


---

**TD 10 – Automate appeal**


---

**Exercice 1.***Échauffements*

-  Donner des automates à piles reconnaissant les langages suivants par pile vide et par état final, et justifier leur correction :
- $L = \{u \in \{a, b\}^* : |u|_a = 2|u|_b\}$  ;
  - $L = \{a^i b^j c^k : i \neq j \text{ ou } j \neq k\}$ .


**Exercice 2.***Extrait de partiel*

Soit  $L \subset \{a, b\}^*$  le plus petit langage tel que

- $\varepsilon \in L$
- Si  $w \in L$ ,  $awb \in L$  ;
- Si  $w_1, w_2 \in L$ , leur concaténation  $w_1 w_2$  est dans  $L$ .

1. Montrer que  $L$  n’est pas régulier.
2. Construire un automate à pile reconnaissant  $L$ .

**Exercice 3.***À contre-courant*

-  Montrer l’implication non vue en cours permettant de conclure que les acceptations par pile vide et par état final sont équivalentes.

**Exercice 4.***Mélanges...*

Soit  $\Sigma$  un alphabet fini. Soient  $u$  et  $v$  deux mots sur  $\Sigma^*$ . On appelle mélange des mots  $u$  et  $v$ , et l’on note  $\text{Mel}(u, v)$  l’ensemble des mots de  $\Sigma^*$  défini par :

- si  $u = \varepsilon$ ,  $\text{Mel}(u, v) = \{v\}$
- si  $v = \varepsilon$ ,  $\text{Mel}(u, v) = \{u\}$
- si  $u = xu'$  et  $v = yv'$  avec  $x, y \in \Sigma$ ,  $\text{Mel}(u, v) = x.\text{Mel}(u', v) \cup y.\text{Mel}(u, v')$ .

Si  $L$  et  $L'$  sont deux langages, on définit  $\text{Mel}(L, L') = \bigcup_{u \in L, v \in L'} \text{Mel}(u, v)$ .

1. On considère les langages  $L = (aa)^*$  et  $L' = (bbb)^*$ . Montrer que  $\text{Mel}(L, L')$  est rationnel.
2. Le mélange de deux langages rationnels est-il toujours rationnel ?
3. On considère  $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$  et  $L' = c^*$ . Montrer que  $\text{Mel}(L, L')$  est algébrique.
4. Montrer que le mélange d’un langage rationnel et d’un langage algébrique est algébrique.
5. Qu’en est-il du mélange de deux langages algébriques ?