
TD 11 – Interaction permanente

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée à coefficients entiers. Son **permanent** est défini par

$$\text{per}(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}.$$

On définit alors $\text{PER} = \{(A, b) : b = \text{per } A\}$. On veut montrer que $\text{PER} \in \text{IP}$.

1. À quelles classes de complexité déterministes, en temps et en espace, le permanent appartient-il ? On demande une réponse *naïve*.
2. Rappeler la définition du déterminant et ces propriétés les plus classiques. Quelles sont celles conservées par le permanent ?
3. En utilisant le développement selon la première ligne, donner un protocole simple de preuve interactive pour le calcul du permanent et l'analyser.
4. Donner une version améliorée de la preuve interactive du calcul du permanent, en utilisant l'arithmétisation.
5. Montrer que lorsque le prouveur donne une réponse incorrecte avec ce protocole, et que le vérificateur ne le rejette pas, alors à l'étape suivante la réponse sera incorrecte aussi, avec probabilité proche de 1.
6. Conclure.