

---

**TD 2**


---

**Exercice 1.***Marche aléatoire en temps borné*

On considère la marche aléatoire suivante : les états sont tous les entiers (positifs et négatifs), et depuis l'état  $i$  on peut passer dans l'état  $i - 1$  avec probabilité  $1/3$  et dans l'état  $i + 1$  avec probabilité  $2/3$ .

1. Combien y a-t-il de chemins de longueur  $3d$  dont le point de départ est l'état  $d > 0$  et dont l'extrémité est l'état  $0$ ?
2. Quelle est la probabilité qu'une marche aléatoire de point de départ  $d > 0$  atteigne l'état  $0$  en exactement  $3d$  étapes?
3. En déduire une borne sur la probabilité pour qu'une marche aléatoire de point de départ  $d > 0$  passe par l'origine au cours de ses  $3d$  premières étapes.
4. Montrer qu'il existe une constante  $c$  telle que cette probabilité soit  $\geq c2^{-d}/\sqrt{d}$ . Utiliser la formule de Stirling :  $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$  pour tout  $n$ .
5. En déduire une borne sur la probabilité de succès de l'algorithme  $\text{Walk}(\phi, 3n)$ , où  $\phi$  est une formule 3-CNF à  $n$  variables.

**Exercice 2.***2-SAT*

L'algorithme utilisé pour  $k$ -SAT ( $k \geq 3$ ) fonctionne également pour le problème 2-SAT. En réalité, il suffit de considérer la boucle intérieure  $\text{Walk}$ , comme nous allons le voir. On considère, comme dans le cours, la marche aléatoire donnée par la distance entre l'affectation courante et une affectation satisfaisante fixée. *Attention, on considère la vraie marche aléatoire, pas la marche aléatoire avec une infinité d'états.*

On note, pour  $d \geq 0$ ,  $Z_d$  la variable aléatoire qui représente le nombre d'étapes nécessaires pour atteindre l'origine depuis l'état  $d$ , et  $E_d$  l'espérance de  $Z_d$ .

1. Donner le graphe associé à la marche aléatoire.
2. Exprimer  $E_d$  en fonction de  $E_{d-1}$  et  $E_{d+1}$ , en donnant les cas de base.
3. Montrer que  $E_{d+1} = E_d + 2d + 1$  pour tout  $d < n - 1$ .
4. En déduire que  $E_d = d^2$  pour tout  $d < n$ .
5. Conclure en donnant et analysant un algorithme probabiliste pour 2-SAT.