

**Évaluation finale – partie Machines de Turing – 12 avril 2024**

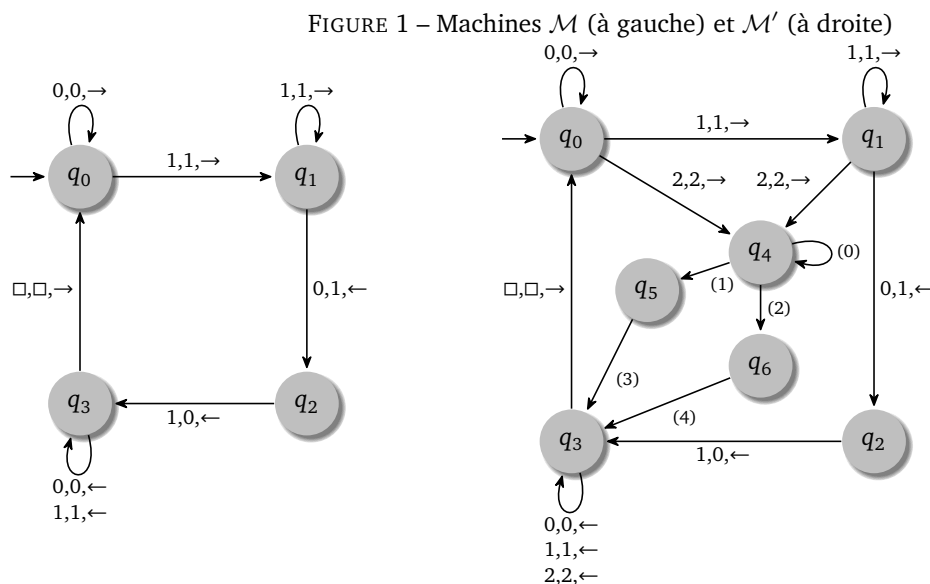
Les documents papier sont autorisés. Le barème est indicatif et susceptible de modifications. La notation tient compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Ce sujet représente la moitié d'une épreuve de 2h, et est donc prévu pour durer 1h.

**Exercice 1 (sur 6 pts).**

Machines de Turing

1. On considère la machine de Turing  $\mathcal{M}$  représentée à gauche sur la Figure 1.
  - i. Appliquer  $\mathcal{M}$  sur les entrées suivantes et donner l'état du ruban à la fin du calcul : 10, 1010 et 00110.
  - ii. Décrire le calcul effectué par  $\mathcal{M}$ .
2. On souhaite modifier la machine  $\mathcal{M}$  pour construire une machine  $\mathcal{M}'$  qui calcule la fonction  $f(w) = 0^{|w|_0} 1^{|w|_1} 2^{|w|_2}$  où  $|w|_0$  est le nombre de 0 dans  $w$ ,  $|w|_1$  le nombre de 1 et  $|w|_2$  le nombre de 2. La structure de  $\mathcal{M}'$  est donnée à droite sur la Figure 1 : elle a 3 nouveaux états  $q_4, q_5, q_6$  et des nouvelles transitions. Certaines transitions, numérotées de (0) à (4), sont à compléter. Compléter les transitions (0) à (4) pour que  $\mathcal{M}'$  effectue le calcul souhaité. *Exemple : la transition (0) doit être « 2, 2, → ».*



**Exercice 2 (sur 10 pts).**

Vrai ou faux

Répondez aux questions suivantes par vrai/faux et **justifiez votre réponse**. **Tout résultat du cours peut être utilisé en l'énonçant clairement, mais une réponse vrai/faux sans justification ne donne pas de point.**

1. Il existe des fonctions qui sont calculables par un programme C mais qui ne sont pas calculables par une machine de Turing à un ruban.
2. Lorsqu'on l'exécute sur un ruban initialement vide, une machine de Turing termine forcément.
3. Un algorithme peut terminer pour une infinité d'entrée et ne pas terminer pour une infinité d'entrée.
4. Si  $L = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  est un langage fini, alors  $L$  est décidable.
5. Si  $L$  est un langage infini, alors  $L$  est indécidable.
6. Si  $L$  est un langage infini, alors  $L$  est reconnaissable.
7. Toute machine RAM peut être simulée par une machine de Turing à 3 rubans.
8. Il existe des machines RAM qu'on ne peut pas simuler par une machine de Turing à un ruban.
9. Une machine de Turing peut être simulée par un programme LOOP.
10. Il existe un algorithme qui étant donné un programme LOOP  $P$  et une entrée  $x$ , décide si  $P$  termine sur l'entrée  $x$ .

**Exercice 3 (sur 4 pts).**

*Calculabilité*

1. Soit  $L = \{\langle A \rangle : A \text{ est un algorithme contenant une boucle } while\}$ .
  - i. Le théorème de Rice s'applique-t-il à  $L$  ? *Justifier.*
  - ii. Le langage  $L$  est-il décidable ?
2. Soit  $L = \{\langle A \rangle : A \text{ accepte l'entrée } 0\}$ .
  - i. Le théorème de Rice s'applique-t-il à  $L$  ? *Justifier.*
  - ii. Le langage  $L$  est-il décidable ?