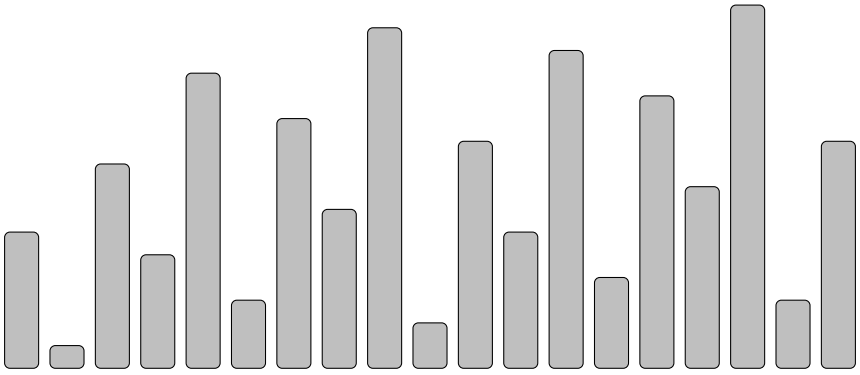
Chapitre 5

# Programmation dynamique

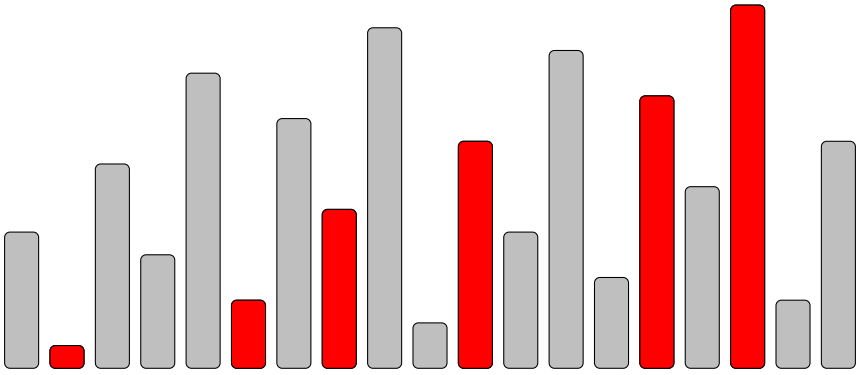
HLIN401 : Algorithmique et complexité

L2 Informatique
Université de Montpellier
2020 – 2021

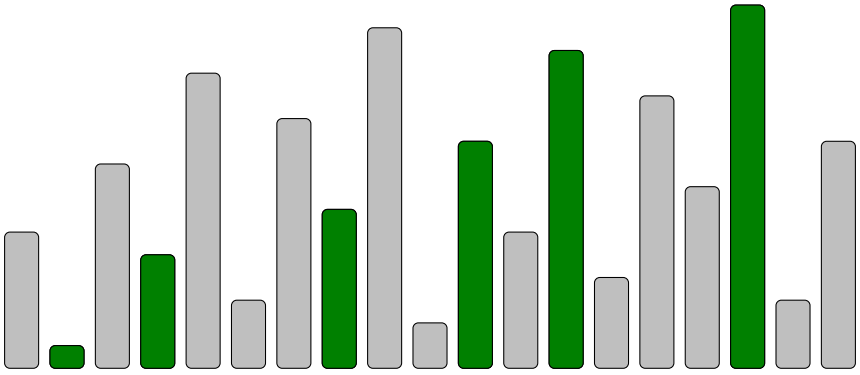
# Plus longue sous-suite croissante



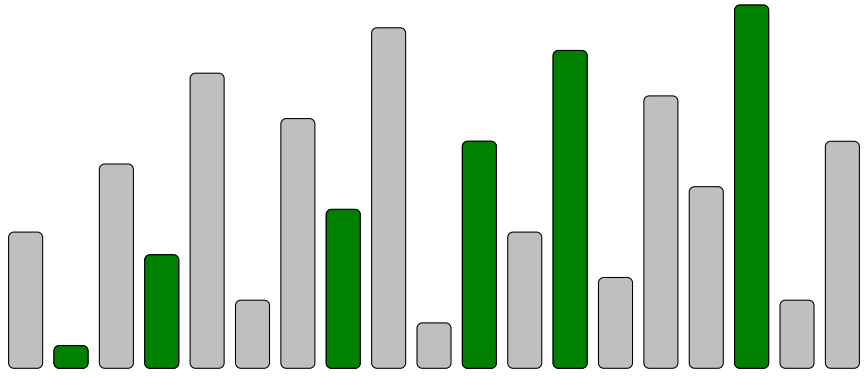
# Plus longue sous-suite croissante



# Plus longue sous-suite croissante



# Plus longue sous-suite croissante



## Définition

Une **plus longue sous-suite croissante (PLSSC)** d'un tableau $T$ d'entiers est une suite la plus grande possible d'indices $0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n-1$ telle que $T_{[i_1]} \leq T_{[i_2]} \leq \cdots \leq T_{[i_k]}$.

# Formalisation du problème

Entrée Un tableau $T$ de $n$ entiers

Sortie 1 Une PLSSC de $T$

# Formalisation du problème

Entrée Un tableau $T$ de $n$ entiers

Sortie 1 Une PLSSC de $T$

Sortie 2 La longueur d'une PLSSC de $T$

# Formalisation du problème

**Entrée** Un tableau $T$ de $n$ entiers

**Sortie 1** Une PLSSC de $T$

**Sortie 2** La longueur d'une PLSSC de $T$

## Exemple précédent

**Entrée** $T = [6, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15, 2, 10, 6, 14, 4, 12, 8, 16, 3, 10]$

**Sortie 1** $[6, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15, 2, 10, 6, 14, 4, 12, 8, 16, 3, 10]$

ou $[6, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15, 2, 10, 6, 14, 4, 12, 8, 16, 3, 10]$

ou ...

**Sortie 2** 6

# Formalisation du problème

Entrée Un tableau $T$ de $n$ entiers

Sortie 1 Une PLSSC de $T$

Sortie 2 La longueur d'une PLSSC de $T$

## Exemple précédent

Entrée $T = [6, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15, 2, 10, 6, 14, 4, 12, 8, 16, 3, 10]$

Sortie 1 $[6, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15, 2, 10, 6, 14, 4, 12, 8, 16, 3, 10]$

ou $[6, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15, 2, 10, 6, 14, 4, 12, 8, 16, 3, 10]$

ou ...

Sortie 2 6

- Algo. naïf : considérer toutes les sous-suites $\rightsquigarrow O(2^n)$

# Formalisation du problème

Entrée Un tableau $T$ de $n$ entiers

Sortie 1 Une PLSSC de $T$

Sortie 2 La longueur d'une PLSSC de $T$

## Exemple précédent

Entrée $T = [6, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15, 2, 10, 6, 14, 4, 12, 8, 16, 3, 10]$

Sortie 1 $[6, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15, 2, 10, 6, 14, 4, 12, 8, 16, 3, 10]$

ou $[6, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15, 2, 10, 6, 14, 4, 12, 8, 16, 3, 10]$

ou ...

Sortie 2 6

- Algo. naïf : considérer toutes les sous-suites $\rightsquigarrow O(2^n)$

**Algorithme de complexité polynomiale ?**

# Formule récursive pour PLSSC

- $\boldsymbol{\ell(T)}$ : longueur des PLSSC de $T$
- $\boldsymbol{\ell_i}$ : longueur des PLSSC de $T$ **finissant en case** $\boldsymbol{T_{[i]}}$

# Formule récursive pour PLSSC

- $\boldsymbol{\ell(T)}$ : longueur des PLSSC de $T$
- $\boldsymbol{\ell_i}$ : longueur des PLSSC de $T$ **finissant en case** $\boldsymbol{T_{[i]}}$

Remarque

$$\ell(T) = \max_{0 \leq i < n} \ell_i$$

# Formule récursive pour PLSSC

- $\boldsymbol{\ell(T)}$ : longueur des PLSSC de $T$
- $\boldsymbol{\ell_i}$ : longueur des PLSSC de $T$ **finissant en case $\boldsymbol{T_{[i]}}$**

Remarque

$$\ell(T) = \max_{0 \leq i < n} \ell_i$$

Lemme

$$\ell_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 1 + \max\{\ell_j : j < i \text{ tels que } T_{[j]} \leq T_{[i]}\} & \text{pour } 1 \leq i < n \end{cases}$$

# Formule récursive pour PLSSC

- $\ell(T)$ : longueur des PLSSC de $T$
- $\ell_i$ : longueur des PLSSC de $T$ **finissant en case $T_{[i]}$**

Remarque

$$\ell(T) = \max_{0 \leq i < n} \ell_i$$

Lemme

$$\ell_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 1 + \max\{\ell_j : j < i \text{ tels que } T_{[j]} \leq T_{[i]}\} & \text{pour } 1 \leq i < n \end{cases}$$

Preuve On montre deux inégalités :

$\geq$ si $\max = \ell_{j_m}$, il existe une SSC de lgr $\ell_{j_m}$ : $T_{[j_0]} \leq \cdots \leq T_{[j_m]}$ ; donc $T_{[j_0]} \leq \cdots \leq T_{[j_m]} \leq T_{[i]}$ est une SSC de lgr $\ell_{j_m} + 1$

# Formule récursive pour PLSSC

- $\ell(T)$ : longueur des PLSSC de $T$
- $\ell_i$ : longueur des PLSSC de $T$ **finissant en case $T_{[i]}$**

Remarque

$$\ell(T) = \max_{0 \le i < n} \ell_i$$

Lemme

$$\ell_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 1 + \max\{\ell_j : j < i \text{ tels que } T_{[j]} \le T_{[i]}\} & \text{pour } 1 \le i < n \end{cases}$$

Preuve On montre deux inégalités :

- $\ge$ si $\max = \ell_{j_m}$, il existe une SSC de lgr $\ell_{j_m}$ : $T_{[j_0]} \le \cdots \le T_{[j_m]}$ ; donc $T_{[j_0]} \le \cdots \le T_{[j_m]} \le T_{[i]}$ est une SSC de lgr $\ell_{j_m} + 1$
- $\le$ il existe une SSC de lgr $\ell_i$ : $T_{[j_0]} \le \cdots \le T_{[j]} \le T_{[i]}$ ; alors $T_{[j_0]} \le \cdots \le T_{[j]}$ est une SSC de lgr $\ell_i - 1$ : $\ell_j \ge \ell_i - 1$ ; donc $\max_{j<i, T_{[j]} \le T_{[i]}} \ell_j \ge \ell_i - 1$

