TD 02 – SAT alors !

Exercice 1. *Machine universelle*

✎ Montrer l'existence d'une machine de Turing universelle U, c'est-à-dire telle que $U(\langle \alpha, x \rangle) = M_\alpha(x)$, où α est la description de la machine de Turing M_α.

Exercice 2. *Théorème de Cook-Levin (1971)*

1. Montrer que SAT $\in$ NP.
2. Montrer que toute fonction booléenne à n variables s'exprime par une formule sous forme normale conjonctive (CNF) de taille au plus $n2^n$, *i.e.* ayant au plus $n2^n$ symboles $\wedge$ and $\vee$.
3. Rappeler la définition de NP et donner l'encodage d'une configuration de machine de Turing par un mot de $Q \cup \Gamma$.

Définition. Soit M une machine de Turing (déterministe) fonctionnant en temps T. On appelle *tableau de* M un ensemble de $N \times N$ cellules contenant chacune élément de $Q \cup \Sigma$. Un tableau est dit *valide* si la première ligne contient la configuration initiale de M sur une entrée x, $N = T(|x|) + 1$, et pour tout $i \geq 1$, la ligne $(i+1)$ contient la configuration de M après i étapes de calcul.
Une *fenêtre* d'un tableau est un rectangle de hauteur 2 et de largeur 3 de cellules contiguës.

4. Exprimer la validité d'un tableau par une propriété sur ses fenêtres.
5. Comment encoder la propriété précédente par une formule CNF ? Quelles sont les variables et quelle taille de formule obtient-on ?
6. Prouver que SAT est NP-complet.

Exercice 3. SAT-*solver*

✎ Montrer que si P = NP, il existe un algorithme polynomial qui prend en entrée une formule ϕ sous forme normale conjonctive et retourne une affectation valide de ϕ s'il en existe un et 0 sinon.

Exercice 4. *L'une erre, l'autre non*

On note $\mathsf{E} = \bigcup_{c>0} \mathsf{DTIME}(2^{cn})$ et $\mathsf{EXP} = \bigcup_{c>0} \mathsf{DTIME}(2^{n^c})$.

1. Définir NE et NEXP par analogie avec NP.
2. Montrer que si tout langage unaire[1] de NP est dans P, alors E = NE.
3. Montrer que E = NE implique EXP = NEXP.
4. Si EXP $\neq$ NEXP, que peut-on dire de P et NP ?

1. Un langage est dit unaire s'il est inclus dans $\{1\}^*$.