# 3. Thèse de Church-Turing

Bruno Grenet

Université Grenoble Alpes – IM²AG
L3 Informatique
UE Modèles de calcul – Machines de Turing

https://membres-ljk.imag.fr/Bruno.Grenet/MCAL-MT.html

# Introduction

## Thèse de Church-Turing

Tout ce qui peut être *effectivement calculé* peut l'être par une machine de Turing

## Signification

- *Calcul effectif* : algorithme au sens intuitif
  - Tout calcul qu'un humain peut faire (en théorie) — version *psychologique*
  - Tout calcul réalisable par un procédé physique — version *physique*
- *Thèse* au sens d'hypothèse :
  - Par nature indémontrable mathématiquement
  - Mais réfutable : si on trouve par exemple un procédé physique non simulable par une machine de Turing

$\Rightarrow$ La notion *intuitive* de calculabilité est *capturée* par le modèle de machine de Turing

# Table des matières

# Table des matières

# Fonctions et langages

## Définitions

Soit $\Sigma$ un alphabet fini et $\Sigma^*$ les mots sur $\Sigma$

- Fonction *partielle* $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ : pour tout $w \in \Sigma^*$,
  - soit $f(w) = w' \in \Sigma^*$ $\qquad f(w)$ défini : $f(w)\downarrow$
  - soit $f(w)$ est *indéfini*, noté $f(w)\uparrow$
- Fonction *totale* $f$ : $f(w)$ est définie pour tout $w$
- Langage $L \subset \Sigma^*$ : sous-ensemble de $\Sigma^*$

## Liens

- Langage associé à une fonction (partielle) $f$ : $L_f = \{w : f(w) \in \Sigma^*\}$ $\qquad$ *domaine*
- Fonction caractéristique de $L$ : $\chi_L : \Sigma^* \to \{0,1\}$ définie par $\chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \in L \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
  - $L$ et $\chi_L$ sont le *même objet*

## Remarque

- Un algorithme calcule une fonction partielle

# Rappel : codage binaire

Toute donnée peut se coder en binaire $\rightarrow$ $\Sigma = \{0,1\}$

## Rien de nouveau !

- Entiers : écriture binaire ; complément à deux pour les négatifs
- Flottants : *conventions* sur 32 bits (`float`), 64 bits (`double`), …
- Chaînes de caractères : codage ASCII, UTF-8, …
- …

## Codages de codage

- Paire $(a, b)$ : par ex. $\langle a \rangle \# \langle b \rangle$ puis codage de $\{0, 1, \#\}$ dans $\{0, 1\}$
- Triplet $(a, b, c)$ : par ex. $\langle \langle a, b \rangle, c \rangle$
- Listes, matrices, graphes, fonctions $\{0,1\}^8 \rightarrow \{0,1\}$, …

## Conclusions

- Codage : composition de codages simples
- *Sémantique* (sens) d'un mot $w \in \{0,1\}^*$ : *convention*

# Reconnaître, décider, calculer

## Définitions informelles

- Un algorithme $A$ reconnaît un langage $L$ si $A(w) = 1 \iff w \in L$
- Un algorithme $A$ décide un langage $L$ si pour tout $w$, $A(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \in L \\ 0 & \text{si } w \notin L \end{cases}$
- Un algorithme $A$ calcule une fonction $f$ si pour tout $w$, $A(w) = f(w)$

## Remarques

- Reconnaissance : pour $w \notin L$, $A$ peut répondre tout sauf 1, ou boucler
- Calcul :
  - $A(w)$ termine si $w \in L_f$ et boucle si $w \notin L_f$
  - Si $f$ est totale, $A$ doit terminer sur toute entrée

## Lemme

Un algorithme $A$ décide un langage $L$ si et seulement si $A$ calcule $\chi_L$

# Conséquence de la thèse de Church-Turing

## Définitions

- Un langage $L \subset \Sigma^*$ est
  - reconnaissable s'il existe une machine de Turing $\mathcal{M}$ t.q. $L = L(\mathcal{M})$
  - décidable s'il existe une machine de Turing $\mathcal{M}$ t.q. $\chi_L = f_{\mathcal{M}}$
- Une fonction $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ est
  - calculable s'il existe une machine de Turing $\mathcal{M}$ t.q. $f = f_{\mathcal{M}}$

## On se répète ?

- Page précédente : définitions informelles basées sur la notion intuitive d'algorithme
- Page courante : définitions formelles basées sur les machines de Turing
- Justification : thèse de Church-Turing

## Remarques

- Définitions heureusement cohérentes avec celles du cours 1 !

