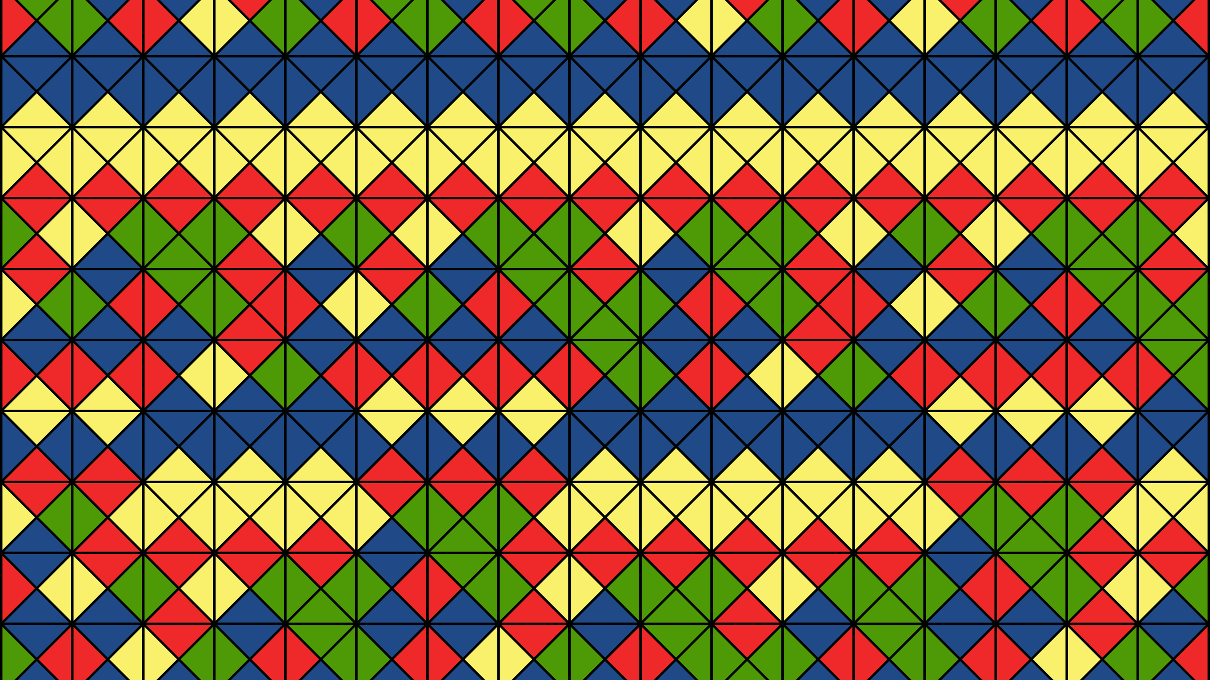
Exemple 2



Exemple 3

Exemple 4





Le(s) problème(s)

Pavage du plan

Entrée : Un ensemble fini de tuiles de Wang

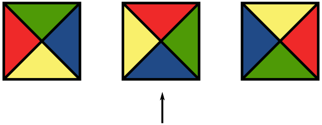
Sortie : Existe-t-il un pavage du plan avec ce jeu de tuiles ?

Pavage du plan *avec tuile de départ*

Entrées : Un ensemble fini T de tuiles de Wang

Une tuile de départ $t_0 \in T$

Sortie : Existe-t-il un pavage du plan avec ce jeu de tuiles qui contient t_0 ?



Indécidabilité

Théorème

- Le problème du pavage du plan est indécidable
- Le problème du pavage du plan avec tuile de départ est indécidable

Remarques

- Problèmes co-reconnaissables
  - Si le plan n'est pas pavable, il existe un carré $n \times n$ non pavable
  - Essayer toutes les possibilités $\rightarrow$ on trouve un carré non pavable s'il existe
- Pavage du plan avec tuile de départ *plus difficile*
  - Supposons qu'on sache le résoudre avec un algorithme A
  - On applique A avec toutes les tuiles de départ possibles
    $\Rightarrow$ résolution du pavage du plan

On démontre uniquement le $2^{\text{ème}}$ résultat, (beaucoup) plus simple

Point de départ : les machines de Turing

Rappel

Il n'y a pas d'algorithme pour décider si une machine de Turing s'arrête sur l'entrée vide