# Mauvaise idée : algorithme récursif !

$$\ell_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 1 + \max\{\ell_j : j < i \text{ tels que } T_{[j]} \leq T_{[i]}\} & \text{pour } 1 \leq i < n \end{cases}$$

# Mauvaise idée : algorithme récursif !

$$\ell_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 1 + \max\{\ell_j : j < i \text{ tels que } T_{[j]} \leq T_{[i]}\} & \text{pour } 1 \leq i < n \end{cases}$$

**Algorithme :** $\mathrm{L}(T, i)$
**si** $i = 0$ **: renvoyer** $1$
$\max \leftarrow 0$
**pour** $j = 0$ *à* $i - 1$ **:**
    **si** $T_{[j]} \leq T_{[i]}$ **:**
        $L \leftarrow \mathrm{L}(T, j)$
        **si** $L > \max$ **:** $\max \leftarrow L$
**renvoyer** $1 + \max$

# Mauvaise idée : algorithme récursif !

$$\ell_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 1 + \max\{\ell_j : j < i \text{ tels que } T_{[j]} \leq T_{[i]}\} & \text{pour } 1 \leq i < n \end{cases}$$

**Algorithme :** $\mathsf{L}(T, i)$
**si** $i = 0$ **: renvoyer** $1$
$\max \leftarrow 0$
**pour** $j = 0$ *à* $i - 1$ **:**
  **si** $T_{[j]} \leq T_{[i]}$ **:**
    $L \leftarrow \mathsf{L}(T, j)$
    **si** $L > \max$ **:** $\max \leftarrow L$
**renvoyer** $1 + \max$

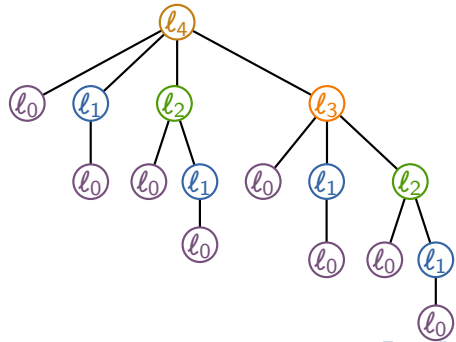
- $t_L(i) \leq \sum_{j<i} t_L(j)$
  $\rightsquigarrow\ t_L(i) = O(2^i)$

# Mauvaise idée : algorithme récursif !

$$\ell_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 1 + \max\{\ell_j : j < i \text{ tels que } T_{[j]} \leq T_{[i]}\} & \text{pour } 1 \leq i < n \end{cases}$$

**Algorithme :** $\mathsf{L}(T, i)$
**si** $i = 0$ **: renvoyer** $1$
$\max \leftarrow 0$
**pour** $j = 0$ *à* $i - 1$ **:**
  **si** $T_{[j]} \leq T_{[i]}$ **:**
    $L \leftarrow \mathsf{L}(T, j)$
    **si** $L > \max$ **:** $\max \leftarrow L$
**renvoyer** $1 + \max$

- $t_L(i) \leq \sum_{j<i} t_L(j)$
  $\rightsquigarrow\ t_L(i) = O(2^i)$

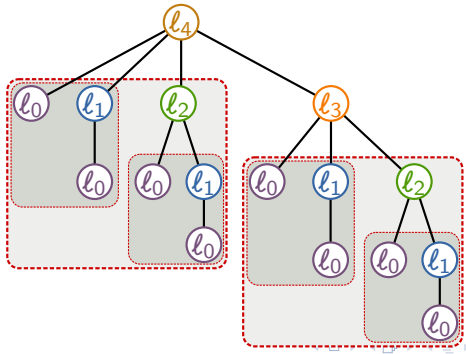


# Mauvaise idée : algorithme récursif !

$$\ell_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 1 + \max\{\ell_j : j < i \text{ tels que } T_{[j]} \leq T_{[i]}\} & \text{pour } 1 \leq i < n \end{cases}$$

**Algorithme :** $\mathsf{L}(T, i)$
**si** $i = 0$ **: renvoyer** $1$
$\max \leftarrow 0$
**pour** $j = 0$ *à* $i - 1$ **:**
  **si** $T_{[j]} \leq T_{[i]}$ **:**
    $L \leftarrow \mathsf{L}(T, j)$
    **si** $L > \max$ **:** $\max \leftarrow L$
**renvoyer** $1 + \max$

- $t_L(i) \leq \sum_{j<i} t_L(j)$
  $\rightsquigarrow\ t_L(i) = O(2^i)$



# Idée moyenne : mémoïsation

- Retenir les valeurs calculées

# Idée moyenne : mémoïsation

- Retenir les valeurs calculées

**Algorithme :** MEMO($T, i, L$)

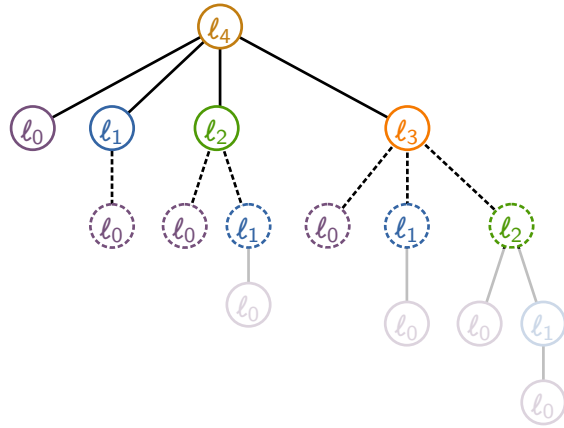
```
si i = 0 : renvoyer 1
max ← 0
pour j = 0 à i − 1 :
    si T[j] ≤ T[i] :
        si L[j] = None :
            L[j] ← MEMO(T, j, L)
        si L[j] > max : max ← L[j]
renvoyer 1 + max
```

# Idée moyenne : mémoïsation

- Retenir les valeurs calculées

**Algorithme :** MEMO($T, i, L$)

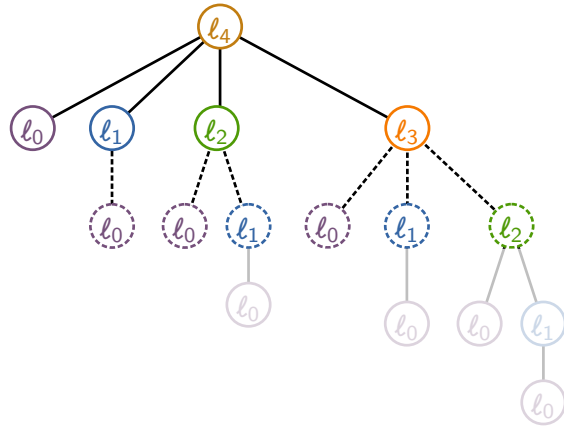
**si** $i = 0$ **: renvoyer** 1
max $\leftarrow 0$
**pour** $j = 0$ *à* $i - 1$ **:**
  **si** $T_{[j]} \leq T_{[i]}$ **:**
    **si** $L_{[j]} = None$ **:**
      $L_{[j]} \leftarrow$ MEMO($T, j, L$)
    **si** $L_{[j]} >$ max **:** max $\leftarrow L_{[j]}$
**renvoyer** $1 +$ max



# Idée moyenne : mémoïsation

- Retenir les valeurs calculées

**Algorithme :** MEMO$(T, i, L)$
**si** $i = 0$ **: renvoyer** 1
max $\leftarrow 0$
**pour** $j = 0$ *à* $i - 1$ **:**
  **si** $T_{[j]} \leq T_{[i]}$ **:**
    **si** $L_{[j]} = None$ **:**
      $L_{[j]} \leftarrow$ MEMO$(T, j, L)$
    **si** $L_{[j]} >$ max **:** max $\leftarrow L_{[j]}$
**renvoyer** $1 +$ max




On calcule $\ell_i$ par valeurs de $i$ croissantes !

# Algorithme PLSSC

**Algorithme :** PLSSC($T$)

$L \leftarrow$ tableau de taille $n$, initialisé à 1
$M \leftarrow L_{[0]}$ // $M = \max_i L_{[i]}$

**pour** $i = 1$ *à* $n - 1$ **:**
    max $\leftarrow 0$ // max $= \max\{L_{[j]} : j < i, T_{[j]} \leq T_{[i]}\}$
    **pour** $j = 0$ *à* $i - 1$ **:**
        **si** $T_{[j]} \leq T_{[i]}$ *et* $L_{[j]} >$ max **:**
            max $\leftarrow L_{[j]}$
    $L_{[i]} \leftarrow 1 +$ max
    **si** $L_{[i]} > M$ **:** $M \leftarrow L_{[i]}$
**renvoyer** $M$

# Correction et complexité

**Théorème**

*L'algorithme* PLSSC *calcule* $\ell(T)$ *en temps* $O(n^2)$.