# Différence entre reconnaître et décider

$L_\pi = \{w : w \text{ apparaît dans l'écriture binaire de } \pi\}$

## Langage reconnaissable

- Algorithme :
  1. Calculer l'écriture binaire (infinie !) de $\pi$
  2. À chaque nouveau bit calculé, vérifier si $w$ apparaît dans ce qu'on a déjà calculé
- Analyse :
  - Si $w$ apparaît : l'algorithme peut renvoyer 1
  - Si $w$ n'apparaît pas : l'algorithme boucle

## Est-il décidable ?

- Conjecture (non prouvée) : tout mot $w \in \{0,1\}^*$ apparaît dans l'écriture binaire de $\pi$
  - si la conjecture est vraie, l'algorithme renvoie toujours 1
  - autrement dit, $L_\pi = \{0,1\}^*$ et est clairement décidable !
- Sans la conjecture : je ne sais pas ! *Il semble que personne ne sait*

# Table des matières

# Introduction

## Motivation

- Thèse de Church-Turing : algorithme = machine de Turing
- Machines de Turing très éloignées de la pratique

## Objectif et méthode

- Définir un mini-langage de programmation WHILE
  - proche des langages habituels
  - *équivalent* aux machines de Turing
- Utilisation du formalisme des machines RAM

## Machine RAM

- RAM = *Random Access Memory*
- Machine à registres, opérations *élémentaires* sur les registres
- Proche des processeurs et de l'assembleur

# Machine RAM

## Description

Une machine RAM est constituée

- de registres $R_0, R_1, \ldots$ contenant chacun un mot $w \in \{0,1\}^n$ $\qquad n =$ taille de mot
- d'une suite finie numérotée d'instructions, de cinq types possibles :

  COPY$(R_i, R_j)$ : copie le registre $j$ dans le registre $i$

  INC$(R_i)$ : incrémente le registre $i$ (*modulo* $2^n$)

  DEC$(R_i)$ : décrémente le registre $i$ (*modulo* $2^n$)

  JUMP$(R_i, \ell)$ : si $R_i = 0$, aller à l'instruction $\ell$ ; sinon continuer

  STOP : arrêt du programme

## Fonctionnement

- Initialement, la 1ère instruction est exécutée
- On suit les instructions dans l'ordre, sauf si JUMP ou STOP
- Entrée dans $R_0$ (et suivants si plusieurs entrées), autres registres à 0
- Sortie dans $R_0$ (et suivants si plusieurs sorties)

# Exemples

## Addition

Entrées : $x$ dans $R_0$ ; $y$ dans $R_1$

Sortie : $x + y \bmod 2^n$

1. JUMP$(R_1, 5)$
2. INC$(R_0)$
3. DEC$(R_1)$
4. JUMP$(R_2, 1)$
5. STOP

## Test d'égalité

Entrées : $x$ dans $R_0$ ; $y$ dans $R_1$

Sortie : 1 si $x = y$ ; 0 sinon

1. JUMP$(R_0, 5)$
2. DEC$(R_0)$
3. DEC$(R_1)$
4. JUMP$(R_2, 1)$
5. JUMP$(R_1, 7)$
6. STOP
7. INC$(R_0)$
8. STOP

# Variantes possibles

## Jeu d'instructions *enrichi*

- Par exemple : ADD, SUB, MUL, EQUAL, ...
- Équivalence : puisqu'on sait implanter ADD, on peut l'ajouter ; etc.

## Jeu d'instructions réduit

- INC, DEC, JUMP uniquement sur $R_0 \rightarrow$ utiliser COPY
- COPY remplacé par $\text{LOAD}(R_i) = \text{COPY}(R_0, R_i)$ et $\text{STORE}(R_i) = \text{COPY}(R_i, R_0)$

## Preuve de l'équivalence

# Simulation d'une machine RAM par une machine de Turing

## Machine à simuler

- On suppose la version *réduite* : calculs uniquement sur $R_0$, LOAD/STORE au lieu de COPY

## Description de la machine

- Deux rubans : ruban des registres contenant $\langle 0\rangle : R_0 \# \langle 1\rangle : R_1 \# \cdots$ et ruban de travail
- Pour l'instruction numéro $\ell$, plusieurs états $q_\ell^{(0)}, q_\ell^{(1)}, q_\ell^{(2)}, \ldots$ (état initial : $q_1^{(0)}$)

