1. Introduction

Bruno Grenet

Université Grenoble Alpes – IM²AG
L3 Informatique
UE Modèles de calcul – Machines de Turing

https://membres-ljk.imag.fr/Bruno.Grenet/MCAL-MT.html

Table des matières

Table des matières

Présentation

Nom : Bruno Grenet
Email : ...@univ-grenoble-alpes.fr
Page web : https://membres-ljk.imag.fr/Bruno.Grenet/

Affiliation : Université Grenoble Alpes
UFR IM²AG
Laboratoire Jean Kuntzmann (LJK)
Téléphone : +33 457 421 721
Bureau : Bâtiment IMAG (150 pl. du Torrent) ; 1er étage ; bureau 106

Insérer [MCAL-MT] en sujet

Organisation

Équipe pédagogique

Cours : Bruno Grenet
TD G1 : Linda Gutsche
TD G2 : Thomas Rahab-Lacroix
TD G3 : Ernest Foussard
TD G4 : Bruno Grenet

Contacts : `<Prenom>.<Nom>@univ-grenoble-alpes.fr`

Planning

Cours : 1 séance par semaine
TD : 1 séance par semaine pas cette semaine

Communications

- Email + mattermost
- Consultez ADE !

Évaluations

EC_{MT}: Évaluation continue (*quick*)

Durée : 1h
Date : lundi 24 février 9h45

Coefficient : 0,4
Contenu : uniquement MT

ET: Évaluation terminale

Durée : 2h
Date : jeudi 17 avril 2025 (?)

Coefficient : 1,2
Contenu : commun MT et LC

ES: Évaluation supplémentaire

- Similaire à l'évaluation terminale
- mardi 24 juin 2025 (?)

Note finale

Session 1 : $\max(\mathrm{ET}; \frac{1}{2}(0,4 \cdot \mathrm{EC_{MT}} + 0,4 \cdot \mathrm{EC_{LC}} + 1,2 \cdot \mathrm{ET}))$
Session 2 : $\max(\mathrm{ES}; \frac{1}{2}(0,4 \cdot \mathrm{EC_{MT}} + 0,4 \cdot \mathrm{EC_{LC}} + 1,2 \cdot \mathrm{ES}))$

Page du cours

https://membres-ljk.imag.fr/Bruno.Grenet/MCAL-MT.html

Contenu

- Diapositives de cours, avec annotations
- Sujets de TD
- Bibliographie :
  - livres, notes de cours
  - liens : vidéos, articles de vulgarisation, sites web, …

→ **Très utile à consulter !**

Table des matières

De quoi va-t-on parler ?

Résumé (personnel) de la vidéo

Origines

- *Mécanisation* du raisonnement ? Leibniz (XVII^{e} siècle)
- *Entscheidungsproblem* : existe-t-il un algorithme pour décider si un énoncé mathématique est correct ? Hilbert & Ackermann (1928)
- Années 1930 : intuition de l'absence d'algorithme → comment la prouver ?

Formalisation des algorithmes

- Fonctions μ-récursives Herbrand-Gödel (1931-34)
- λ-calcul Kleene-Church (1932-36)
- Machines de Turing Turing (1936)

Trois définitions prouvées équivalentes → c'est la « bonne » définition !

Incalculabilité

- Pas d'algorithme pour le problème de la décision, le problème de l'arrêt, …

→ Résultats négatifs mais une des origines de l'informatique

Objectifs du cours

Machines de Turing

- Étude d'un des modèles de calcul
- (Autre modèle – λ-calcul – étudié dans l'autre partie du cours)
- Comparaison avec d'autres modèles

Calculabilité

- Qu'est-ce que veut dire *calculer* ?
- Comment démontrer l'*inexistence* d'algorithme pour un problème donné ?
- Liens avec l'informatique *de tous les jours* ?

