
TD07 – Voûte céleste

Théorème (Savitch, 1970). Soit $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ un fonction constructible en espace telle que $s(n) \geq \log n$. Alors $\text{NSPACE}(s(n)) \subseteq \text{SPACE}(s(n)^2)$.

Définition. Une fonction $f : \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ est dite *calculable implicitement en espace logarithmique (ciel)* si f est polynomialement bornée ($\exists c \forall x, |f(x)| \leq |x|^c$) et si $L_f := \{\langle x, i \rangle : f(x)_i = 1\}$ et $L'_f := \{\langle x, i \rangle : i \leq |f(x)|\}$ sont dans L .

On dit qu'un problème B est *réductible en espace logarithmique* à un problème C , noté $B \leq_l C$, s'il existe une fonction *ciel* f telle que $x \in B$ ssi $f(x) \in C$.

Théorème. Si f et g sont deux fonctions *ciel*, alors $h = f \circ g$ également.


Corollaire.

- Si $B \leq_l C$ et $C \leq_l D$, alors $B \leq_l D$.
 - Si $B \leq_l C$ et $C \in L$, alors $B \in L$.
-

Exercice 1.

Dans le ciel, c'est céleste

Une fonction $f : \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ est dite *calculable en espace logarithmique avec écriture seule, toujours en-avant (céleste)* si f peut être calculée par une machine de Turing fonctionnant en espace $O(\log n)$ dont le ruban de sortie est à « écriture unique », c'est-à-dire qu'à chaque étape, la tête de lecture du ruban de sortie peut soit rester immobile, soit écrire un symbole et se déplacer vers la droite. Comme d'habitude, l'espace utilisé sur le ruban de sortie n'est pas comptabilisé.

 Montrer qu'une fonction est de type *ciel* ssi elle est *céleste*.

Exercice 2.

Now, in english!

A function $f : \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ is said *write-once logspace computable* if there exists a $O(\log n)$ -space TM computing f whose output tape is write-once, meaning that at each step, the head over the output tape can either stay at the same position or write a symbol and move right. As usual, the space used on the output cell is not counted.

 Show that a function is implicitly logspace computable iff it is write-once logspace computable.