**Algorithme :** PLSSC($T$)

$L \leftarrow$ tableau de taille $n$, initialisé à 1
$M \leftarrow L_{[0]}$
**pour** $i = 1$ *à* $n-1$ **:**
    max $\leftarrow 0$
    **pour** $j = 0$ *à* $i-1$ **:**
        **si** $T_{[j]} \leq T_{[i]}$ *et* $L_{[j]} >$ max **:**
            max $\leftarrow L_{[j]}$
    $L_{[i]} \leftarrow 1 +$ max
    **si** $L_{[i]} > M$ **:** $M \leftarrow L_{[i]}$
**renvoyer** $M$

# Correction et complexité

**Théorème**
*L'algorithme* PLSSC *calcule* $\ell(T)$ *en temps* $O(n^2)$.

Preuve de correction : utilisation de la formule récursive
Preuve de complexité : double boucle

**Algorithme :** PLSSC($T$)

$L \leftarrow$ tableau de taille $n$, initialisé à 1
$M \leftarrow L_{[0]}$
**pour** $i = 1$ *à* $n-1$ **:**
    max $\leftarrow 0$
    **pour** $j = 0$ *à* $i-1$ **:**
        **si** $T_{[j]} \leq T_{[i]}$ *et* $L_{[j]} >$ max **:**
            max $\leftarrow L_{[j]}$
    $L_{[i]} \leftarrow 1 +$ max
    **si** $L_{[i]} > M$ **:** $M \leftarrow L_{[i]}$
**renvoyer** $M$

# Correction et complexité

**Théorème**
*L'algorithme* PLSSC *calcule* $\ell(T)$ *en temps* $O(n^2)$.

Preuve de correction : utilisation de la formule récursive
Preuve de complexité : double boucle

**Algorithme :** PLSSC($T$)

$L \leftarrow$ tableau de taille $n$, initialisé à 1
$M \leftarrow L_{[0]}$
**pour** $i = 1$ *à* $n-1$ **:**
    max $\leftarrow 0$
    **pour** $j = 0$ *à* $i-1$ **:**
        **si** $T_{[j]} \leq T_{[i]}$ *et* $L_{[j]} >$ max **:**
            max $\leftarrow L_{[j]}$
    $L_{[i]} \leftarrow 1 +$ max
    **si** $L_{[i]} > M$ **:** $M \leftarrow L_{[i]}$
**renvoyer** $M$

**Comment calculer une PLSSC (en plus de sa longueur) ?**

- Retenir les indices des max
- Reconstruire *a posteriori*

# Algorithme PLSSC avec reconstruction

**Algorithme :** PLSSC($T$)

$L \leftarrow$ tableau de taille $n$, initialisé à 1
Prec $\leftarrow$ tableau de taille $n$, initialisé à $-1$
$i_M \leftarrow 0$ `// fin de la PLSSC courante`
**pour** $i = 1$ *à* $n - 1$ **:**
    max $\leftarrow 0$
    **pour** $j = 0$ *à* $i - 1$ **:**
        **si** $T_{[j]} \leq T_{[i]}$ *et* $L_{[j]} >$ max **:**
            max $\leftarrow L_{[j]}$ ; $\text{Prec}_{[i]} \leftarrow j$
    $L_{[i]} \leftarrow 1 +$ max
    **si** $L_{[i]} > L_{[i_M]}$ **:** $i_M \leftarrow i$
**renvoyer** $L_{[i_M]}$, $i_M$ *et* Prec

# Algorithme PLSSC avec reconstruction

**Algorithme :** PLSSC($T$)

$L \leftarrow$ tableau de taille $n$, initialisé à 1
Prec $\leftarrow$ tableau de taille $n$, initialisé à $-1$
$i_M \leftarrow 0$ `// fin de la PLSSC courante`
**pour** $i = 1$ *à* $n - 1$ **:**
    max $\leftarrow 0$
    **pour** $j = 0$ *à* $i - 1$ **:**
        **si** $T_{[j]} \leq T_{[i]}$ *et* $L_{[j]} >$ max **:**
            max $\leftarrow L_{[j]}$ ; $\text{Prec}_{[i]} \leftarrow j$
    $L_{[i]} \leftarrow 1 +$ max
    **si** $L_{[i]} > L_{[i_M]}$ **:** $i_M \leftarrow i$
**renvoyer** $L_{[i_M]}$, $i_M$ *et* Prec

**Algorithme :** PLSSC_REC($T$, $i_M$, Prec)

$S \leftarrow$ tab. de taille $n$, initialisé à 0
$i \leftarrow i_M$
**tant que** $i \neq -1$ **:**
    $S_{[i]} \leftarrow 1$
    $i \leftarrow \text{Prec}_{[i]}$
**renvoyer** $S$

# Algorithme PLSSC avec reconstruction

**Algorithme :** PLSSC($T$)

$L \leftarrow$ tableau de taille $n$, initialisé à 1
Prec $\leftarrow$ tableau de taille $n$, initialisé à $-1$
$i_M \leftarrow 0$ `// fin de la PLSSC courante`
**pour** $i = 1$ *à* $n - 1$ **:**
    max $\leftarrow 0$
    **pour** $j = 0$ *à* $i - 1$ **:**
        **si** $T_{[j]} \leq T_{[i]}$ *et* $L_{[j]} >$ max **:**
            max $\leftarrow L_{[j]}$ ; $\text{Prec}_{[i]} \leftarrow j$
    $L_{[i]} \leftarrow 1 +$ max
    **si** $L_{[i]} > L_{[i_M]}$ **:** $i_M \leftarrow i$
**renvoyer** $L_{[i_M]}$, $i_M$ *et* Prec

**Algorithme :** PLSSC_REC($T$, $i_M$, Prec)

$S \leftarrow$ tab. de taille $n$, initialisé à 0
$i \leftarrow i_M$
**tant que** $i \neq -1$ **:**
    $S_{[i]} \leftarrow 1$
    $i \leftarrow \text{Prec}_{[i]}$
**renvoyer** $S$

## Lemme

*L'algo.* PLSSC_REC *reconstruit une* PLSSC *de* $T$ *en temps* $O(n)$.

# Idée générale

**Programmation dynamique = récursion sans répétition**

# Idée générale

**Programmation dynamique = récursion sans répétition**

## Ingrédients

1. Formule **récursive** pour la valeur optimale
   - en fonction des valeurs de sous-problèmes
   - sous-problèmes possiblement nombreux et non disjoints

# Idée générale

**Programmation dynamique = récursion sans répétition**

## Ingrédients

1. Formule **récursive** pour la valeur optimale
   - en fonction des valeurs de sous-problèmes
   - sous-problèmes possiblement nombreux et non disjoints
2. Algorithme **itératif** pour la valeur optimale
   - en commençant par les plus petits sous-problèmes
   - approche « *bottom-up* »

# Idée générale

**Programmation dynamique = récursion sans répétition**

## Ingrédients

1. Formule **récursive** pour la valeur optimale
   - en fonction des valeurs de sous-problèmes
   - sous-problèmes possiblement nombreux et non disjoints
2. Algorithme **itératif** pour la valeur optimale
   - en commençant par les plus petits sous-problèmes
   - approche « *bottom-up* »
3. Reconstruction de la solution ***a posteriori***
   - ajout d'informations à l'algo. pour la valeur
   - algorithme de reconstruction indépendant

# Idée générale

**Programmation dynamique = récursion sans répétition**

## Ingrédients

1. Formule **récursive** pour la valeur optimale
   - en fonction des valeurs de sous-problèmes
   - sous-problèmes possiblement nombreux et non disjoints
2. Algorithme **itératif** pour la valeur optimale
   - en commençant par les plus petits sous-problèmes
   - approche « *bottom-up* »
3. Reconstruction de la solution ***a posteriori***
   - ajout d'informations à l'algo. pour la valeur
   - algorithme de reconstruction indépendant

« Diviser pour régner »

Sous-problèmes disjoints, approche « *top-down* »

# Ingrédient 1 : Formule récursive

Partie la plus importante (et difficile) !

# Ingrédient 1 : Formule récursive

Partie la plus importante (et difficile) !

## Étapes

1. Spécification **précise** du problème
2. Formule récursive basée sur les solutions d'instances plus petites du **même problème exactement**

# Ingrédient 1 : Formule récursive

Partie la plus importante (et difficile) !

## Étapes

1. Spécification **précise** du problème
2. Formule récursive basée sur les solutions d'instances plus petites du **même problème exactement**

## Plus longue sous-suite croissante

1. Définition de $\ell_i$ en pas seulement $\ell(T)$
2. Expression de $\ell_i$ en fonction des $\ell_j$, $j < i$

# Ingrédient 1 : Formule récursive

Partie la plus importante (et difficile) !

## Étapes

1. Spécification **précise** du problème
2. Formule récursive basée sur les solutions d'instances plus petites du **même problème exactement**

## Plus longue sous-suite croissante

1. Définition de $\ell_i$ en pas seulement $\ell(T)$
2. Expression de $\ell_i$ en fonction des $\ell_j$, $j < i$

En pratique, étape souvent (très) guidée

# Ingrédient 2 : Algorithme itératif

Partie plutôt facile... mais attention quand même !

# Ingrédient 2 : Algorithme itératif

Partie plutôt facile... mais attention quand même !

## Étapes

1. choix d'une structure de données (*très* souvent un tableau)
2. **ordre de calcul** si tableau multi-dimensionnel *cf. ex. suivants*
3. écriture effective de l'algorithme
4. analyse de complexité

# Ingrédient 2 : Algorithme itératif

Partie plutôt facile... mais attention quand même !

## Étapes

1. choix d'une structure de données (*très* souvent un tableau)
2. **ordre de calcul** si tableau multi-dimensionnel *cf. ex. suivants*
3. écriture effective de l'algorithme
4. analyse de complexité

## Plus longue sous-suite croissante

1. Tableau $L$
2. Ordre croissant

# Ingrédient 2 : Algorithme itératif

Partie plutôt facile... mais attention quand même !

## Étapes

1. choix d'une structure de données (*très* souvent un tableau)
2. **ordre de calcul** si tableau multi-dimensionnel *cf. ex. suivants*
3. écriture effective de l'algorithme
4. analyse de complexité

## Plus longue sous-suite croissante

1. Tableau $L$
2. Ordre croissant

En pratique, étape souvent non guidée

# Ingrédient 3 : Reconstruction

Partie de difficulté très variable !

# Ingrédient 3 : Reconstruction

Partie de difficulté très variable !

## Étapes

1. ajout d'informations supplémentaires à l'algo. précédent
2. *redescente* depuis la solution générale vers les instances petites

# Ingrédient 3 : Reconstruction

Partie de difficulté très variable !

## Étapes

1. ajout d'informations supplémentaires à l'algo. précédent
2. *redescente* depuis la solution générale vers les instances petites

## Plus longue sous-suite croissante

1. tableau Prec, indice $i_M$
2. descente depuis $T_{[i_M]}$, en suivant Prec

# Ingrédient 3 : Reconstruction

Partie de difficulté très variable !

## Étapes

1. ajout d'informations supplémentaires à l'algo. précédent
2. *redescente* depuis la solution générale vers les instances petites

## Plus longue sous-suite croissante

1. tableau Prec, indice $i_M$
2. descente depuis $T_{[i_M]}$, en suivant Prec

En pratique, étape pas toujours effectuée

# Problématique de la mémoire

- Dans PLSSC, tableau Prec de taille $n$
  - Complexité *en espace* $O(n)$
  - Si $n = 2^{25}$ : env. 1Mo de mémoire

# Problématique de la mémoire

- Dans PLSSC, tableau Prec de taille $n$
  - Complexité *en espace* $O(n)$
  - Si $n = 2^{25}$ : env. 1Mo de mémoire
- En général : la prog. dyn. est **gourmande en mémoire**
  - parfois le *réactif limitant*
  - souvent : possible de limiter l'espace mémoire si pas de reconstruction
  - plus de détails dans les exemples suivants

# Conclusion sur la programmation dynamique

Comparaison avec les algorithmes gloutons :

- Algo. glouton : cas particulier de programmation dynamique avec un seul sous-problème
- Souvent pas suffisant

# Conclusion sur la programmation dynamique

Comparaison avec les algorithmes gloutons :

- Algo. glouton : cas particulier de programmation dynamique avec un seul sous-problème
- Souvent pas suffisant

Les algorithmes gloutons fonctionnent rarement !