Avant / après

- Automates et Langages (L2) ; Analyse syntaxique (L3)
  - Automates finis ; automates à pile
- Complexité Algorithmique ; Fundamentals of Computer Science (M1 Mosig / INFO)
  - Théorie de la complexité

Plan (approximatif)

1, 2. Machines de Turing et variantes

- Exemples de machines
- Définition (informelle et formelle)
- Robustesse : les variantes ne changent pas grand chose

3. Thèse de Church-Turing

- Algorithme = Machine de Turing (ou λ-calcul, ou …)
- Équivalence entre modèles

4, 5, 6. Incalculabilité

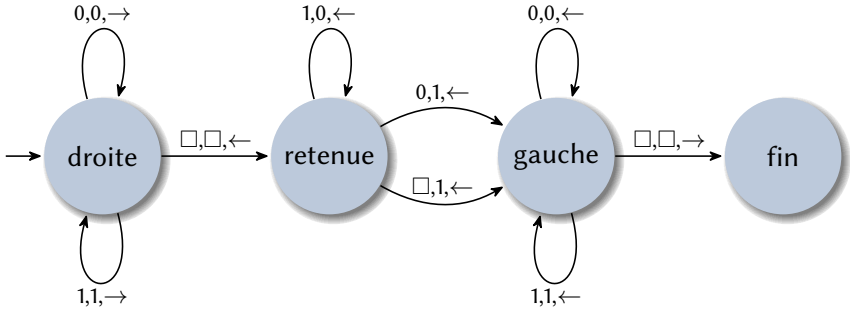
- Il existe des fonctions non calculables (*diagonalisation*)
- Exemples concrets

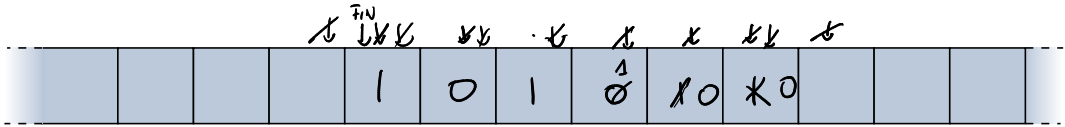
7. Fonctions primitives récursives

- Et si on interdisait le `while`?

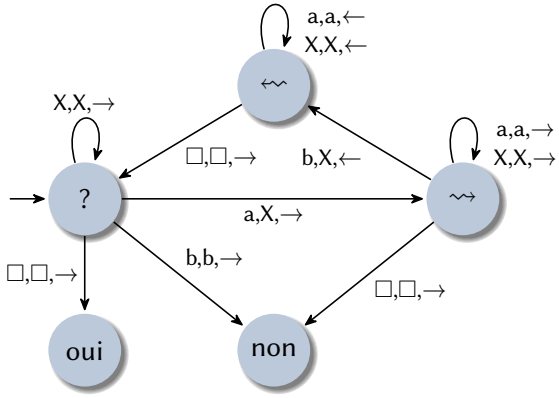
Table des matières

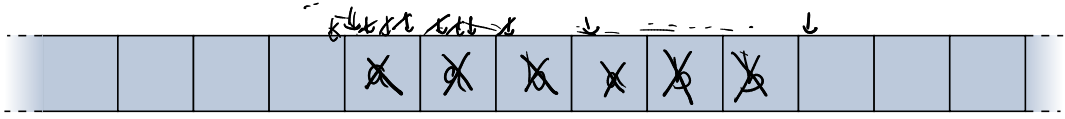
Premier exemple : incrément



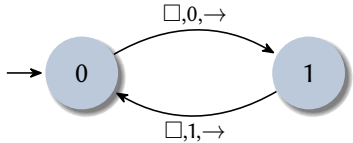


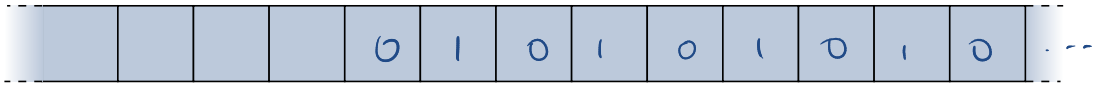
Deuxième exemple : mots bien parenthésés (langage de Dyck)



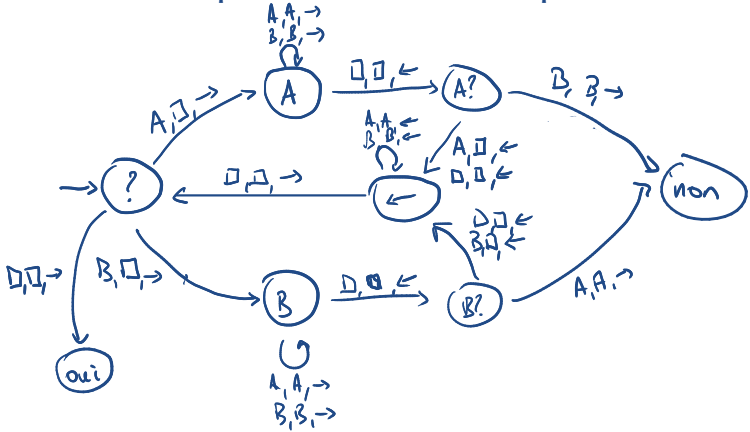


Troisième exemple : faire 0101...