Choix de variante

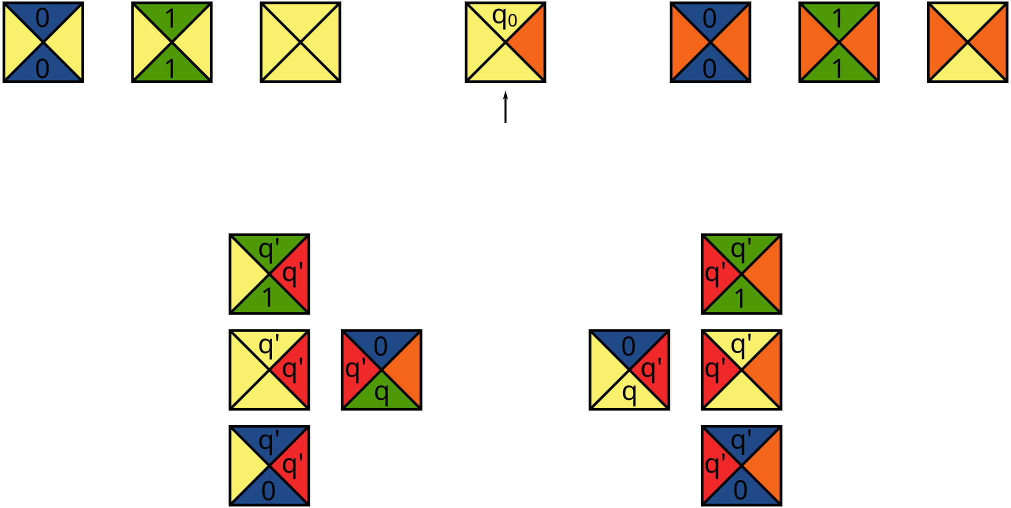
- On considère $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, q_0, \delta)$ avec $\Sigma = \{0, 1, \square\}$

Stratégie

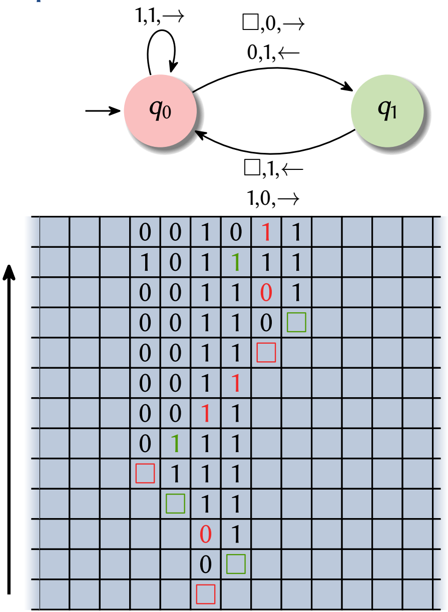
- Étant donné $\mathcal{M}$, on construit un jeu de tuiles qui *simule* $\mathcal{M}$
  - Une *ligne* du pavage = état du ruban à une étape donnée
  - Deux lignes consécutives = une étape de calcul
  - Une tuile de départ = état initial de la machine
  - Une tuile blanche pour compléter le plan
- $\mathcal{M}$ termine sur l'entrée vide $\iff$ le jeu de tuile ne pave pas le plan

$\Rightarrow$ *réduction* du problème du *non-arrêt* sur l'entrée vide au pavage avec tuile de départ
(non-arrêt sur l'entrée vide $\leq_m$ pavage avec tuile de départ)

