TD 10 – Comptons les pépés

Exercice 1. *Sat alors !*

Soit PP la classe des langages L décidés en temps polynomial par une MTP M telle que $\mathbb{P}[M(x) = L(x)] > 1/2$. On considère les variantes suivantes du langage Sat :

$$\textsc{MajSat} = \{\phi : \phi \text{ est satisfaite par} > 1/2 \text{ de ses assignations}\}$$
$$\#\textsc{Sat} = \{(\phi, k) : \phi \text{ est satisfaite par} > k \text{ assignations}\}$$

1. Comparer BPP et PP.
2. Montrer que MajSat $\in$ PP.
3. Montrer que #Sat $\leq_p$ MajSat.
4. Montrer que #Sat et MajSat sont PP-complets.

Exercice 2.

✎ Montrer que si NP $\subseteq$ BPP, alors NP $=$ RP.

Exercice 3. *Médiane en temps linéaire probabiliste*

Le problème de trouver la médiane d'un ensemble d'entiers peut se résoudre en temps linéaire (déterministe).

✎ Donner un algorithme probabiliste qui résout ce problème de manière plus simple, en temps espéré linéaire.

Exercice 4. *Promis, c'est fini !*

Un **problème à promesse** Π est la donnée de deux ensembles disjoints Π_Y et Π_N. Sur une entrée x dont on **promet l'appartenance à** $\Pi_Y \cup \Pi_N$, le problème est alors de décider auquel des deux ensembles x appartient.
On dit que $\Pi \in$ PromiseBPP s'il existe une MTP M telle que si $x \in \Pi_Y$, alors $\mathbb{P}[M(x) = 1] \geq 2/3$ et si $x \in \Pi_N$, $\mathbb{P}[M(x) = 1] \leq 1/3$.
Pour $\epsilon \leq 1/6$, soit ϵ-ProbCircuitAccept, ou ϵ-PCA pour faire court, le problème donné par $\epsilon\text{-PCA}_Y = \{(C, p) : \mathbb{P}_r[C(r) = 1] \geq p + \epsilon\}$ et $\epsilon\text{-PCA}_N = \{(C, p) : \mathbb{P}[C(r) = 1] \leq p\}$.

✎ Montrer que ϵ-PCA est promiseBPP-complet (pour les réductions Karp).