Quatrième exemple : reconnaître des palindromes



			A	B	B	A	B	B	A				

Description des machines de Turing

Constituants d'une machine de Turing

- Un ensemble d'*états* Q, dont un *état initial* q_0 — *sommets*
- Une *table de transition* δ — *automate*
- Un *ruban* constitué d'une infinité de *cases*
- Une *tête* de lecture/écriture

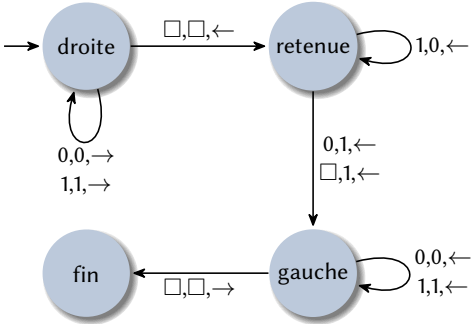
Le ruban

- Chaque case du ruban contient un *symbole* d'un *alphabet* Σ
- L'alphabet contient un symbole spécial « blanc » $\square$ — *case vide*
- Le ruban ne contient qu'un nombre fini de symboles $\neq \square$

La table de transition

- Pour *certains* couples $(q, x) \in Q \times \Sigma$, $\delta(q, x) = (q', y, \leftrightarrow)$ où
  - $q, q' \in Q$ sont l'*ancien* et le *nouvel état*
  - x et $y \in \Sigma$ sont les symboles *lu* et *écrit*
  - $\leftrightarrow \in \{\leftarrow, \rightarrow\}$ est le *déplacement*
- Sinon, $\delta(q, x)$ est *indéfini*

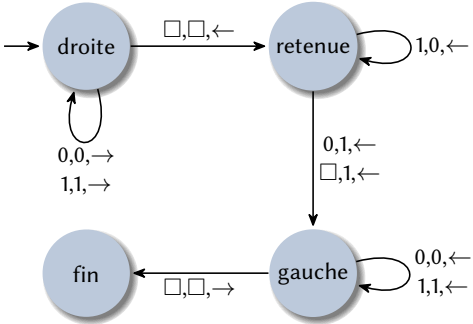
Représentation de la table de transition



État	Lu	Écrit	Dépl.	Nv. état
droite	0	0	→	droite
droite	1	1	→	droite
droite	□	□	←	retenue
retenue	1	0	←	retenue
retenue	0	1	←	gauche
retenue	□	1	←	gauche
gauche	0	0	←	gauche
gauche	1	1	←	gauche
gauche	□	□	→	fin

- δ : Tableau à cinq colonnes (état, lu, écrit, dépl., nv. état)
- δ suffit à représenter $\mathcal{M}$:
  - Q : liste des états dans la table
  - Σ : liste des symboles dans la table
  - q_0 : 1$^{\text{er}}$ état de la table (par convention)

Représentation de la table de transition



État	Lu	Écrit	Dépl.	Nv. état
droite	0	0	→	droite
	1	1	→	droite
	□	□	←	retenue
retenue	1	0	←	retenue
	0	1	←	gauche
	□	1	←	gauche
gauche	0	0	←	gauche
	1	1	←	gauche
	□	□	→	fin

- δ : Tableau à cinq colonnes (état, lu, écrit, dépl., nv. état)
- δ suffit à représenter $\mathcal{M}$:
  - Q : liste des états dans la table
  - Σ : liste des symboles dans la table
  - q_0 : 1$^{\text{er}}$ état de la table (par convention)

Fonctionnement d'une machine de Turing

Une étape de calcul

0. Machine dans l'état q
1. Lecture de la lettre x sur le ruban
2. Si $\delta(q, x)$ n'est pas dans la table : arrêt (définitif) de la machine
3. Si $\delta(q, x) = (q', y, \leftrightarrow)$:
   - i. la machine passe dans l'état q'
   - ii. la tête écrit y à la place de x
   - iii. la tête est déplacée à gauche (si $\leftrightarrow = \leftarrow$) ou droite (si $\leftrightarrow = \rightarrow$)