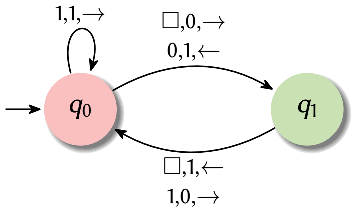
Le jeu de tuile



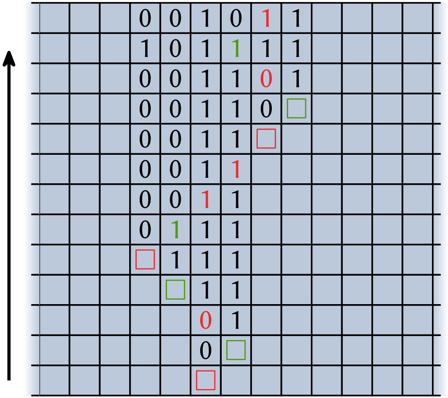
Exemple


1,1,→
□,0,→
0,1,←
q0
q1
□,1,←
1,0,→
0 0 1 0 1 1
1 0 1 1 1 1
0 0 1 1 0 1
0 0 1 1 0 □
0 0 1 1 □
0 0 1 1
0 0 1 1
0 1 1 1
□ 1 1 1
□ 1 1
0 1
0 □
□

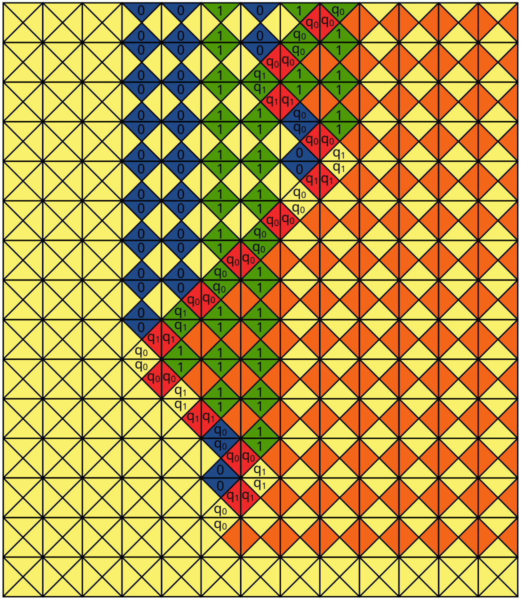
Exemple



1,1,→
□,0,→
0,1,←
q_0
q_1
□,1,←
1,0,→



0 0 1 0 1 1
1 0 1 1 1 1
0 0 1 1 0 1
0 0 1 1 0 □
0 0 1 1 □
0 0 1 1
0 0 1 1
0 1 1 1
□ 1 1 1
□ 1 1
0 1
0 □
□



La preuve

Lemme

Il existe un pavage du plan avec la tuile initiale

$\iff$ Il existe une suite infinie de configurations, partant de q_0 : $\check{\square}$

$\iff$ La machine $\mathcal{M}$ ne termine pas sur l'entrée vide

Conséquence

- Si le pavage du plan avec tuile initiale était décidable, le problème de l'arrêt sur l'entrée vide également
- Donc le pavage du plan avec tuile initiale n'est pas décidable

Remarque

- Démontre également que le problème n'est pas reconnaissable
- (On le savait car il est co-reconnaissable mais pas décidable)

Table des matières

Des dominos un peu bizarres

$$\left[\frac{b}{ca}\right] \quad \left[\frac{a}{ab}\right] \quad \left[\frac{ca}{a}\right] \quad \left[\frac{abc}{c}\right]$$

Un autre jeu

10	011	101
101	11	011

Le(s) problème(s)

Problème de correspondance de Post (PCP)

Entrée : Un ensemble fini de *dominos*
Chaque domino contient un mot *en haut* et un *en bas* (sur un alphabet Σ)
Sortie : Une suite finie de dominos (avec répétitions possibles)
Correcte si les mots obtenus par concaténation en haut et en bas coincident

PCP avec domino de départ (PCP*)

Entrées : Un ensemble fini de *dominos*
Un des dominos de l'ensemble
Sortie : Une suite de dominos correcte, qui commence par le domino fixé

Théorème

- Les deux problèmes sont indécidables : $K \leq_m \text{PCP}^* \leq_m \text{PCP}$

(K : problème de l'arrêt)

Réduction de l'arrêt à PCP*

Point de départ

- Problème de l'arrêt : entrée $\langle \mathcal{M}, w \rangle$ avec $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, q_0, \delta)$ et $w \in (\Sigma \setminus \{\square\})^*$
- Hypothèses sur $\mathcal{M}$:
  - $\Sigma = \{0, 1\}$
  - Ruban semi-infini vers la droite
  - Un seul état final « $\downarrow$ » où $\mathcal{M}$ peut s'arrêter
- Représentation d'une configuration :
  - mot w du ruban
  - une lettre x^q : position de la tête + état q

