TD 3 : Multiplication de polynômes

Exercice 1. *Résolution de récurrence*

Soit T définie (sur les entiers) par $T(1) = T_1 \geq 0$ et $T(n) \leq aT(\lceil n/b \rceil) + O(n)$. On suppose T croissante et $b > 1$.

1. Borner, pour $k \geq 1$, $T(n)$ en fonction de $T(n/b^k)$ (pour n multiple de b^k).
2. Montrer que si $a > b$, $T(n) = O(n^{\log_b a})$.
3. Montrer que si $a = b$, $T(n) = O(n \log n)$.
4. Montrer que si $a < b$, $T(n) = O(n)$.

Exercice 2. *Algorithme Toom-3*

L'objectif de l'exercice est de voir une généralisation de l'algorithme de Karatsuba.

1. Montrer qu'on peut adapter les formules d'interpolation de Lagrange au cas où l'un des évalués est remplacé par la valeur du coefficient dominant du polynôme (« évaluation en ∞ »).
2. Montrer qu'on peut multiplier deux polynômes de degré 2 avec 5 multiplications, en utilisant un schéma « évaluation – interpolation » sur les 5 points 0, 1, -1, 2 et ∞.
3. Généraliser le résultat précédent à des polynômes de degré quelconque d, et analyser la complexité de l'algorithme obtenu.
   Indication : si $P = P_0 + X^{n/3}P_1 + X^{2n/3}P_2$, définir $P^\star(X,Y) = P_0(X) + YP_1(X) + Y^2P_2(X)$ et appliquer l'algorithme précédent à $P^\star$. On pourra supposer que $n = d + 1$ est une puissance de 3.

Exercice 3. *Complexités précises*

1. Calculer le nombre précis d'additions et de multiplications dans l'algorithme de Karatsuba, quand les entrées sont de taille $n = 2^k$.
2. Même question pour l'algorithme de multiplication par transformée de Fourier rapide.