## Simulation de l'instruction $\ell$

- Début de la simulation : état $q_\ell^{(0)}$ et tête au début du ruban
- Instructions :
  - INC/DEC : incrément ou décrément de $R_0$ et passage dans l'état $q_{\ell+1}^{(0)}$
  - JUMP$(R_0, m)$ : vérifier si $R_0 = 0^n$ et passer soit dans l'état $q_m^{(0)}$, soit $q_{\ell+1}^{(0)}$
  - LOAD$(R_i)$ et STORE$(R_i)$ :
    - écrire $\langle i\rangle$ sur le ruban de travail
    - parcourir le ruban des registres jusqu'à $\langle i\rangle$ et effectuer la copie grâce au ruban de travail
  - STOP : état $q_\ell^{(0)}$ sans transition

# Intuition graphique de la construction

# Description du langage WHILE

## Spécifications

- Variables $x_0, x_1, \ldots$ contenant des entiers non signés sur $n$ bits
  - $x_i \leftarrow 0$
  - $x_i \leftarrow x_j$
  - $x_i \leftarrow x_i \pm 1 \pmod{2^n}$
  - $x_i \leftarrow x_j \pm x_k \pmod{2^n}$
- Structures conditionnelles : $P, Q$ : *suites d'instructions*
  - while $x_i > x_j$: $P$
  - for $x_j = 0$ to $x_j$: $P$
  - if $x_i > x_j$: $P$ else: $Q$
- Entrée(s) : dans $x_1, x_2, \ldots$
- Valeur de retour : dans $x_0$

## On peut tout faire avec !

- Autres opérations : algorithmes pour la multiplication, autres comparaisons, ...
- Autres types de données :
  - chaînes de caractères, entiers signés → convention
  - flottants → deux entiers mantisse et exposant
  - ...

# Exemples de programmes WHILE

## Fibonacci

Entrée : $x_1 \geq 0$

Sortie : $x_0 = F_{x_1}$

1. $x_0 \leftarrow 1$; $x_3 \leftarrow 0$
2. for $x_2 = 0$ to $x_1$ :
3. $\quad x_4 \leftarrow x_0 + x_3$
4. $\quad x_0 \leftarrow x_3$
5. $\quad x_3 \leftarrow x_4$

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{sinon} \end{cases}$$

## Euclide

Entrées : $x_1$ et $x_2$

Sortie : $x_0 = \text{PGCD}(x_1, x_2)$

1. if $x_1 > x_2$: $x_0 \leftarrow x_1$ ; $x_3 \leftarrow x_2$
2. else: $x_0 \leftarrow x_2$ ; $x_3 \leftarrow x_1$
3. $x_4 \leftarrow 0$
4. while $x_3 > x_4$:
5. $\quad x_0 \leftarrow x_0 - x_3$
6. $\quad$ if $x_3 > x_0$:
7. $\quad\quad x_5 \leftarrow x_0$ ; $x_0 \leftarrow x_3$ ; $x_3 \leftarrow x_5$

# Exemples de programmes WHILE

## Fibonacci

Entrée : $n \geq 0$

Sortie : $f = F_n$

1. $f \leftarrow 1$; $g \leftarrow 0$
2. for $z = 0$ to $n$:
3. $\quad h \leftarrow f + g$
4. $\quad f \leftarrow g$
5. $\quad g \leftarrow h$

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{sinon} \end{cases}$$

## Euclide

Entrées : $x$ et $y$

Sortie : $a = \text{PGCD}(x, y)$

1. if $x > y$: $a \leftarrow x$ ; $b \leftarrow y$
2. else: $a \leftarrow y$ ; $b \leftarrow x$
3. $z \leftarrow 0$
4. while $b > z$:
5. $\quad a \leftarrow a - b$
6. $\quad$ if $b > a$:
7. $\quad\quad t \leftarrow a$; $a \leftarrow b$; $b \leftarrow t$

# Simplification du langage WHILE

## Opérations et comparaisons

- Addition $c \leftarrow a + b$ :
  1. $c \leftarrow a$ ; $c \leftarrow c - 1$
  2. for $t = 0$ to $b$: $c \leftarrow c + 1$
- Soustraction $c \leftarrow a - b$ :
  1. $c \leftarrow a$ ; $c \leftarrow c + 1$
  2. for $t = 0$ to $b$: $c \leftarrow c - 1$