Idée générale

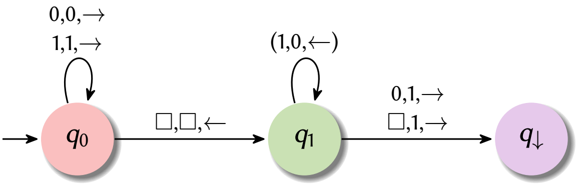
- Construction d'un ensemble de dominos :
  - Si $\mathcal{M}$ s'arrête : suite (finie) des configurations $\rightsquigarrow$ suite finie de dominos
  - Si $\mathcal{M}$ ne s'arrête pas : aucune suite finie de dominos possible
- Configuration à la suite, séparées par des $\#$
- Mots du haut et du bas *passent l'information* d'une configuration à la suivante

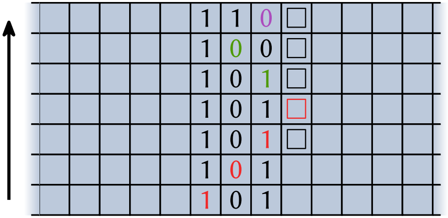
Liste des dominos

pour tout $x, y, z \in \Sigma$

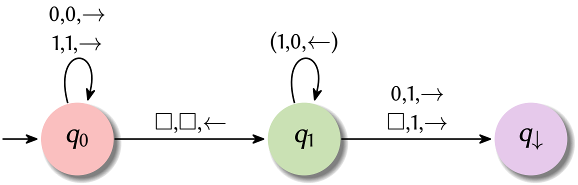
- Domino de départ : $\left[\frac{\#}{\# w_1^{q_0} w_2 \cdots w_n}\right]$ *entrée $w = w_1 \cdots w_n$*
- Dominos de transition :
  - $\delta(q, a) = (q', b, \rightarrow) \rightsquigarrow \left[\frac{a^q x}{b x^{q'}}\right]$
  - $\delta(q, a) = (q', b, \leftarrow) \rightsquigarrow \left[\frac{x a^q}{x^{q'} b}\right]$
- Dominos de copie : $\left[\frac{x}{x}\right]$, $\left[\frac{\#}{\#}\right]$ et $\left[\frac{\#}{\square\#}\right]$ *pour agrandir le ruban*
- Dominos d'effacement et final : $\left[\frac{x y^{\downarrow} z}{y^{\downarrow}}\right]$, $\left[\frac{x y^{\downarrow}}{y^{\downarrow}}\right]$, $\left[\frac{y^{\downarrow} z}{y^{\downarrow}}\right]$ et $\left[\frac{y^{\downarrow}\#\#}{\#}\right]$

Exemple





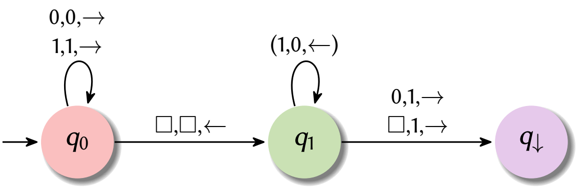
Exemple

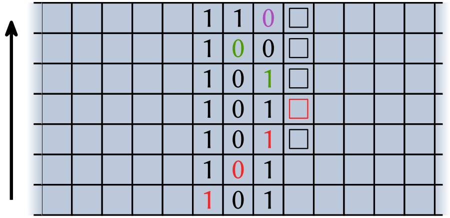


					1	1	0	□				
					1	0	0	□				
					1	0	1	□				
					1	0	1	□				
					1	0	1	□				
					1	0	1					
					1	0	1					

$$\# \, 1^0 0 1 \# 1 0^0 1 \;\#\; 1 0 1^0 \square \# 1 0 1 \square^0 \# 1 0 1^1 \square \# 1 0^1 0 \square \# 1 1 0^{\downarrow} \square \#$$

