Complexité

Exercice 1. *Notations de Landau*

Montrer les implications et équivalences suivantes :

1. $f = O(g) \iff g = \Omega(f)$
2. $f = \Theta(g) \iff f = O(g) \wedge f = \Omega(g)$
3. $f = O(g)$ et $g = O(h) \implies f = O(h)$
4. $f = \Omega(g)$ et $g = \Omega(h) \implies f = \Omega(h)$
5. $f = \Theta(g)$ et $g = \Theta(h) \implies f = \Theta(h)$
6. $f = O(g) \iff g = \Omega(f)$

Exercice 2. *Résolution de récurrences*

Montrer les résultats suivants.

1. Si $T(n) \leq T(n-1) + O(n)$ pour tout $n > 0$, alors $T(n) = O(n^2)$.
2. Si $T(n) \leq 2T(n-1) + O(1)$ pour tout $n > 0$, alors $T(n) = O(2^n)$.
3. Si $T(n) \leq T(\lceil n/2 \rceil) + O(1)$ pour tout $n > 0$, alors $T(n) = O(\log n)$.
4. Si $T(n) \leq 2T(\lceil n/2 \rceil) + O(n)$ pour tout $n > 0$, alors $T(n) = O(n \log n)$.
5. Si $T(n) \leq 3T(\lceil n/2 \rceil) + O(n)$ pour tout $n > 0$, alors $T(n) = O(n^{\log_2(3)})$.

Résoudre les équations de récurrences suivantes :

6. $T(n) \leq T(n-1) + O(1)$ pour tout $n > 0$;
7. $T(n) \leq 3T(n-2) + O(n)$ pour tout $n > 1$;
8. $T(n) \leq T(\lceil n/2 \rceil) + O(n)$ pour tout $n > 0$;
9. $T(n) \leq 2T(\lceil n/2 \rceil) + O(1)$ pour tout $n > 0$;
10. $T(n) \leq 7T(\lceil n/2 \rceil) + O(n^2)$ pour tout $n > 0$.