

TD 12 : Évaluations de polynômes

Exercice 1.*Évaluation des dérivées*

Soit k un corps infini et $P \in k[x]$ un polynôme de degré d . On note $M(d)$ la complexité arithmétique de la multiplication de polynômes de degré au plus d .

1. Décrire et analyser un algorithme d'évaluation d'un polynôme P en un point $a \in k$ qui effectue d multiplications et d additions. Cet algorithme s'appelle le schéma de Horner, et est optimal¹.
2. On souhaite évaluer P et toutes ses dérivées $P', P'', \dots, P^{(d)}$ sur un point $a \in k$, où $P^{(d)}$ désigne la dérivée $d^{\text{ème}}$ du polynôme. Décrire et analyser un algorithme naïf pour ce problème.

Nous allons maintenant concevoir un algorithme de complexité quasi-linéaire résolvant ce dernier problème.

3. Rappeler la complexité arithmétique des meilleurs algorithmes vus en cours pour l'évaluation et pour l'interpolation d'un polynôme de degré d .
4. En utilisant une évaluation puis une interpolation de polynômes, concevoir un algorithme quasi-linéaire qui calcule le polynôme décalé $P(x + a)$ pour $a \in k$.
Remarque : « calculer le polynôme » signifie calculer la liste de ses coefficients.
5. Nous allons prouver la formule de Taylor en $a \in k$ pour les polynômes :

$$P(x) = \sum_{i=0}^d P^{(i)}(a) \frac{(x-a)^i}{i!}.$$

- i. Prouvez la formule quand $a = 0$ et que P est un monôme X^ℓ .
 - ii. En déduire la formule pour tout polynôme quand $a = 0$.
 - iii. En déduire la formule générale.
6. En déduire un algorithme quasi-linéaire pour l'évaluation d'un polynôme et de toutes ses dérivées sur un point $a \in k$.

1. Victor Y. Pan, *Methods of computing values of polynomials*, Russian Mathematical Surveys, 21(1), p. 105-136, 1966.