TD 09 – Bool Lyonnais(e)

Exercice 1. *Six recuits*

Pour chaque question, donner la taille et la profondeur du circuit obtenu.

1. Donner un circuit calculant le XOR de deux entrées booléennes.
2. Réaliser un circuit qui effectue l'opération $\text{SEL}(x, y, z)$ définie sur 3 bits par $\text{SEL}(0, y, z) = y$ et $\text{SEL}(1, y, z) = z$.
3. Soit $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}^m$. On étend la définition de circuit en autorisant plusieurs sorties (de manière équivalente, on peut supposer qu'on a m circuits, un pour chaque bit de sortie). Montrer comment transformer un circuit calculant f en un circuit (à une seule sortie) décidant le langage $\{(x, y) : y = f(x)\}$.
4. Donner un circuit (à plusieurs sorties) effectuant l'addition de deux entiers binaires $x = \overline{x_{n-1} \cdots x_0}$ et $y = \overline{y_{n-1} \cdots y_0}$ en utilisant l'agorithme naïf appris à l'école.
5. On suppose que n est une puissance de 2. Réaliser un circuit effectuant l'addition de x et y en utilisant la méthode récursive suivante : on calcule en parallèle $\overline{x_{n-1} \cdots x_{n/2}} + \overline{y_{n-1} \cdots y_{n/2}}$ et $\overline{x_{n-1} \cdots x_{n/2}} + \overline{y_{n-1} \cdots y_{n/2}} + 1$ puis on sélectionne le bon en fonction de la retenue sortante du calcul de $\overline{x_{n/2-1} \cdots x_0} + \overline{y_{n/2-1} \cdots y_0}$.
6. Quelle taille et quelle profondeur de circuit obtient-on pour le graphe de l'addition ? Proposer une méthode différente pour le graphe de l'addition.

Exercice 2. *Effet Shannon*

1. Montrer que toute fonction de $\{0, 1\}^n$ dans $\{0, 1\}$ peut s'exprimer par une formule CNF de taille $n2^n$.
2. Montrer qu'une telle fonction peut s'exprimer par un circuit de taille $O(2^n)$.
3. (plus dur) Peut-on descendre à $O(2^n/n)$?
4. Montrer qu'il existe des fonctions n'admettant pas de circuit de taille $2^n/(10n)$.

Exercice 3. *Théorème de Spira*

On dit qu'un circuit est une *formule booléenne* si toute porte (sauf la sortie) émet exactement une flèche. Autrement dit, le graphe sous-jacent est un arbre.

✎ Montrer que pour toute formule F de taille t, il existe une formule équivalente F' de profondeur inférieure à $4 \log t$. Quelle est la taille de F' ? Quelles bornes obtient-on si on transforme une formule en circuit ?

Exercice 4. *Monotonie*

Une fonction booléenne $f : \{0, 1\}^n \mapsto \{0, 1\}$ sera dite monotone croissante si pour tout i, et pour tous $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ on a :

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \geq f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

✎ Montrer que les fonctions monotones croissantes sont exactement celles qu'on peut exprimer en n'utilisant que les connecteurs AND, OR, et les constantes 0 et 1.