# Conclusion sur la programmation dynamique

Comparaison avec les algorithmes gloutons :

- Algo. glouton : cas particulier de programmation dynamique avec un seul sous-problème
- Souvent pas suffisant

Les algorithmes gloutons fonctionnent rarement !

## D'où vient ce nom ?

- Bellman (1940) : travaux en optimisation mathématique
  - Programmation : planification, ordonnancement
  - Dynamique : « *it's impossible to use the word dynamic in a pejorative sense* »
- Origine du mot peu claire : référence à la programmation linéaire, et/ou problèmes de financements (*cf* Wikipédia)

# Revisitons nos classiques

## Choix de cours **valué**

**Entrée** cours $C_i = (d_i, f_i, e_i)$ [début, fin, crédits ECTS], $0 \leq i < n$

**Sortie** un sous-ensemble de cours compatibles qui maximise le nombre total de crédits ECTS

# Revisitons nos classiques

## Choix de cours **valué**

**Entrée** cours $C_i = (d_i, f_i, e_i)$ [début, fin, crédits ECTS], $0 \leq i < n$

**Sortie** un sous-ensemble de cours compatibles qui maximise le nombre total de crédits ECTS

### Lemme

*L'algorithme* ChoixCoursGlouton *vu pour le choix de cours non valué est arbitrairement mauvais sur ce problème !*

# Revisitons nos classiques

## Choix de cours **valué**

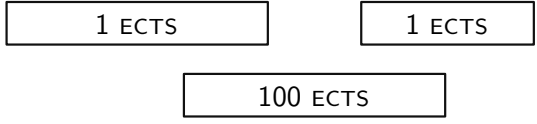
**Entrée** cours $C_i = (d_i, f_i, e_i)$ [début, fin, crédits ECTS], $0 \leq i < n$

**Sortie** un sous-ensemble de cours compatibles qui maximise le nombre total de crédits ECTS

### Lemme

*L'algorithme* ChoixCoursGlouton *vu pour le choix de cours non valué est arbitrairement mauvais sur ce problème !*

### Exemple




- ChoixCoursGlouton renvoie une solution à 2 ECTS
- L'optimal est 50 fois meilleur !

# Formule récursive pour le choix de cours valué

Cours triés par ordre de fin croissante $C_0$, $C_1$, ..., $C_{n-1}$

## Notations

- $\text{pred}(k) = \max\{j : f_j \leq d_k\}$ (avec $\max(\emptyset) = -1$)
- $\text{maxECTS}(k)$ : nb. maximal d'ECTS avec les cours $C_0$, ..., $C_k$

  ($\text{maxECTS}(-1) = 0$)

# Formule récursive pour le choix de cours valué

Cours triés par ordre de fin croissante $C_0$, $C_1$, ..., $C_{n-1}$

## Notations

- $\text{pred}(k) = \max\{j : f_j \leq d_k\}$ (avec $\max(\emptyset) = -1$)
- $\text{maxECTS}(k)$ : nb. maximal d'ECTS avec les cours $C_0$, ..., $C_k$ ($\text{maxECTS}(-1) = 0$)

## Lemme

*maxECTS*$(0) = e_0$ *et pour* $1 \leq k < n$,
*maxECTS*$(k) = \max($*maxECTS*$(k-1), e_k +$ *maxECTS*$($*pred*$(k)))$

# Formule récursive pour le choix de cours valué

Cours triés par ordre de fin croissante $C_0$, $C_1$, …, $C_{n-1}$

## Notations

- $\text{pred}(k) = \max\{j : f_j \leq d_k\}$ (avec $\max(\emptyset) = -1$)
- $\text{maxECTS}(k)$ : nb. maximal d'ECTS avec les cours $C_0$, …, $C_k$ ($\text{maxECTS}(-1) = 0$)

## Lemme

*maxECTS*$(0) = e_0$ *et pour* $1 \leq k < n$,
*maxECTS*$(k) = \max($*maxECTS*$(k-1), e_k +$ *maxECTS*$($*pred*$(k)))$

Preuve : la solution optimale pour $C_0$, …, $C_k$ contient-elle $C_k$ ?

- Si oui, les autres cours choisis sont parmi $C_0$, …, $C_{\text{pred}(k)}$ $\rightsquigarrow$ nb d'ECTS : $e_k + \text{maxECTS}(\text{pred}(k))$
- Si non, nb d'ECTS : $\text{maxECTS}(k-1)$

# Algorithme pour le choix de cours valué

**Algorithme :** MAXECTS($C$)

Trier $C$ par dates de fin croissantes

$P \leftarrow$ tableau de taille $n$, initialisé à $-1$ `// prédécesseurs`

**pour** $k = 1$ *à* $n - 1$ **:**

  **pour** $j = 0$ *à* $k - 1$ **:**

    **si** $f_j \leq d_k$ **:** $P_{[k]} \leftarrow j$

$M \leftarrow$ tableau de taille $n$, initialisé à 0

$M_{[0]} \leftarrow e_0$

**pour** $k = 1$ *à* $n - 1$ **:**

  **si** $P_{[k]} \neq -1$ **:** $M_{[k]} \leftarrow \max(M_{[k-1]}, e_k + M_{[P_{[k]}]})$

  **sinon :** $M_{[k]} \leftarrow \max(M_{[k-1]}, e_k)$

**renvoyer** $M_{[n-1]}$

# Algorithme pour le choix de cours valué

**Algorithme :** MAXECTS($C$)

Trier $C$ par dates de fin croissantes
$P \leftarrow$ tableau de taille $n$, initialisé à $-1$ `// prédécesseurs`
**pour** $k = 1$ *à* $n - 1$ **:**
  **pour** $j = 0$ *à* $k - 1$ **:**
    **si** $f_j \leq d_k$ **:** $P_{[k]} \leftarrow j$

$M \leftarrow$ tableau de taille $n$, initialisé à 0
$M_{[0]} \leftarrow e_0$
**pour** $k = 1$ *à* $n - 1$ **:**
  **si** $P_{[k]} \neq -1$ **:** $M_{[k]} \leftarrow \max(M_{[k-1]}, e_k + M_{[P_{[k]}]})$
  **sinon :** $M_{[k]} \leftarrow \max(M_{[k-1]}, e_k)$
**renvoyer** $M_{[n-1]}$

Complexité : $O(n^2)$ (calcul de $P$, calcul de $M$ en $O(n)$)

# Et pour le sac-à-dos ?

## Sac-à-dos (non fractionnaire)

**Entrée** un ensemble d'objets, ayant une taille $t_i$ et une valeur $v_i$
une taille $T$ de sac-à-dos

**Sortie** un sous-ensemble d'objets qui rentre dans le sac, et maximise la valeur totale

# Et pour le sac-à-dos ?

## Sac-à-dos (non fractionnaire)

**Entrée** un ensemble d'objets, ayant une taille $t_i$ et une valeur $v_i$
une taille $T$ de sac-à-dos

**Sortie** un sous-ensemble d'objets qui rentre dans le sac, et maximise la valeur totale

### Lemme

*L'algorithme* SàdFracGlouton *n'est pas optimal pour le sac-à-dos non fractionnaire.*

# Et pour le sac-à-dos ?

## Sac-à-dos (non fractionnaire)

**Entrée** un ensemble d'objets, ayant une taille $t_i$ et une valeur $v_i$
une taille $T$ de sac-à-dos

**Sortie** un sous-ensemble d'objets qui rentre dans le sac, et maximise la valeur totale

### Lemme

*L'algorithme* SàdFracGlouton *n'est pas optimal pour le sac-à-dos non fractionnaire.*

- Exemples vus en cours et TD
- Algos de programmation dynamique optimaux $\rightsquigarrow$ *cf.* TD

# Corrigeons les erreurs

AGORRYTNES

# Corrigeons les erreurs

# Corrigeons les erreurs

# Corrigeons les erreurs


À quelle **distance** se trouve-t-on du mot correct ?

# Corrigeons les erreurs


À quelle **distance** se trouve-t-on du mot correct ?

## Distance 5

| A | _ | G | O | R | R | Y | T | _ | N | E | S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | L | G | O | _ | R | I | T | H | M | E | S |

# La distance d'édition

## Définition

La **distance d'édition** (ou de **Levenshtein**, ou d'**Ulam**) entre deux mots $A$ et $B$ est le **nombre minimal de désaccords** dans un **alignement** de $A$ et $B$

| A | _ | G | O | R | R | Y | T | _ | N | E | S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | L | G | O | _ | R | I | T | H | M | E | S |

# La distance d'édition

## Définition

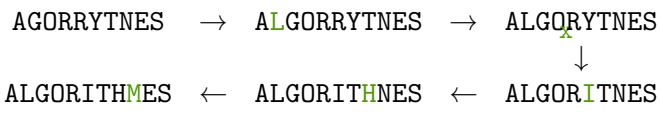
La **distance d'édition** (ou de **Levenshtein**, ou d'**Ulam**) entre deux mots $A$ et $B$ est le **nombre minimal de désaccords** dans un **alignement** de $A$ et $B$

| A | _ | G | O | R | R | Y | T | _ | N | E | S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | L | G | O | _ | R | I | T | H | M | E | S |

## Définition équivalente

Longueur de la **plus courte suite de transformations** pour passer de $A$ à $B$, avec les transformations suivantes :

- **insertion** d'une nouvelle lettre
- **suppression** d'une lettre
- **remplacement** d'une lettre par une autre



# Définition du problème

Entrée Deux mots $A$ et $B$ sur un alphabet
(mot : chaîne de caractère ou tableau de caractères ou ...)

Sortie 1 La distance d'édition entre $A$ et $B$

Sortie 2 Un alignement optimal de $A$ et $B$

# Définition du problème

**Entrée** Deux mots $A$ et $B$ sur un alphabet
(mot : chaîne de caractère ou tableau de caractères ou ...)

**Sortie 1** La distance d'édition entre $A$ et $B$

**Sortie 2** Un alignement optimal de $A$ et $B$

## Utilité

- Orthographe :
  - Correcteur orthographique
  - Reconnaissance optique de caractères
- Linguistique (proximité de langues)
- Bioinformatique :
  - similarité de séquences ADN
  - similarité d'arbres phylogénétiques
- ...