- Comparaison $x_i > x_j$:
  1. $z \leftarrow 1$ ; $y_i \leftarrow x_i$ ; $y_j \leftarrow x_j$
  2. while $y_j \neq 0$:
  3. $\quad y_i \leftarrow y_i - 1$
  4. $\quad$ if $y_i \neq 0$: $y_j \leftarrow y_j - 1$
  5. $\quad$ else: $y_j \leftarrow 0$ ; $z \leftarrow 0$
  6. if/while $z \neq 0$: $P$

## Structures conditionnelles

- for $x_i = 0$ to $x_j$: $P$
  1. $x_i \leftarrow 0$
  2. $x_c \leftarrow x_j + 1$
  3. while $x_c \neq 0$:
  4. $\quad P$
  5. $\quad x_i \leftarrow x_i + 1$
  6. $\quad x_c \leftarrow x_c - 1$

- if $x_i \neq 0$: $P$ ; else: $Q$
  1. $y_i \leftarrow x_i$ ; $y_k \leftarrow 1$
  2. while $y_i \neq 0$:
  3. $\quad P$ ; $y_i \leftarrow 0$ ; $y_k \leftarrow 0$
  4. while $y_k \neq 0$:
  5. $\quad Q$ ; $y_k \leftarrow 0$

# Simplification du langage WHILE

## Opérations et comparaisons

- Addition $c \leftarrow a + b$ :
  1. $c \leftarrow a$ ; $c \leftarrow c - 1$
  2. for $t = 0$ to $b$: $c \leftarrow c + 1$
- Soustraction $c \leftarrow a - b$ :

$$x_i \leftarrow 0$$

$$x_i \leftarrow x_j$$

$$x_i \leftarrow x_i \pm 1$$

$$\text{while } x_i \neq 0 : \ P$$

- for $x_i = 0$ to $x_j$: $P$
  1. $x_i \leftarrow 0$
  2. $x_c \leftarrow x_j + 1$
  3. while $x_c \neq 0$:
  4. $\quad P$
  5. $\quad x_i \leftarrow x_i + 1$
  6. $\quad x_c \leftarrow x_c - 1$

- Comparaison $x_i > x_j$:
  1. $z \leftarrow 1$ ; $y_i \leftarrow x_i$ ; $y_j \leftarrow x_j$
  2. while $y_j \neq 0$:
  3. $\quad y_i \leftarrow y_i - 1$
- if $x_i \neq 0$: $P$ ; else: $Q$
  1. $y_i \leftarrow x_i$ ; $y_k \leftarrow 1$
  2. while $y_i \neq 0$:
  3. $\quad P$ ; $y_i \leftarrow 0$ ; $y_k \leftarrow 0$
  4. while $y_k \neq 0$:
  5. $\quad Q$ ; $y_k \leftarrow 0$

# Compilation pour machine RAM

## Objectif : *compiler* un programme WHILE vers l'assembleur RAM

- Langage WHILE minimal vers machine RAM non réduite
- Très similaire à la vraie compilation, mais aucun objectif d'optimisation

## Algorithme de compilation

- Variable $x_i$ dans le registre $R_i$
  - $x_i \leftarrow x_i \pm 1$ : INC/DEC$(R_i)$ ; $x_i \leftarrow x_j$ : COPY$(R_i, R_j)$ ;
  - $x_i \leftarrow 0$ : COPY$(R_i, R_j)$ où $x_j$ n'est pas utilisée
  - while $x_i \neq 0$ :

```
    instruction1
    instruction2
    ...
    instructionK
suite
```

$\ell$. JUMP$(R_i, \ell + k + 2)$
$\ell + 1$. `instruction1`
...
$\ell + k$. `instructionK`
$\ell + k + 1$. JUMP$(R_j, \ell)$ ($x_j$ non utilisée)
$\ell + k + 2$. *suite*

## Remarque

RAM $\rightarrow$ WHILE possible également

# Bilan provisoire

Les machines de Turing peuvent simuler n'importe quel langage de programmation

## Arguments

- Simulation de machine RAM par machine de Turing
- Compilation de WHILE sur machine RAM
- Transformation d'un langage quelconque vers WHILE
  - Types de données : conventions
  - Opérations de base : quelques algorithmes
  - Appels récursifs : utilisation de pile d'appel, etc. *non trivial*

## Et dans l'autre sens

- Peut-on simuler une machine de Turing sur une machine RAM ?
  - *A priori* oui → simulateurs dans des langages puis compilation vers RAM
  - Mais un problème : machine RAM avec mémoire bornée
    - Suite finie d'instructions → nombre fini de registres utilisés
    - Registres de $n$ bits

