TD9 : Approximation probabiliste

Exercice 1. MAX-SAT *: le meilleur des deux mondes*

L'objectif de cet exercice est d'utiliser les deux algorithmes vus en cours pour le problème MAX-SAT pour obtenir un meilleur facteur d'approximation. On rappelle que si l'entrée est une formule k-CNF, l'algorithme RAND-k-SAT renvoie une solution dont l'espérance du facteur d'approximation est $\geq (1-1/2^k)$ et l'algorithme LP-SAT renvoie une solution dont l'espérance du facteur d'approximation est $\geq \beta_k$ où $\beta_k = 1-(1-1/k)^k$.

1. On considère le problème MAX-k-SAT, pour $1 \leq k \leq 5$. Donner les valeurs (approchées) des facteurs d'approximation des deux algorithmes vus en cours, pour chacune de ces 5 valeurs de k. Pour quelle valeur les deux algorithmes sont équivalents ?

On s'intéresse maintenant au problème général MAX-SAT, dans lequel les clauses ont un nombre quelconque de littéraux. Pour obtenir le meilleur des deux mondes, on tire aléatoirement un bit et on utilise le premier algorithme si $b = 0$ et le deuxième sinon.
Soit n_1 l'espérance du nombre de clauses satisfaites par le premier algorithme et n_2 l'espérance du nombre de clauses satisfaites par le second. On note S_k l'ensemble des clauses de taille k de la formule ϕ en entrée de l'algorithme. On garde les notations du cours : pour l'algorithme LP-SAT, les $z_j^\star$ désignent une solution optimale du problème relaché.

2. Montrer que $n_1 \geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{C_j \in S_k} (1-1/2^k)$.
3. Montrer que $n_2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{C_j \in S_k} \beta_k z_j^\star$.
4. Montrer que pour tout k, $(1-2^{-k}) + \beta_k \geq 3/2$.
5. En déduire que $n_1 + n_2 \geq \frac{3}{2} \sum_j z_j^\star$.
6. Conclure que l'algorithme proposé dans cet exercice est un algorithme probabiliste d'approximation de MAX-SAT. Quel est son facteur d'approximation ? Donner les garanties de l'algorithme : Monte Carlo type I ou II ou Las Vegas, complexité, etc.