# Formalisation

- $A_{[0,i[} = A_{[0]}A_{[1]} \cdots A_{[i-1]}$ et $B_{[0,j[} = B_{[0]}B_{[1]} \cdots B_{[j-1]}$
- $\text{edit}(i,j)$ : distance entre $A_{[0,i[}$ et $B_{[0,j[}$
  - $\text{edit}(i,0) = i$
  - $\text{edit}(0,j) = j$

# Formalisation

- $A_{[0,i[} = A_{[0]}A_{[1]} \cdots A_{[i-1]}$ et $B_{[0,j[} = B_{[0]}B_{[1]} \cdots B_{[j-1]}$
- $\text{edit}(i, j)$ : distance entre $A_{[0,i[}$ et $B_{[0,j[}$
  - $\text{edit}(i, 0) = i$
  - $\text{edit}(0, j) = j$

- si $|A| = m$ et $|B| = n$, on cherche $\text{edit}(m, n)$

# Formalisation

- $A_{[0,i[} = A_{[0]}A_{[1]} \cdots A_{[i-1]}$ et $B_{[0,j[} = B_{[0]}B_{[1]} \cdots B_{[j-1]}$
- $\text{edit}(i,j)$ : distance entre $A_{[0,i[}$ et $B_{[0,j[}$
  - $\text{edit}(i,0) = i$
  - $\text{edit}(0,j) = j$

- si $|A| = m$ et $|B| = n$, on cherche $\text{edit}(m,n)$

## Trois alignements possibles

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_{[0,i-1[}$ | $A_{[i-1]}$ | | $A_{[0,i[}$ | - | | $A_{[0,i-1[}$ | $A_{[i-1]}$ |
| $B_{[0,j[}$ | - | | $B_{[0,j-1[}$ | $B_{[j-1]}$ | | $B_{[0,j-1[}$ | $B_{[j-1]}$ |

# Formalisation

- $A_{[0,i[} = A_{[0]}A_{[1]} \cdots A_{[i-1]}$ et $B_{[0,j[} = B_{[0]}B_{[1]} \cdots B_{[j-1]}$
- edit$(i, j)$ : distance entre $A_{[0,i[}$ et $B_{[0,j[}$
  - edit$(i, 0) = i$
  - edit$(0, j) = j$

- si $|A| = m$ et $|B| = n$, on cherche edit$(m, n)$

## Trois alignements possibles

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_{[0,i-1[}$ | $A_{[i-1]}$ | | $A_{[0,i[}$ | - | | $A_{[0,i-1[}$ | $A_{[i-1]}$ |
| $B_{[0,j[}$ | - | | $B_{[0,j-1[}$ | $B_{[j-1]}$ | | $B_{[0,j-1[}$ | $B_{[j-1]}$ |

## Alignements AGORR et ALGOR

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| AGORR | _ | | AGOR | R | | AGOR | R | |
| ALGO | R | | ALGOR | _ | | ALGO | R | |
| 3 | 1 | | 1 | 1 | | 2 | 0 | $\rightarrow$ 2 |

# Formule récursive

## Lemme

$$\text{edit}(i,j) = \min \begin{cases} \text{edit}(i-1,j)+1 \\ \text{edit}(i,j-1)+1 \\ \text{edit}(i-1,j-1)+\epsilon_{ij} \end{cases}$$

*où* $\epsilon_{ij} = 1$ *si* $A_{[i-1]} \neq B_{[j-1]}$, $0$ *sinon*

# Formule récursive

## Lemme

$$\text{edit}(i,j) = \min \begin{cases} \text{edit}(i-1,j)+1 \\ \text{edit}(i,j-1)+1 \\ \text{edit}(i-1,j-1)+\epsilon_{ij} \end{cases}$$

*où* $\epsilon_{ij} = 1$ *si* $A_{[i-1]} \neq B_{[j-1]}$, $0$ *sinon*

Preuve :

# Formule récursive

## Lemme

$$\text{edit}(i,j) = \min \begin{cases} \text{edit}(i-1,j)+1 \\ \text{edit}(i,j-1)+1 \\ \text{edit}(i-1,j-1)+\epsilon_{ij} \end{cases}$$

*où* $\epsilon_{ij} = 1$ *si* $A_{[i-1]} \neq B_{[j-1]}$, $0$ *sinon*

## Preuve :

- $\text{edit}(i,j) \leq \text{edit}(i-1,j)+1$ :

| $A_{[0,i-1[}$ | $A_{[i-1]}$ |
|---|---|
| $B_{[0,j[}$ | - |

# Formule récursive

## Lemme

$$\text{edit}(i,j) = \min \begin{cases} \text{edit}(i-1,j)+1 \\ \text{edit}(i,j-1)+1 \\ \text{edit}(i-1,j-1)+\epsilon_{ij} \end{cases}$$

*où* $\epsilon_{ij} = 1$ *si* $A_{[i-1]} \neq B_{[j-1]}$, $0$ *sinon*

## Preuve :

- $\text{edit}(i,j) \leq \text{edit}(i-1,j)+1$ :

| | |
|---|---|
| $A_{[0,i-1[}$ | $A_{[i-1]}$ |
| $B_{[0,j[}$ | - |

- $\text{edit}(i,j) \leq \text{edit}(i,j-1)+1$ :

| | |
|---|---|
| $A_{[0,i[}$ | - |
| $B_{[0,j-1[}$ | $B_{[j-1]}$ |

# Formule récursive

## Lemme

$$\text{edit}(i,j) = \min \begin{cases} \text{edit}(i-1,j)+1 \\ \text{edit}(i,j-1)+1 \\ \text{edit}(i-1,j-1)+\epsilon_{ij} \end{cases}$$

*où* $\epsilon_{ij} = 1$ *si* $A_{[i-1]} \neq B_{[j-1]}$, $0$ *sinon*

## Preuve :

- $\text{edit}(i,j) \leq \text{edit}(i-1,j)+1$ : $\begin{array}{|c|} \hline A_{[0,i-1[} \\ \hline B_{[0,j[} \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{c} A_{[i-1]} \\ - \end{array}$
- $\text{edit}(i,j) \leq \text{edit}(i,j-1)+1$ : $\begin{array}{|c|} \hline A_{[0,i[} \\ \hline B_{[0,j-1[} \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{c} - \\ B_{[j-1]} \end{array}$
- $\text{edit}(i,j) \leq \text{edit}(i-1,j-1)+\epsilon_{ij}$ : $\begin{array}{|c|} \hline A_{[0,i-1[} \\ \hline B_{[0,j-1[} \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{c} A_{[i-1]} \\ B_{[j-1]} \end{array}$

# Formule récursive

## Lemme

$$\text{edit}(i,j) = \min \begin{cases} \text{edit}(i-1,j)+1 \\ \text{edit}(i,j-1)+1 \\ \text{edit}(i-1,j-1)+\epsilon_{ij} \end{cases}$$

*où* $\epsilon_{ij} = 1$ *si* $A_{[i-1]} \neq B_{[j-1]}$, $0$ *sinon*

## Preuve :

- $\text{edit}(i,j) \leq \text{edit}(i-1,j)+1$ : $\begin{array}{|c|} \hline A_{[0,i-1[} \\ \hline B_{[0,j[} \\ \hline \end{array}$ $A_{[i-1]}$ / -
- $\text{edit}(i,j) \leq \text{edit}(i,j-1)+1$ : $\begin{array}{|c|} \hline A_{[0,i[} \\ \hline B_{[0,j-1[} \\ \hline \end{array}$ - / $B_{[j-1]}$
- $\text{edit}(i,j) \leq \text{edit}(i-1,j-1)+\epsilon_{ij}$ : $\begin{array}{|c|} \hline A_{[0,i-1[} \\ \hline B_{[0,j-1[} \\ \hline \end{array}$ $A_{[i-1]}$ / $B_{[j-1]}$

$$\implies \text{edit}(i,j) \leq \min\{\dots\}$$

# Formule récursive

## Lemme

$$\text{edit}(i,j) = \min \begin{cases} \text{edit}(i-1,j)+1 \\ \text{edit}(i,j-1)+1 \\ \text{edit}(i-1,j-1)+\epsilon_{ij} \end{cases}$$

*où* $\epsilon_{ij} = 1$ *si* $A_{[i-1]} \neq B_{[j-1]}$, 0 *sinon*

Preuve Si $\text{edit}(i,j) = d$,

# Formule récursive

## Lemme

$$\text{edit}(i,j) = \min \begin{cases} \text{edit}(i-1,j)+1 \\ \text{edit}(i,j-1)+1 \\ \text{edit}(i-1,j-1)+\epsilon_{ij} \end{cases}$$

*où* $\epsilon_{ij} = 1$ *si* $A_{[i-1]} \neq B_{[j-1]}$, 0 *sinon*

Preuve Si $\text{edit}(i,j) = d$,

- $A_{[i-1]} = B_{[j-1]} \implies \text{edit}(i-1,j-1) = d$

# Formule récursive

## Lemme

$$\text{edit}(i,j) = \min \begin{cases} \text{edit}(i-1,j)+1 \\ \text{edit}(i,j-1)+1 \\ \text{edit}(i-1,j-1)+\epsilon_{ij} \end{cases}$$

*où* $\epsilon_{ij} = 1$ *si* $A_{[i-1]} \neq B_{[j-1]}$, 0 *sinon*

Preuve Si $\text{edit}(i,j) = d$,

- $A_{[i-1]} = B_{[j-1]} \implies \text{edit}(i-1,j-1) = d$
- $A_{[i-1]} \neq B_{[j-1]}$ :
  - $\text{edit}(i-1,j-1) \geq d-1$
  - $\text{edit}(i,j-1) \geq d-1$
  - $\text{edit}(i-1,j) \geq d-1$

# Formule récursive

## Lemme

$$\text{edit}(i,j) = \min \begin{cases} \text{edit}(i-1,j)+1 \\ \text{edit}(i,j-1)+1 \\ \text{edit}(i-1,j-1)+\epsilon_{ij} \end{cases}$$

