TD 08 – Hiérarchie polynomiale

Exercice 1. *Fin de l'espace*

✎ Montrer que pour toute fonction constructible en espace $S(n) \geq \log n$, $\mathsf{NSPACE}(S(n)) = \mathsf{coNSPACE}(S(n))$. On s'inspirera de la preuve du théorème de Immerman-Szelepcsényi.

Exercice 2. *(Re)cours hiérarchique*

1. Montrer que Σ_i^{P} et Π_i^{P} sont clos par réduction en temps polynomial.
2. Montrer que Σ_iSat est Σ_i^{P}-complet.
3. Montrer que $\Sigma_i^{\mathsf{P}} = \bigcup_c \Sigma_i\mathsf{TIME}(n^c)$ et $\Pi_i^{\mathsf{P}} = \bigcup_c \Pi_i\mathsf{TIME}(n^c)$.
4. Montrer que pour $i \geq 1$, $\Sigma_{i+1}^{\mathsf{P}} = \mathsf{NP}^{\Sigma_i\textsc{Sat}} = \mathsf{NP}^{\Pi_i\textsc{Sat}}$.
5. Justifier les notations $\Sigma_{i+1}^{\mathsf{P}} = \mathsf{NP}^{\Sigma_i^{\mathsf{P}}} = \mathsf{NP}^{\Pi_i^{\mathsf{P}}}$, et $\Pi_{i+1}^{\mathsf{P}} = \mathsf{coNP}^{\Sigma_i^{\mathsf{P}}} = \mathsf{coNP}^{\Pi_i^{\mathsf{P}}}$.

Exercice 3. *$\mathsf{NP}^{\mathsf{NP}}$?*

Soit MinDNF l'ensemble des couples $\langle \phi, k \rangle$ tels qu'il existe une formule sous forme normale disjonctive (DNF) ϕ' de taille $\leq k$ équivalente à la formule DNF ϕ.

1. Montrer que MinDNF $\in \mathsf{NP}^{\mathsf{NP}}$.
2. Montrer que $\mathsf{NP} = \mathsf{NP}^{\mathsf{NP}}$ implique $\mathsf{NP} = \mathsf{coNP}$.
3. Montrer que plus généralement $\Sigma_i^{\mathsf{P}} = \Pi_i^{\mathsf{P}}$ ou $\Sigma_i^{\mathsf{P}} = \Sigma_{i+1}^{\mathsf{P}}$ implique l'effondrement de la hiérarchie polynomiale.

Exercice 4. *$\Sigma\Pi\Delta$*

On définit $\Delta_{i+1}^{\mathsf{P}} = \mathsf{P}^{\Sigma_i^{\mathsf{P}}} = \mathsf{P}^{\Pi_i^{\mathsf{P}}}$.

1. Montrer que les deux définitions données sont bien équivalentes.
2. Montrer que $\Sigma_i^{\mathsf{P}} \cup \Pi_i^{\mathsf{P}} \subseteq \Delta_{i+1}^{\mathsf{P}} \subseteq \Sigma_{i+1}^{\mathsf{P}} \cup \Pi_{i+1}^{\mathsf{P}}$.
3. Montrer que $\Sigma_i^{\mathsf{P}} \cup \Pi_i^{\mathsf{P}} = \Delta_i^{\mathsf{P}}$ implique l'effondrement de la hiérarchie polynomiale.
4. Montrer que Δ_i^{P} est clos par réduction polynomiale, par réduction polynomiale à la Cook-Turing et par complémentation.
5. Montrer que $\{\phi(x_1, \ldots, x_n) : \exists!(a_1, \ldots, a_n), \phi(a_1, \ldots, a_n) = 1\}$ est dans Δ_2^{P}.

Exercice 5. *Dessin !*

✎ Donner toutes les relations connues entre les classes de complexité suivantes (sous forme de graphe par exemple), en essayant de donner pour chaque classe un problème complet, et en justifiant rapidement : P, NP, coNP, EXP, NEXP, coNEXP, L, NL, coNL, PSPACE, $\mathsf{NPSPACE}$, $\mathsf{coNPSPACE}$, $\mathsf{EXPSPACE}$, $\mathsf{NEXPSPACE}$, $\mathsf{coNEXPSPACE}$, Σ_1^{P}, Π_1^{P}, Δ_2^{P}, Σ_2^{P}, Π_2^{P},

Σ_i^{P}, Π_i^{P}, Δ_i^{P} ($i > 2$), PH.
Note. $\mathsf{EXP} = \bigcup_c \mathsf{DTIME}(2^{n^c})$, et NEXP, EXPSPACE, NEXPSPACE sont définies de la même façon.