

Évaluation continue – 22 mars 2024

- La durée de l'évaluation est 1h. Le seul document autorisé est une feuille A4 manuscrite recto/verso.
- Le barème est indicatif. Les réponses doivent être correctement rédigées.
- Les trois exercices sont indépendants. Toute question non résolue peut être admise dans la suite.

Exercice 1 (sur 8 pts).

Machines de Turing

1. Soit $L_1 = \{a^m b^n : m \leq n\}$ l'ensemble des mots constitués de m symboles a puis n symboles b , avec $n \geq m$.
 - i. Quel(s) mot(s) parmi les suivants apparten(en)t à L_1 : $b, aab, abb, ababb, aabb$?
 - ii. Décrire une machine de Turing qui reconnaît L_1 .
2. Soit \mathcal{M} la machine de Turing décrite par la table de transition ci-dessous. Chaque ligne représente un quintuplet (état courant, symbole lu, symbole écrit, déplacement, nouvel état). L'état initial est q_0 .

q_0	0	0	→	q_0
	1	1	→	q_0
	□	□	←	r_0
r_0	0	0	←	r_0
	1	1	←	r_1
	□	□	→	s
r_1	0	1	←	r_0
	1	0	←	r_2
	□	1	←	s
r_2	0	0	←	r_1
	1	1	←	r_2
	□	0	←	r_1

- i. Représenter \mathcal{M} sous forme d'automate.
- ii. Appliquer \mathcal{M} sur les entrées suivantes : 0, 1, 10, 11 et 110. On demande uniquement l'état du ruban à la fin du calcul.
- iii. Justifier que \mathcal{M} s'arrête sur toute entrée, et préciser dans quel état.
- iv. En interprétant le contenu du ruban comme un entier en binaire, décrire le calcul effectué par \mathcal{M} .

Exercice 2 (sur 5 pts).*Variantes des machines de Turing*

On considère des variantes des machines de Turing possédant plusieurs rubans ayant chacun des *droits* en lecture et/ou écriture : un ruban peut être en *lecture seule* (on peut lire le contenu du ruban mais rien écrire dessus), en *écriture seule* (on peut écrire sur le ruban, mais on ne peut pas relire ce qu'on y a écrit), ou en *lecture/écriture* (on peut à la fois lire et écrire).

1. On suppose que tous les rubans sont en lecture seule. Cette variante permet-elle de reconnaître tout langage reconnaissable ?
2. On suppose que la machine a trois rubans : un ruban en lecture seule contenant l'entrée, un ruban en écriture seule sur lequel on écrit la sortie, et un 3^{ème} ruban en lecture/écriture. Cette variante permet-elle de calculer toute fonction calculable ?
3. On suppose que les rubans de la machine sont soit en lecture seule, soit en écriture seule (mais aucun en lecture/écriture). Cette variante permet-elle de calculer toute fonction calculable ?

Exercice 3 (sur 7 pts).*(In)calculabilité*

1. Soit L un langage et \bar{L} son complémentaire.
 - i. Montrer que si L est fini (c'est-à-dire contient un nombre fini de mots), il est décidable.
 - ii. Montrer que si \bar{L} est fini, alors L est décidable.
2. Soit $K = \{\langle A, w \rangle : A(w) \downarrow\}$ le problème de l'arrêt, et $L_2 = \{\langle A, w \rangle : w \notin L(A)\}$.
 - i. Montrer que si on sait décider L_2 , alors on sait décider K .
 - ii. Le langage L_2 est-il décidable ? reconnaissable ? co-reconnaisable ?