*où* $\epsilon_{ij} = 1$ *si* $A_{[i-1]} \neq B_{[j-1]}$, 0 *sinon*

Preuve Si $\text{edit}(i,j) = d$,

- $A_{[i-1]} = B_{[j-1]} \implies \text{edit}(i-1,j-1) = d$
- $A_{[i-1]} \neq B_{[j-1]}$ :
  - $\text{edit}(i-1,j-1) \geq d-1$
  - $\text{edit}(i,j-1) \geq d-1$
  - $\text{edit}(i-1,j) \geq d-1$

$$\implies \text{edit}(i,j) \geq \min\{\dots\}$$

# Algorithme : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | | | | | | | | | |
| L | 2 | | | | | | | | | |
| G | 3 | | | | | | | | | |
| O | 4 | | | | | | | | | |
| R | 5 | | | | | | | | | |
| I | 6 | | | | | | | | | |
| T | 7 | | | | | | | | | |
| H | 8 | | | | | | | | | |
| M | 9 | | | | | | | | | |
| E | 10 | | | | | | | | | |

# Algorithme : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | | | | | | | | |
| L | 2 | | | | | | | | | |
| G | 3 | | | | | | | | | |
| O | 4 | | | | | | | | | |
| R | 5 | | | | | | | | | |
| I | 6 | | | | | | | | | |
| T | 7 | | | | | | | | | |
| H | 8 | | | | | | | | | |
| M | 9 | | | | | | | | | |
| E | 10 | | | | | | | | | |

# Algorithme : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | | | | | | | | | |
| G | 3 | | | | | | | | | |
| O | 4 | | | | | | | | | |
| R | 5 | | | | | | | | | |
| I | 6 | | | | | | | | | |
| T | 7 | | | | | | | | | |
| H | 8 | | | | | | | | | |
| M | 9 | | | | | | | | | |
| E | 10 | | | | | | | | | |

# Algorithme : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | | | | | | | | |
| G | 3 | | | | | | | | | |
| O | 4 | | | | | | | | | |
| R | 5 | | | | | | | | | |
| I | 6 | | | | | | | | | |
| T | 7 | | | | | | | | | |
| H | 8 | | | | | | | | | |
| M | 9 | | | | | | | | | |
| E | 10 | | | | | | | | | |

# Algorithme : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | | | | | | | |
| G | 3 | | | | | | | | | |
| O | 4 | | | | | | | | | |
| R | 5 | | | | | | | | | |
| I | 6 | | | | | | | | | |
| T | 7 | | | | | | | | | |
| H | 8 | | | | | | | | | |
| M | 9 | | | | | | | | | |
| E | 10 | | | | | | | | | |

# Algorithme : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | | | | | | | | | |
| O | 4 | | | | | | | | | |
| R | 5 | | | | | | | | | |
| I | 6 | | | | | | | | | |
| T | 7 | | | | | | | | | |
| H | 8 | | | | | | | | | |
| M | 9 | | | | | | | | | |
| E | 10 | | | | | | | | | |

# Algorithme : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | 2 | | | | | | | | |
| O | 4 | | | | | | | | | |
| R | 5 | | | | | | | | | |
| I | 6 | | | | | | | | | |
| T | 7 | | | | | | | | | |
| H | 8 | | | | | | | | | |
| M | 9 | | | | | | | | | |
| E | 10 | | | | | | | | | |

# Algorithme : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | 2 | 1 | | | | | | | |
| O | 4 | | | | | | | | | |
| R | 5 | | | | | | | | | |
| I | 6 | | | | | | | | | |
| T | 7 | | | | | | | | | |
| H | 8 | | | | | | | | | |
| M | 9 | | | | | | | | | |
| E | 10 | | | | | | | | | |

# Algorithme : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| O | 4 | | | | | | | | | |
| R | 5 | | | | | | | | | |
| I | 6 | | | | | | | | | |
| T | 7 | | | | | | | | | |
| H | 8 | | | | | | | | | |
| M | 9 | | | | | | | | | |
| E | 10 | | | | | | | | | |

# Algorithme : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| O | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| R | 5 | | | | | | | | | |
| I | 6 | | | | | | | | | |
| T | 7 | | | | | | | | | |
| H | 8 | | | | | | | | | |
| M | 9 | | | | | | | | | |
| E | 10 | | | | | | | | | |

# Algorithme : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| O | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| R | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| I | 6 | | | | | | | | | |
| T | 7 | | | | | | | | | |
| H | 8 | | | | | | | | | |
| M | 9 | | | | | | | | | |
| E | 10 | | | | | | | | | |

# Algorithme : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| O | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| R | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| I | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| T | 7 | | | | | | | | | |
| H | 8 | | | | | | | | | |
| M | 9 | | | | | | | | | |
| E | 10 | | | | | | | | | |

# Algorithme : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| O | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| R | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| I | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| T | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| H | 8 | | | | | | | | | |
| M | 9 | | | | | | | | | |
| E | 10 | | | | | | | | | |

# Algorithme : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| O | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| R | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| I | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| T | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| H | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| M | 9 | | | | | | | | | |
| E | 10 | | | | | | | | | |

# Algorithme : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| O | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| R | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| I | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| T | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| H | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| M | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| E | 10 | | | | | | | | | |

# Algorithme : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| O | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| R | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| I | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| T | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| H | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| M | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| E | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 |

# L'algorithme

**Algorithme :** EDITION$(A, B)$

$(m, n) \leftarrow$ tailles de $A$ et $B$
$E \leftarrow$ tableau de dimensions $m+1$ par $n+1$
**pour** $i = 0$ *à* $m$ **:** $E_{[i,0]} \leftarrow i$ // cas de
**pour** $j = 0$ *à* $n$ **:** $E_{[0,j]} \leftarrow j$ // base
**pour** $i = 1$ *à* $m$ **:**
    **pour** $j = 1$ *à* $n$ **:**
        $\epsilon \leftarrow 0$
        **si** $A_{[i-1]} \neq B_{[j-1]}$ **:** $\epsilon \leftarrow 1$
        $E_{[i,j]} \leftarrow \min(E_{[i-1,j]}+1, E_{[i,j-1]}+1, E_{[i-1,j-1]}+\epsilon)$
**renvoyer** $E_{[m,n]}$

# L'algorithme

**Algorithme :** EDITION$(A, B)$

$(m, n) \leftarrow$ tailles de $A$ et $B$
$E \leftarrow$ tableau de dimensions $m+1$ par $n+1$
**pour** $i = 0$ *à* $m$ **:** $E_{[i,0]} \leftarrow i$ // cas de
**pour** $j = 0$ *à* $n$ **:** $E_{[0,j]} \leftarrow j$ // base
**pour** $i = 1$ *à* $m$ **:**
    **pour** $j = 1$ *à* $n$ **:**
        $\epsilon \leftarrow 0$
        **si** $A_{[i-1]} \neq B_{[j-1]}$ **:** $\epsilon \leftarrow 1$
        $E_{[i,j]} \leftarrow \min(E_{[i-1,j]}+1, E_{[i,j-1]}+1, E_{[i-1,j-1]}+\epsilon)$
**renvoyer** $E_{[m,n]}$

**Lemme**
*L'algorithme* EDITION *renvoie la distance entre $A$ et $B$ en temps $O(mn)$, en utilisant un espace $O(mn)$.*

# Version efficace en mémoire

Pour remplir la ligne $i$, on n'a besoin que des lignes $i$ et $i-1$ !

# Version efficace en mémoire

Pour remplir la ligne $i$, on n'a besoin que des lignes $i$ et $i-1$ !

**Algorithme :** EDITIONMINMEMOIRE$(A, B)$

$(m, n) \leftarrow$ tailles de $A$ et $B$ // Hyp. : $m \geq n$

$P \leftarrow$ tableau de dimension $n+1$ // Ligne précédente

$C \leftarrow$ tableau de dimension $n+1$ // Ligne courante

**pour** $j = 0$ *à* $n$ **:** $P_{[j]} \leftarrow j$ // cas de base

**pour** $i = 1$ *à* $m$ **:**

  $C_{[0]} \leftarrow i$ // cas de base

  **pour** $j = 1$ *à* $n$ **:**

    $\epsilon \leftarrow 0$ **si** $A_{[i-1]} = B_{[j-1]}$, $1$ **sinon**

    $C_{[j]} \leftarrow \min(P_{[j]} + 1, C_{[j-1]} + 1, P_{[j-1]} + \epsilon)$

  **pour** $j = 0$ *à* $n$ **:** $P_{[j]} \leftarrow C_{[j]}$

**renvoyer** $C_{[n]}$

# Version efficace en mémoire

Pour remplir la ligne $i$, on n'a besoin que des lignes $i$ et $i-1$ !

**Algorithme :** EditionMinMemoire$(A, B)$

$(m, n) \leftarrow$ tailles de $A$ et $B$ // Hyp. : $m \geq n$

$P \leftarrow$ tableau de dimension $n+1$ // Ligne précédente

$C \leftarrow$ tableau de dimension $n+1$ // Ligne courante

**pour** $j = 0$ *à* $n$ **:** $P_{[j]} \leftarrow j$ // cas de base

**pour** $i = 1$ *à* $m$ **:**

  $C_{[0]} \leftarrow i$ // cas de base

  **pour** $j = 1$ *à* $n$ **:**

    $\epsilon \leftarrow 0$ **si** $A_{[i-1]} = B_{[j-1]}$, $1$ **sinon**

    $C_{[j]} \leftarrow \min(P_{[j]} + 1, C_{[j-1]} + 1, P_{[j-1]} + \epsilon)$

  **pour** $j = 0$ *à* $n$ **:** $P_{[j]} \leftarrow C_{[j]}$

**renvoyer** $C_{[n]}$

**Lemme**

EditionMinMemoire *calcule la distance entre $A$ et $B$ en temps $O(mn)$ et* ***espace $O(n)$***.

