

TD 1

Exercice 1.*Échauffements*

1. On tire une pièce équilibrée dix fois de suite. Calculer la probabilité des événements suivants.
 - i. Le nombre de PILE et de FACE sont égaux.
 - ii. Il y a plus de PILES que de FACES.
2. On tire deux dés équilibrés à six faces, indépendamment. Calculer la probabilité des événements suivants.
 - i. Les deux dés ont la même valeur.
 - ii. Le deuxième dé vaut plus de points que le premier.
 - iii. La somme des deux dés est un nombre pair.

Exercice 2.*Pièces biaisées*

On dispose d'une pièce biaisée qui tombe sur PILE avec probabilité p et sur FACE avec probabilité $(1 - p)$. On cherche à produire des bits aléatoires, non biaisés.

1. On lance deux fois la pièce biaisée. Donner tous résultats possibles et leurs probabilités.
2. On propose l'algorithme suivant. On tire deux fois la pièce biaisée. Si on obtient PILE-FACE, on renvoie 1. Si on obtient FACE-PILE, on renvoie 0. Sinon, on recommence.
 - i. Montrer que l'algorithme proposé renvoie 0 ou 1 avec probabilité $1/2$.
 - ii. Quelle est l'espérance du nombre de lancers nécessaires pour que l'algorithme renvoie un résultat ?
3. On souhaite améliorer l'espérance du nombre de lancers nécessaires. Pour cela, on effectue toujours les lancers par deux et si on obtient deux résultats différents, on renvoie 0 ou 1 comme à la question précédente. On ajoute comme règle que si on obtient PILE-PILE-FACE-FACE, on renvoie 1, et si on obtient FACE-FACE-PILE-PILE, on renvoie 1 ; sinon, on recommence.
 - i. Montrer que l'algorithme obtenu a toujours la même probabilité de renvoyer 0 ou 1.
 - * ii. Calculer l'espérance du nombre de lancers avant que l'algorithme renvoie un résultat.
- ** 4. Généraliser la technique précédente et proposer un algorithme qui renvoie 0 ou 1 avec la même probabilité et dont l'espérance du nombre de lancers est inférieure à celle des algorithmes précédents.

Exercice 3.*Qui paie l'addition ?*

Pour décider de qui paie l'addition, Alice propose à Bob de lancer chacun un dé et de laisser payer celui qui a le plus petit score. Elle dispose pour cela de trois dés équilibrés, mais qui n'ont pas les valeurs habituelles sur les faces. Le dé A possède les faces 1, 1, 6, 6, 8, 8, le dé B les faces 2, 2, 4, 4, 9, 9 et le dé C les faces 3, 3, 5, 5, 7, 7.

Par souci d'équité, Alice laisse Bob choisir le dé qu'il veut en premier, puis elle choisit un des deux dés restants.

1. Bob choisit le dé A, et Alice prend le B. Montrer qu'Alice gagne avec probabilité $> 1/2$.
2. Bob choisit alors le dé B, et Alice le C. Montrer qu'Alice gagne toujours avec probabilité $> 1/2$.
3. Bob décide en fait de choisir le dé C, et Alice choisit le A. Montrer que décidément, Alice gagne encore avec probabilité $> 1/2$.

Le résultat obtenu dans cet exercice est connu sous le nom des « dés non transitifs¹ » et est relié au paradoxe de Condorcet en théorie du choix social.

Exercice 4.*Qui paie l'addition (bis) ?*

Bob n'aime pas trop la technique d'Alice. Elle propose alors de tirer avec une pièce. Mais elle choisit encore des règles un peu bizarres : chaque joueur choisit une suite de trois valeurs (PILE ou FACE), et on tire une pièce jusqu'à ce qu'une des suites apparaisse ; le gagnant est celui dont la suite apparaît en premier.

Alice est encore sympa et laisse Bob choisir sa suite en premier.

- ✎ Montrer que quelque soit la suite choisie par ce pauvre Bob, Alice pourra en choisir une qui lui garantit une probabilité de succès $> 1/2$. *Indication. Étudier les huit cas possibles pour la suite de Bob.*

1. Cf. https://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9s_non_transitifs.