Calcul complet

- *Configuration initiale* : état q_0, entrée w sur le ruban, tête sur la 1ère lettre de w
- Tant que c'est possible, appliquer une étape de calcul
  - Soit la machine se bloque : calcul terminé — $\delta(q, x)$ indéfini
  - Sinon : la machine *boucle*
- Remarque : pas de *sémantique* $\rightarrow$ reconnaissance de langage, calcul de fonction, …

Utilisation d'une machine de Turing

Reconnaissance de langage

- Hypothèse : $\mathcal{M}$ contient un état spécial « oui »
- Langage $L(\mathcal{M})$ reconnu par $\mathcal{M}$: sur l'entrée w,
  - si le calcul termine dans l'état « oui » : $w \in L(\mathcal{M})$
  - sinon (calcul non terminé ou autre état final) : $w \notin L(\mathcal{M})$

pas besoin de « non »

Calcul de fonction

- Fonction $f_{\mathcal{M}}$ calculée par $\mathcal{M}$: sur l'entrée w
  - si le calcul termine, $f_{\mathcal{M}}(w)$ est le mot inscrit sur le ruban à la fin du calcul
  - sinon $f_{\mathcal{M}}(w)$ est *indéfini*, noté $f_{\mathcal{M}}(w)\uparrow$: $\mathcal{M}$ *boucle sur* w

Remarques

- Autres conventions possibles
  - États d'acceptation et de rejet
  - Prise en compte de l'état final et du contenu final du ruban en même temps
- Définition possible d'*énumération* (infinie)

Formalisation : machine de Turing

Définition

Une machine de Turing est un quadruplet $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, q_0, \delta)$ où

- Q est un ensemble fini d'*états*
- Σ est l'*alphabet* contenant le blanc $\square$
- $q_0 \in Q$ est l'*état initial*
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q \times \Sigma \times \{\rightarrow, \leftarrow\}$ est la *table de transition*

Remarques

- Ruban implicite et *non borné* plutôt qu'infini
- Table de transition : fonction *partielle* $\to \delta(q, x)$ peut être *indéfini*
- Il existe d'autres formalisations équivalentes

Concept important : configurations

Configuration : état global de la machine à un instant donné

Définition

- Trois informations : état q ; mot w sur le ruban ; position de la tête sur w
- Formellement : triplet $C = (q, w, i)$ où i = position tête de lecture sur w
  - $-1 \leq i \leq |w|$: la tête peut être sur un $\square$
  - graphiquement : « $q : w_{[0]} \cdots \check{w}_{[i]} \cdots w_{[n-1]}$ » $\check{}$: position de la tête
- Configuration initiale $C_0 = q_0 : \check{w}_{[0]} w_{[1]} \ldots$ où w est l'entrée

Exemples

D: 101$\check{1}$0 état D ; mot 10110 sur le ruban ; $i = 3$

q: $Xa\check{b}b$ état q ; mot $Xabb$; $i = 2$

0: 01$\check{\square}$ état 0 ; mot 01; $i = 4$

Suites de configurations

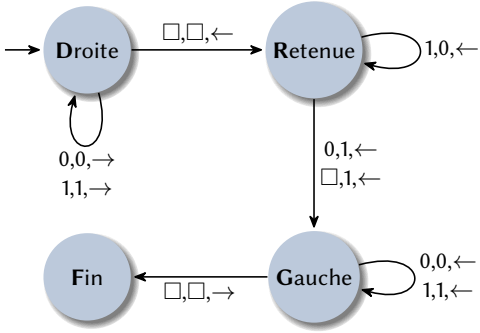
Notations

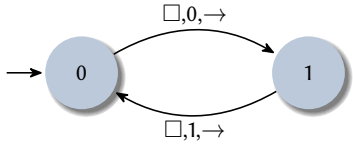
- $C \vdash C'$ si on passe de C à C' en une étape de calcul
- $C \vdash^* C'$ si on passe de C à C' en une ou plusieurs étapes de calcul
  - $C = C_1 \vdash C_2 \vdash \cdots \vdash C_{k-1} \vdash C_k = C'$
- $C \downarrow$ si aucune règle de la table de transition ne s'applique à C (calcul terminé)