# Reconstruction : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| O | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| R | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| I | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| T | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| H | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| M | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| E | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 |

# Reconstruction : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| O | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| R | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| I | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| T | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| H | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| M | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| E | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 |

# Reconstruction : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| O | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| R | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| I | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| T | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| H | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| M | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| E | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 |

# Reconstruction : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| O | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| R | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| I | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| T | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| H | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| M | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| E | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 |

# Reconstruction : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| O | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| R | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| I | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| T | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| H | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| M | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| E | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 |

# Reconstruction : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| O | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| R | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| I | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| T | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| H | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| M | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| E | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 |

# Reconstruction : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| O | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| R | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| I | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| T | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| H | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| M | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| E | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 |

# Reconstruction : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| O | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| R | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| I | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| T | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| H | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| M | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| E | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 |

# Reconstruction : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| O | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| R | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| I | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| T | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| H | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| M | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| E | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 |

# Reconstruction : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| O | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| R | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| I | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| T | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| H | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| M | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| E | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 |

# Reconstruction : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| O | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| R | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| I | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| T | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| H | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| M | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| E | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 |

# Reconstruction : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| O | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| R | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| I | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| T | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| H | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| M | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| E | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 |

# Reconstruction : exemple

| | | A | G | O | R | R | Y | T | N | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| A | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| L | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| O | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| R | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| I | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| T | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| H | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| M | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| E | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | _ | G | O | R | R | Y | T | _ | N | E |
| A | L | G | O | R | _ | I | T | H | M | E |

# Algorithme de reconstruction

**Algorithme :** ALIGNEMENT($A$, $B$, $E$)

$(i, j) \leftarrow (m, n)$ // tailles de $A$ et $B$

**tant que** $i > 0$ *et* $j > 0$ **:**

- **si** $E_{[i,j]} = E_{[i-1,j-1]}$ *et* $A_{[i-1]} = B_{[j-1]}$ **:** // $A_{[i-1]}/B_{[j-1]}$
  - $(i, j) \leftarrow (i - 1, j - 1)$
- **sinon si** $E_{[i,j]} = E_{[i-1,j-1]} + 1$ **:** // $A_{[i-1]}/B_{[j-1]}$
  - $(i, j) \leftarrow (i - 1, j - 1)$
- **sinon si** $E_{[i,j]} = E_{[i-1,j]} + 1$ **:** // $A_{[i-1]}/\_$
  - Insérer « _ » en $j^{\text{ème}}$ position dans $B$ ; $i \leftarrow i - 1$
- **sinon si** $E_{[i,j]} = E_{[i,j-1]} + 1$ **:** // $\_/B_{[j-1]}$
  - Insérer « _ » en $i^{\text{ème}}$ position dans $A$ ; $j \leftarrow j - 1$

Insérer $j$ symboles « _ » en tête de $A$ // l'un ou

Insérer $i$ symboles « _ » en tête de $B$ // l'autre

**renvoyer** $A$ *et* $B$

# Correction et complexité

**Lemme**

*L'algorithme* ALIGNEMENT *aligne les mots $A$ et $B$ de manière optimale, en temps $O(m+n)$.*

**Algorithme :** ALIGNEMENT$(A, B, E)$

$(i, j) \leftarrow (m, n)$
**tant que** $i > 0$ *et* $j > 0$ **:**
  **si** $E_{[i,j]} = E_{[i-1,j-1]}$ *et* $A_{[i-1]} = B_{[j-1]}$ **:**
    $(i, j) \leftarrow (i-1, j-1)$
  **sinon si** $E_{[i,j]} = E_{[i-1,j-1]} + 1$ **:**
    $(i, j) \leftarrow (i-1, j-1)$
  **sinon si** $E_{[i,j]} = E_{[i-1,j]} + 1$ **:**
    Insérer $\ll \_ \gg$ en $j^{\text{ème}}$ position dans $B$ ; $i \leftarrow i-1$
  **sinon si** $E_{[i,j]} = E_{[i,j-1]} + 1$ **:**
    Insérer $\ll \_ \gg$ en $i^{\text{ème}}$ position dans $A$ ; $j \leftarrow j-1$
Insérer $j$ symboles $\ll \_ \gg$ en tête de $A$
Insérer $i$ symboles $\ll \_ \gg$ en tête de $B$
**renvoyer** $A$ *et* $B$

# Correction et complexité

**Lemme**

*L'algorithme* ALIGNEMENT *aligne les mots $A$ et $B$ de manière optimale, en temps $O(m+n)$.*

**Algorithme :** ALIGNEMENT$(A, B, E)$

$(i, j) \leftarrow (m, n)$
**tant que** $i > 0$ *et* $j > 0$ **:**
  **si** $E_{[i,j]} = E_{[i-1,j-1]}$ *et* $A_{[i-1]} = B_{[j-1]}$ **:**
    $(i, j) \leftarrow (i-1, j-1)$
  **sinon si** $E_{[i,j]} = E_{[i-1,j-1]} + 1$ **:**
    $(i, j) \leftarrow (i-1, j-1)$
  **sinon si** $E_{[i,j]} = E_{[i-1,j]} + 1$ **:**
    Insérer $\ll \_ \gg$ en $j^{\text{ème}}$ position dans $B$ ; $i \leftarrow i-1$
  **sinon si** $E_{[i,j]} = E_{[i,j-1]} + 1$ **:**
    Insérer $\ll \_ \gg$ en $i^{\text{ème}}$ position dans $A$ ; $j \leftarrow j-1$
Insérer $j$ symboles $\ll \_ \gg$ en tête de $A$
Insérer $i$ symboles $\ll \_ \gg$ en tête de $B$
**renvoyer** $A$ *et* $B$

Preuve de complexité : à chaque tour, $i + j$ diminue de $\geq 1$

# Correction et complexité

**Lemme**

*L'algorithme* ALIGNEMENT *aligne les mots $A$ et $B$ de manière optimale, en temps $O(m+n)$.*

**Algorithme :** ALIGNEMENT$(A, B, E)$

$(i, j) \leftarrow (m, n)$
**tant que** $i > 0$ *et* $j > 0$ :
  **si** $E_{[i,j]} = E_{[i-1,j-1]}$ *et* $A_{[i-1]} = B_{[j-1]}$ :
    $(i, j) \leftarrow (i-1, j-1)$
  **sinon si** $E_{[i,j]} = E_{[i-1,j-1]} + 1$ :
    $(i, j) \leftarrow (i-1, j-1)$
  **sinon si** $E_{[i,j]} = E_{[i-1,j]} + 1$ :
    Insérer $\ll \_ \gg$ en $j^{\text{ème}}$ position dans $B$ ; $i \leftarrow i-1$
  **sinon si** $E_{[i,j]} = E_{[i,j-1]} + 1$ :
    Insérer $\ll \_ \gg$ en $i^{\text{ème}}$ position dans $A$ ; $j \leftarrow j-1$
Insérer $j$ symboles $\ll \_ \gg$ en tête de $A$
Insérer $i$ symboles $\ll \_ \gg$ en tête de $B$
**renvoyer** $A$ *et* $B$

Preuve de complexité : à chaque tour, $i + j$ diminue de $\geq 1$
Preuve de correction : $\ll$ en entrant dans la boucle, $A_{[i,m[}$ et $B_{[j,n[}$ sont *alignés* de manière optimale $\gg$

# Conclusion

## Théorème

*La distance d'édition entre deux mots $A$ et $B$ de tailles respectives $m$ et $n$ peut être calculée en temps et espace $O(mn)$. Leur alignement peut être calculé en temps $O(m+n)$ supplémentaire.*

# Conclusion

## Théorème

*La distance d'édition entre deux mots $A$ et $B$ de tailles respectives $m$ et $n$ peut être calculée en temps et espace $O(mn)$. Leur alignement peut être calculé en temps $O(m+n)$ supplémentaire.*

Peut-on faire mieux qu'un temps $O(mn)$ ?

# Conclusion

## Théorème

*La distance d'édition entre deux mots $A$ et $B$ de tailles respectives $m$ et $n$ peut être calculée en temps et espace $O(mn)$. Leur alignement peut être calculé en temps $O(m+n)$ supplémentaire.*

Peut-on faire mieux qu'un temps $O(mn)$ ?

$\rightsquigarrow$ un peu...

# Conclusion

## Théorème

*La distance d'édition entre deux mots $A$ et $B$ de tailles respectives $m$ et $n$ peut être calculée en temps et espace $O(mn)$. Leur alignement peut être calculé en temps $O(m+n)$ supplémentaire.*

Peut-on faire mieux qu'un temps $O(mn)$ ?

$\rightsquigarrow$ un peu...

Peut-on faire beaucoup mieux que $O(mn)$ ?

# Conclusion

## Théorème

*La distance d'édition entre deux mots $A$ et $B$ de tailles respectives $m$ et $n$ peut être calculée en temps et espace $O(mn)$. Leur alignement peut être calculé en temps $O(m+n)$ supplémentaire.*

Peut-on faire mieux qu'un temps $O(mn)$ ?

$\rightsquigarrow$ un peu...

Peut-on faire beaucoup mieux que $O(mn)$ ?

$\rightsquigarrow$ sans doute pas (si on veut le résultat exact)

# Conclusion

**Théorème**

*La distance d'édition entre deux mots $A$ et $B$ de tailles respectives $m$ et $n$ peut être calculée en temps et espace $O(mn)$. Leur alignement peut être calculé en temps $O(m+n)$ supplémentaire.*

Peut-on faire mieux qu'un temps $O(mn)$ ?

$\rightsquigarrow$ un peu...

Peut-on faire beaucoup mieux que $O(mn)$ ?

