TD 2

Exercice 1. *Bornes*

On considère la simulation suivante : on jette une pièce tant qu'on obtient des PILEs et on s'arrête au premier FACE. On note p la probabilité d'obtenir PILE.

1. Quelle est l'espérance du nombre de lancers avant de s'arrêter ?
2. Si $p = 2/3$, quelle est la probabilité qu'on effectue plus de 10 lancers ?
3. Si $p = 99\%$, quelle est la probabilité que le nombre de lancers soit supérieur à 200 ?

Exercice 2. *Amélioration de la probabilité de succès*

On appelle *simulation* l'expérience de l'exercice précédent avec $p = 99\%$, c'est-à-dire le lancer d'une pièce biaisée ($\Pr[\text{PILE}] = 99\%$) tant qu'on obtient pas FACE.

1. On répète la simulation n fois, et on renvoie la moyenne M des nombres de lancers.
   - **i.** Calculer l'espérance de M. Dépend-elle de n ?
   - **ii.** Déterminer n tel que $\Pr[M < 80 \vee M > 120] \leq 1/3$.
   - **iii.** Quelle valeur de n faut-il prendre si on souhaite que $\Pr[80 \leq M \leq 120] \geq 1 - \epsilon$?
2. On cherche maintenant à minimiser le nombre total de simulations, tout en assurant une bonne probabilité que le résultat renvoyé soit dans $[80, 120]$. Pour cela, on répète k fois l'expérience précédente (qui calcule la moyenne de n simulations), et on renvoie la médiane des résultats. Soit $M_1, \ldots, M_k$ les v.a. qui désignent les k moyennes calculées, et Z_i la v.a. aléatoire qui vaut 1 si $80 \leq M_i \leq 120$ et 0 sinon.
   - **i.** Montrer que pour que la valeur renvoyée ne soit pas dans l'intervalle $[80, 120]$, il faut qu'au moins $k/2$ des moyennes calculées soient hors de cet intervalle.
   - **ii.** On fixe n tel que chaque moyenne appartienne à l'intervalle $[80, 120]$ avec probabilité $\geq 2/3$. Combien vaut $\mathbb{E}\left[\sum_i Z_i\right]$?
   - **iii.** En déduire une valeur de k telle qu'avec probabilité $\geq 1-\epsilon$, le résultat renvoyé appartient à l'intervalle $[80, 120]$. Comparer avec la question précédente.

Exercice 3. *Sondage*

On effectue un sondage pour un référendum, dans lequel la réponse est soit OUI soit NON. La proportion de la population qui vote OUI est p, et celle qui vote NON est $(1 - p)$. On tire aléatoirement 1000 électeurs, de manière uniforme, et on les interroge sur leur vote. On suppose qu'ils disent tous la vérité. On note N le nombre total d'électeurs.

1. Quelle est l'espérance du nombre de OUI obtenu ?
2. On note $\tilde{p}$ la proportion de OUI obtenus. Quelle est la probabilité que $\tilde{p}$ soit dans une marge d'erreurs de 5% (resp. 1%) par rapport à p ? Dépend-elle de N ?
3. *(bonus)* Refaire l'exercice dans un cadre plus réaliste :
   - **i.** Supposer qu'une proportion q des électeurs préfère s'abstenir, voter blanc ou nul.
   - **ii.** Supposer qu'une proportion r des électeurs ment sur son vote.

Remarque. Cet exercice permet de montrer de manière très caricaturale le fonctionnement des sondages (pourquoi interroger 1000 électeurs peut suffire) et certaines difficultés (estimation des scores des *petits candidats*).