Calcul d'une machine

- Deux possibilités :
  - si la machine boucle : suite infinie $C_0 \vdash C_1 \vdash C_2 \vdash \cdots$
  - sinon : suite finie $C_0 \vdash C_1 \vdash \cdots \vdash C_k \downarrow$
- Résultat du calcul de $\mathcal{M}$ sur w :
  - $\mathcal{M}(w) = C_k$ si $C_0 \vdash^* C_k \downarrow$ — *configuration finale*
  - Notation $\mathcal{M}(w) \uparrow$ si la suite est infinie — aucune configuration finale

Exemples





D : $\check{1}011$
$\vdash$ D : $1\check{0}11$
$\vdash$ D : $10\check{1}1$
$\vdash$ D : $101\check{1}$
$\vdash$ D : $1011\check{\square}$
$\vdash$ R : $101\check{1}$
$\vdash$ R : $10\check{1}0$
$\vdash$ R : $1\check{0}00$
$\vdash$ G : $\check{1}100$
$\vdash$ G : $\check{\square}1100$
$\vdash$ F : $\check{1}100 \downarrow$

$T(1011) = F: \check{1}100$

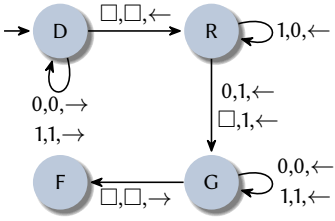
0 : $\check{\square}$
$\vdash$ 1 : $0\check{\square}$
$\vdash$ 0 : $01\check{\square}$
$\vdash$ 1 : $010\check{\square}$
$\vdash$ 0 : $0101\check{\square}$
$\vdots$

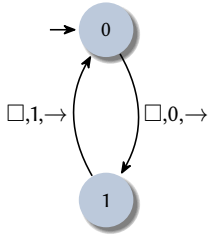
$T(\varepsilon) \uparrow$

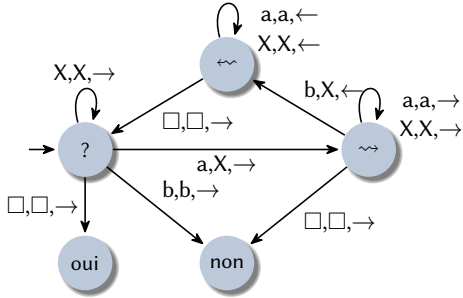
Langage et fonction

Définitions

- $L(\mathcal{M}) = \{w : \mathcal{M}(w)$ existe et son état est « oui »$\}$
- $f_{\mathcal{M}} : w \mapsto w'$ tel $\mathcal{M}(w)$ existe et son mot est w'







$f_{\mathcal{M}} : \overline{n}^2 \to \overline{n+1}^2$

Pas de $L(\mathcal{M})$

Pas de $L(\mathcal{M})$

pas $f_{\mathcal{M}}$

$L(\mathcal{M}) = \{w :$ $\forall i < |w|$ $w_{[0,i[}$ a + de a que de b $\}$ et w a autant de a que de b

Pas de $f_{\mathcal{M}}$

Conclusion

Machine de Turing

- Extension des automates avec un ruban non borné et une table de transition
- Définitions formelles :
  - Machine de Turing : $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, q_0, \delta)$
  - Table de transition : $\delta =$ tableau à cinq colonnes $(q, x, q', y, \leftrightarrow)$
  - Configuration : $C = (q, w, i)$ $\qquad q : w_{[0]} \cdots \breve{w}_{[i]} \cdots w_{[n-1]}$
  - Calcul : $C_0 \vdash C_1 \vdash C_2 \vdash \cdots$

Utilisation des machines de Turing

- Reconnaissance : $L(\mathcal{M}) = \{w :$ sur l'entrée $w, \mathcal{M}$ termine dans l'état « oui »$\}$
- Calcul : $f_{\mathcal{M}}(w) =$ mot sur le ruban en fin de calcul, ou $\uparrow$ si la machine boucle
- Autre possibilité : énumération infinie

À savoir faire

- Exécuter une machine (simple) sur une entrée
- Décrire le calcul effectué / le langage reconnu par une machine (simple)
- Créer une machine pour un problème simple