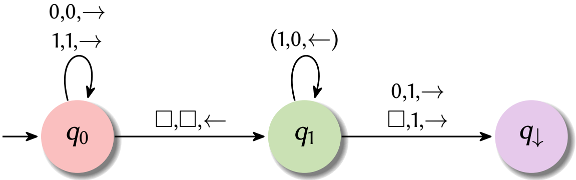
Exemple

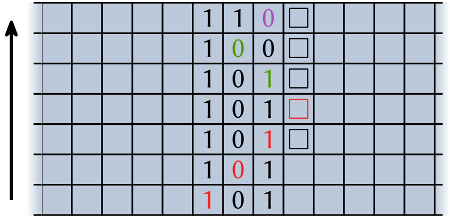




$\# \; 1^0 0 1 \; \# \; 1 0^0 1 \; \# \; 1 0 1^0 \square \; \# \; 1 0 1 \square^0 \; \# \; 1 0 1^1 \square \; \# \; 1 0^1 0 \square \; \# \; 1 1 0^\downarrow \square \; \# \; 1 1 0^\downarrow \; \# \; 1 0^\downarrow \; \# \; 0^\downarrow \# \#$

Exemple

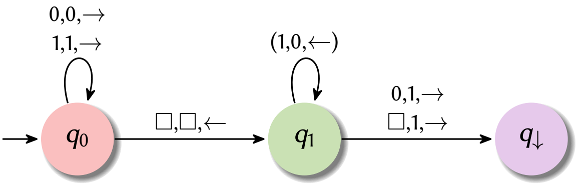




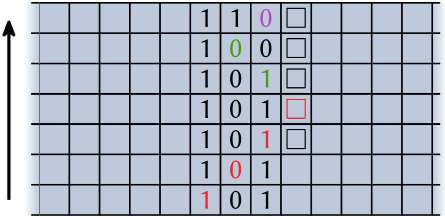
$\# \; 1^0 0 1 \# 1 0^0 1 \; \# \; 1 0 1^0 \square \# 1 0 1 \square^0 \# 1 0 1^1 \square \# 1 0^1 0 \square \# 1 1 0^{\downarrow} \square \# 1 1 0^{\downarrow} \# 1 0^{\downarrow} \# 0^{\downarrow} \# \#$

$\# 1^0 0 1 \# 1 0^0 1 \# 1 0 1^0 \square \# 1 0 1 \square^0 \# 1 0 1^1 \square \# 1 0^1 0 \square \# 1 1 0^{\downarrow} \square \# 1 1 \; 0^{\downarrow} \; \# 1 \; 0^{\downarrow} \; \# \; 0^{\downarrow} \; \# \quad \#$

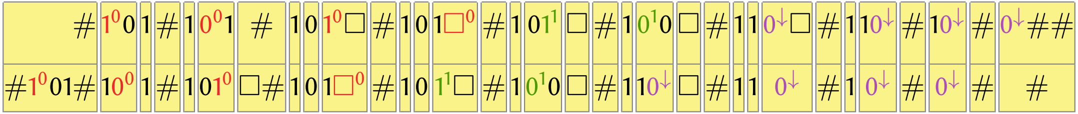
Exemple



0,0,→
1,1,→
(1,0,←)
□,□,←
0,1,→
□,1,→
q0
q1
q↓



1 1 0 □
1 0 0 □
1 0 1 □
1 0 1 □
1 0 1 □
1 0 1
1 0 1



1⁰0 1 # 1 0⁰1 # 1 0 1⁰□ # 1 0 1□⁰ # 1 01¹ □ # 1 0¹0 □ # 1 1 0↓□ # 1 10↓ # 10↓ # 0↓##
#1⁰01# 10⁰ 1 # 1 01⁰ □# 1 0 1□⁰ # 1 0 1¹□ # 1 0¹0 □ # 1 10↓ □ # 1 1 0↓ # 1 0↓ # 0↓ # #

La preuve (idée)

Lemme

Il existe une suite finie correcte de dominos qui commence par le domino de départ
$\iff$ La machine $\mathcal{M}$ s'arrête sur l'entrée w

Conséquence

- Si le problème PCP* était décidable, le problème de l'arrêt également
- Donc PCP* n'est pas décidable

Remarque

- Démontre également que le problème n'est pas co-reconnaissable
- (Exercice : démontrer que le problème est reconnaissable)