# Solution : un registre d'adresse

## Machine RAM non bornée

- Ajout d'un *registre d'adresse A* contenant un entier non borné
- Deux instructions :
  - LOAD$(R_0, A)$ : si $A$ contient l'entier $j$, copie $R_j$ dans $R_0$
  - STORE$(R_0, A)$ : si $A$ contient l'entier $j$, copie $R_0$ dans $R_j$

## Remarques

- Adressage indirect en assembleur ; tableaux dynamiques $x_{x_i}$
- Registre d'adresse non borné : peu réaliste mais nécessaire théoriquement

## Simulations

- RAM par machine de Turing : déjà fait !
- Machine de Turing par RAM :
  - Simulation d'une machine avec ruban borné à gauche
  - Un registre par case du ruban
  - Registre d'adresse pour la position de la tête
  - Suite d'instructions groupées pour chaque état

# Bilan

## Modèles théoriques équivalents

- Machine de Turing (et variantes)
- Machine RAM avec registre d'adresse non borné (et variantes)
- Langage WHILE avec adressage indirect (et variantes)

## Le lien avec les ordinateurs

- Modèle le plus proche :
  - machine RAM avec registre d'adresse borné donc équivalent à un automate fini…
  - mais modèle non pertinent — impossible de reconnaître $a^n b^n$ ?
- Pourquoi un modèle non borné ?
  - en pratique, borne d'adresse gigantesque
  - en théorie, on pourrait construire une machine non bornée sauf limites physiques…

## À retenir

- Les machines de Turing ou RAM non bornée sont de *bons* modèles des ordinateurs
- Comme tout modèle, il y a des limites

# Table des matières

# Retour sur la thèse de Church-Turing

La notion de *calcul effectif* est capturée par le modèle de machine de Turing

## Plein de manières de calculer ?

- Programmation fonctionnelle, $\lambda$-calcul
- Langages de programmation divers et variés
- Calcul quantique, calcul analogique
- Automates cellulaires
- Calcul moléculaire, par ADN, par membrane, …
- *Minecraft*, démineur, …
- …

## Tous équivalents aux machines de Turing !

- Preuves plus ou moins compliquées
- Modèles Turing-complets

# Les équivalences historiques

## Trois modèles historiques

- Fonctions $\mu$-récursives — Herbrand-Gödel (1931-34)
- $\lambda$-calcul — Kleene-Church (1932-36)
- Machines de Turing — Turing (1936)

## Équivalences

- Équivalence $\lambda$-calcul / fonctions $\mu$-récursives — Kleene-Church (1936)
- Équivalence machines de Turing avec les précédents — Turing (1937)

- Les trois modèles de calculs initiaux prouvés équivalents dès leur invention
- Point de départ de la thèse de Church-Turing
- Résultats suivants : renforcement de la thèse

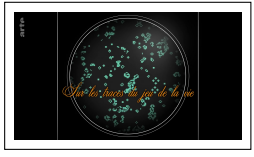
# Un exemple : les automates cellulaires

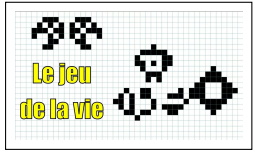
## Description

- Grille infinie de *cellules*, contenant chacune un *symbole* d'un alphabet $\Sigma$
- À chaque étape, évolution synchronisée de toutes les cellules
- Règle d'évolution basée sur le symbole de la cellule et de ses voisines
- Bien sûr : des variantes équivalentes !

## Qu'est-ce que ça modélise ?

- Système physique constitué de composants élémentaires en interaction
- *Agents* en interaction
- Systèmes dynamiques
- Parallélisme maximal




## Remarques

- Exemple célèbre : jeu de la vie
- Aspect intéressant : aspect *local* du calcul

# Conclusion

Tous les modèles de calculs (raisonnables) sont équivalents !

## Conséquences

- La notion d'algorithme est *bien définie* → toutes les définitions sont équivalentes
- Deux caractéristiques importantes du calcul :
  - mémoire non bornée
  - localité

## Au delà de l'informatique

- Thèse de Church-Turing physique :
  - tout *dispositif physique* est simulable par une machine de Turing
- La notion de *calcul* est une notion fondamentale pour comprendre le monde

## Modèle et réalité

- Problème de la mémoire non bornée → non réaliste (?) mais meilleur modèle
- Notion de calcul intéressante même sans limites physiques