TD 8 - Marches aléatoires

Exercice 1. 2-SAT

L'algorithme utilisé pour k-SAT ($k \geq 3$) fonctionne également pour le problème 2-SAT. En réalité, il suffit de considérer la boucle intérieure WALK, comme nous allons le voir. On considère, comme dans le cours, la marche aléatoire donnée par la distance entre l'affectation courante et une affectation satisfaisante fixée. *Attention, on considère la vraie marche aléatoire, pas la marche aléatoire avec une infinité d'états.*

On note, pour $d \geq 0$, Z_d la variable aléatoire qui représente le nombre d'étapes nécessaires pour atteindre l'origine depuis l'état d, et E_d l'espérance de Z_d.

1. Donner le graphe associé à la marche aléatoire.
2. Exprimer E_d en fonction de E_{d-1} et E_{d+1}, en donnant les cas de base.
3. Montrer que $E_{d+1} = E_d + 2(n-d) - 1$ pour tout $d < n$.
4. En déduire que $E_d = d(2n-d)$ pour tout $d \leq n$.
5. Conclure en donnant et analysant un algorithme Monte Carlo pour 2-SAT, de complexité polynomiale et dont la probabilité de succès est $\geq 1/2$.
6. En déduire un algorithme Monte Carlo de complexité polynomiale pour 2-SAT, avec cette fois-ci une probabilité de succès $\geq 1 - 2^{-n}$ où n est le nombre de variables de la formule en entrée.

Exercice 2. *Analyse d'une marche aléatoire particulière*

On s'intéresse à la marche aléatoire du cours : de l'état $i > 0$, on va dans l'état $i-1$ avec probabilité p et dans l'état $i+1$ avec probabilité $(1-p)$; quand on est dans l'état 0, on y reste avec probabilité 1.

On note $P_{d,n}$ la probabilité d'atteindre l'origine en au plus n étapes, partant de l'état d.

1. Calculer $P_{0,n}$ et $P_{d,n}$ pour $d > n$.
2. Montrer que $P_{d,n} = pP_{d-1,n-1} + (1-p)P_{d+1,n-1}$.
3. En déduire que $P_{d,n} \leq (p/(1-p))^d$ pour tout n et tout d.

On démontrer le théorème du cours sur la probabilité P_d d'atteindre l'origine en un nombre fini d'étapes, partant de l'état d. On remarque que $P_d = \lim_{n\to\infty} P_{d,n}$.

4. Établir la récurrence satisfaite par P_d et donner les *cas de base* P_0 et $\lim_{d\to\infty} P_d$ (à l'aide des premières questions.

On admet le résultat suivant. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite satisfaisant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On note $P_u(X) = X^2 - aX - b$ le polynôme caractéristique de $(u_n)_n$. Alors il existe deux constantes λ et μ telles que pour tout n,

— $u_n = \lambda r_0^n + \mu r_1^n$ si P_u a deux racines distinctes r_0 et r_1 ;
— $u_n = (\lambda + \mu n)r^n$ si P_u a une racine double r.

5. En utilisant le résultat précédent, résoudre la récurrence satisfaite par P_d dans chacun des trois cas ($p = 1/2$, $p > 1/2$ et $p < 1/2$). *On déterminera les constantes λ et μ de chaque cas à l'aide des deux cas de base.*