De PCP* à PCP

Modifier les dominos pour qu'il n'y ait qu'un seul domino de départ possible

Modification des dominos

- Étant donné un mot $w = w_1 \cdots w_n$, on définit $\begin{cases} \star w & = * w_1 * w_2 * \cdots * w_n \\ w \star & = w_1 * w_2 * \cdots * w_n * \\ \star w \star & = * w_1 * w_2 * \cdots * w_n * \end{cases}$
- Modification des dominos :
  - Départ : $\left[\frac{h_0}{b_0}\right] \to \left[\frac{\star h_0}{\star b_0 \star}\right]$
  - Autres dominos : $\left[\frac{h_i}{b_i}\right] \to \left[\frac{\star h_i}{b_i \star}\right]$
  - Nouveau domino final : $\left[\frac{* \diamond}{\diamond}\right]$

$\Rightarrow$ Seule suite finie possible du nouveau ensemble de dominos : $\left[\frac{\star h_0}{\star b_0 \star}\right]\left[\frac{\star h_i}{b_i \star}\right] \cdots \left[\frac{\star h_j}{b_j \star}\right]\left[\frac{* \diamond}{\diamond}\right]$

Bilan

Deux réductions

- $K \leq_m \mathrm{PCP}^*$: encodage du calcul d'une machine de Turing avec des dominos
- $\mathrm{PCP}^* \leq_m \mathrm{PCP}$: intercaler des $*$ au milieu des mots

$\Rightarrow$ le problème de correspondance de Post est indécidable

Réductions inverses

- On a aussi : $\mathrm{PCP} \leq_m K$
  - Algorithme A :
    - énumère toutes les suites finies de dominos (par longueur croissante)
    - teste si les mots du haut et du bas coincident
    - s'arrête dès qu'une solution est trouvée
  - Un ensemble D de domino a une solution $\iff$ $A(D)$ termine
- Donc PCP et l'arrêt sont *équivalents*

Table des matières

x$^{\text{ème}}$ problème de Hilbert

Énoncé

Étant donné un polynôme $P \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_k]$, existe-t-il des entiers n_1, …, n_k tels que $P(n_1, \ldots, n_k) = 0$?

Exemple

- $P(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2x_2x_3^5 - 2x_1x_3^6 + 6x_1x_3^5 - 4x_1x_2^4 + 2x_2^3x_3 - 6x_2^3 + 24x_1x_2 - 12x_3 + 36$
- $P(0, 0, 0) = 36$, $P(1, 1, 1) = 48$, …
- $P(1, 1, 5) = 0$

Théorème (Matiyasevich-Robinson-Davis-Putnam, 1961-70)

Le x$^{\text{ème}}$ problème de Hilbert est indécidable

Théorème de Richardson

Énoncé

Étant donné une expression mathématique constituée des symboles

- x, $\exp(\cdot)$, $\sin(\cdot)$, $|\cdot|$,
- $\ln(2)$, π, les nombres rationnels,
- $+$, $-$, $\times$ et $\circ$ (composition),

est-ce que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par l'expression est égale à 0 ?

Exemple

- $f(x) = \pi \exp(\frac{2}{3}|\sin(x \ln 2)|) + \sin(2 \exp(|x|))$

Théorème (Richardson, 1968)

La question ci-dessus est indécidable, car le x$^{\text{ème}}$ problème de Hilbert s'y réduit

Conclusion

L'indécidabilité existe de partout !

- En informatique :
  - questions sur les algorithmes (arrêt, théorème de Rice, ...)
  - questions sur le typage de certaines fonctions
  - ...
- En mathématiques : tous les domaines sont touchés !
  - Analyse, algèbre, géométrie, topologie, ...
  - *Entscheidungsproblem* : déterminer si un énoncé mathématique est correct
- Ailleurs :
  - Quel joueur va gagner dans une partie de *Magic: The Gathering* ?
  - Certaines questions de planification des trajets en avion
  - Dessiner exactement une image 3D sur un ordinateur
  - Simuler idéalement un fluide

Mais elle est tout de même rare

- Ne pas croire qu'on tombe souvent *par hasard* sur un problème indécidable
- Ils existent, sont nombreux, mais il faut les chercher...