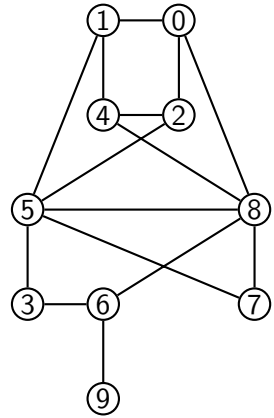
$\rightsquigarrow$ sans doute pas (si on veut le résultat exact)

- Problème très important en pratique... et en théorie !
- Beaucoup de résultats très récents (2020 !) sur le sujet

# Rappel : parcours en largeur d'un graphe

**Algorithme :** PARCOURSLARGEUR($G, s$)

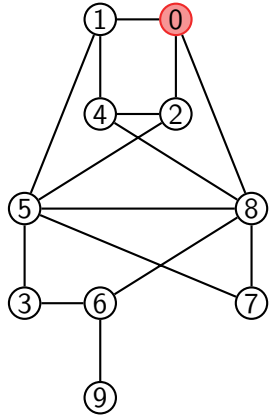
$F \leftarrow$ file vide
Ajouter $s$ à $F$ et marquer $s$
**tant que** $F$ *est non vide* **:**
    $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$
    Afficher $u$
    **pour** *tout voisin non marqué* $v$ *de* $u$ **:**
        Ajouter $v$ à $F$ et marquer $v$



# Rappel : parcours en largeur d'un graphe

**Algorithme :** ParcoursLargeur($G, s$)

$F \leftarrow$ file vide
Ajouter $s$ à $F$ et marquer $s$
**tant que** $F$ *est non vide* **:**
    $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$
    Afficher $u$
    **pour** *tout voisin non marqué* $v$ *de* $u$ **:**
        Ajouter $v$ à $F$ et marquer $v$

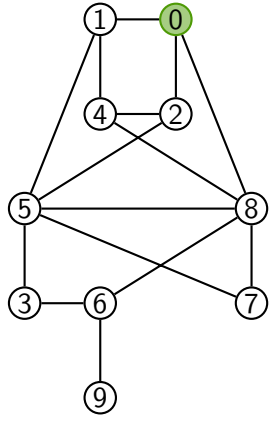



- File : 0
- Affichage :

# Rappel : parcours en largeur d'un graphe

**Algorithme :** ParcoursLargeur($G, s$)

$F \leftarrow$ file vide
Ajouter $s$ à $F$ et marquer $s$
**tant que** $F$ *est non vide* **:**
    $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$
    Afficher $u$
    **pour** *tout voisin non marqué* $v$ *de* $u$ **:**
        Ajouter $v$ à $F$ et marquer $v$

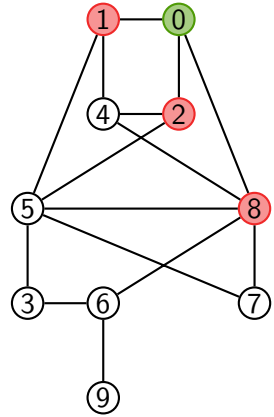



- File :
- Affichage : 0

# Rappel : parcours en largeur d'un graphe

**Algorithme :** ParcoursLargeur($G, s$)

$F \leftarrow$ file vide
Ajouter $s$ à $F$ et marquer $s$
**tant que** $F$ *est non vide* **:**
    $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$
    Afficher $u$
    **pour** *tout voisin non marqué* $v$ *de* $u$ **:**
        Ajouter $v$ à $F$ et marquer $v$

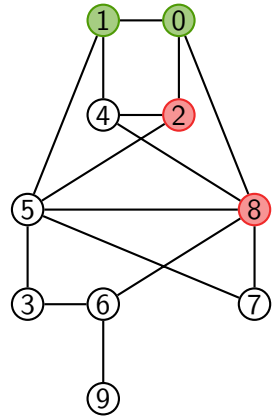



- File : 1 2 8
- Affichage : 0

# Rappel : parcours en largeur d'un graphe

**Algorithme :** ParcoursLargeur($G, s$)

$F \leftarrow$ file vide
Ajouter $s$ à $F$ et marquer $s$
**tant que** $F$ *est non vide* **:**
    $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$
    Afficher $u$
    **pour** *tout voisin non marqué* $v$ *de* $u$ **:**
        Ajouter $v$ à $F$ et marquer $v$

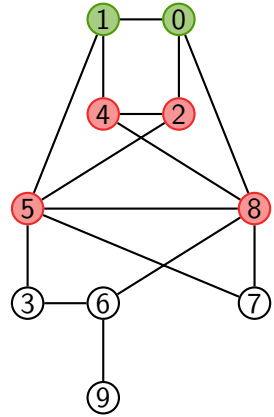



- File : 2 8
- Affichage : 0 1

# Rappel : parcours en largeur d'un graphe

**Algorithme :** ParcoursLargeur($G, s$)

$F \leftarrow$ file vide
Ajouter $s$ à $F$ et marquer $s$
**tant que** $F$ *est non vide* **:**
    $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$
    Afficher $u$
    **pour** *tout voisin non marqué* $v$ *de* $u$ **:**
        Ajouter $v$ à $F$ et marquer $v$

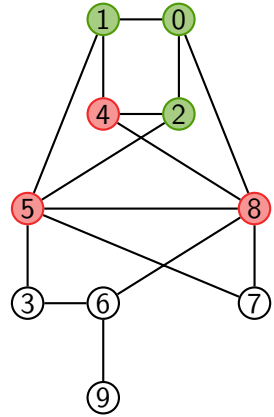



- File : 2 8 4 5
- Affichage : 0 1

# Rappel : parcours en largeur d'un graphe

**Algorithme :** ParcoursLargeur($G, s$)

$F \leftarrow$ file vide
Ajouter $s$ à $F$ et marquer $s$
**tant que** $F$ *est non vide* **:**
    $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$
    Afficher $u$
    **pour** *tout voisin non marqué* $v$ *de* $u$ **:**
        Ajouter $v$ à $F$ et marquer $v$

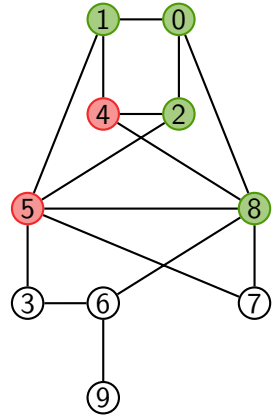



- File : 2 8 4 5
- Affichage : 0 1 2

# Rappel : parcours en largeur d'un graphe

**Algorithme :** ParcoursLargeur($G, s$)

$F \leftarrow$ file vide
Ajouter $s$ à $F$ et marquer $s$
**tant que** $F$ *est non vide* **:**
    $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$
    Afficher $u$
    **pour** *tout voisin non marqué* $v$ *de* $u$ **:**
        Ajouter $v$ à $F$ et marquer $v$

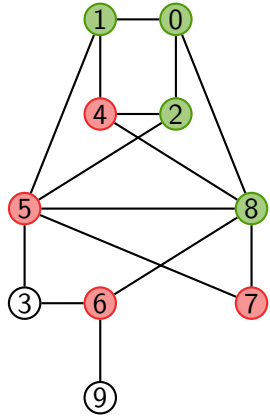



- File : 8 4 5
- Affichage : 0 1 2 8

# Rappel : parcours en largeur d'un graphe

**Algorithme :** PARCOURSLARGEUR($G, s$)

$F \leftarrow$ file vide
Ajouter $s$ à $F$ et marquer $s$
**tant que** $F$ *est non vide* **:**
    $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$
    Afficher $u$
    **pour** *tout voisin non marqué* $v$ *de* $u$ **:**
        Ajouter $v$ à $F$ et marquer $v$

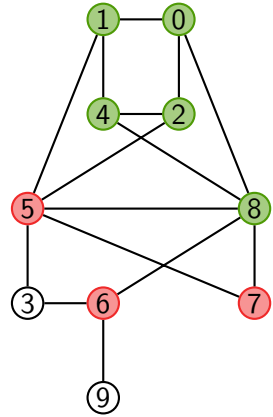



- File : 4 5 6 7
- Affichage : 0 1 2 8

# Rappel : parcours en largeur d'un graphe

**Algorithme :** PARCOURSLARGEUR($G, s$)

$F \leftarrow$ file vide
Ajouter $s$ à $F$ et marquer $s$
**tant que** $F$ *est non vide* **:**
    $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$
    Afficher $u$
    **pour** *tout voisin non marqué* $v$ *de* $u$ **:**
        Ajouter $v$ à $F$ et marquer $v$

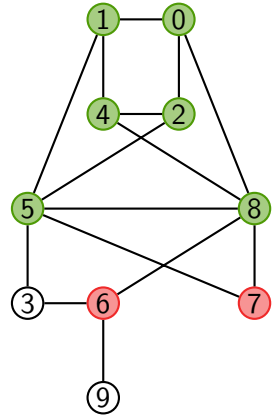



- File : 4 5 6 7
- Affichage : 0 1 2 8 4

# Rappel : parcours en largeur d'un graphe

**Algorithme :** PARCOURSLARGEUR($G, s$)

$F \leftarrow$ file vide
Ajouter $s$ à $F$ et marquer $s$
**tant que** $F$ *est non vide* **:**
    $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$
    Afficher $u$
    **pour** *tout voisin non marqué* $v$ *de* $u$ **:**
        Ajouter $v$ à $F$ et marquer $v$

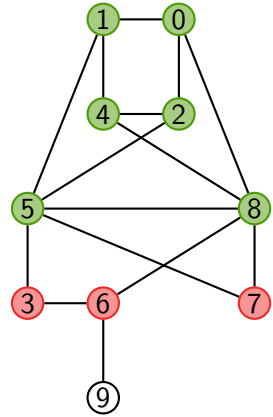



- File : 5 6 7
- Affichage : 0 1 2 8 4 5

# Rappel : parcours en largeur d'un graphe

**Algorithme :** ParcoursLargeur($G, s$)

$F \leftarrow$ file vide
Ajouter $s$ à $F$ et marquer $s$
**tant que** $F$ *est non vide* **:**
    $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$
    Afficher $u$
    **pour** *tout voisin non marqué* $v$ *de* $u$ **:**
        Ajouter $v$ à $F$ et marquer $v$

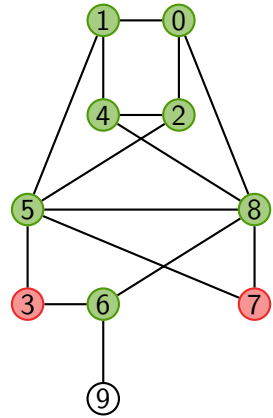



- File : 6 7 3
- Affichage : 0 1 2 8 4 5

# Rappel : parcours en largeur d'un graphe

**Algorithme :** PARCOURSLARGEUR($G, s$)

$F \leftarrow$ file vide
Ajouter $s$ à $F$ et marquer $s$
**tant que** $F$ *est non vide* **:**
    $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$
    Afficher $u$
    **pour** *tout voisin non marqué* $v$ *de* $u$ **:**
        Ajouter $v$ à $F$ et marquer $v$

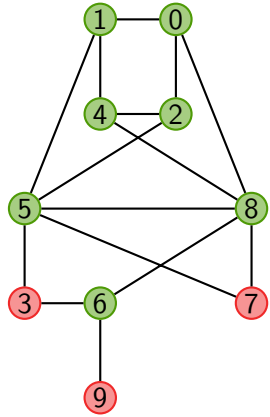



- File : 6 7 3
- Affichage : 0 1 2 8 4 5 6

# Rappel : parcours en largeur d'un graphe

**Algorithme :** ParcoursLargeur($G, s$)

$F \leftarrow$ file vide
Ajouter $s$ à $F$ et marquer $s$
**tant que** $F$ *est non vide* **:**
    $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$
    Afficher $u$
    **pour** *tout voisin non marqué* $v$ *de* $u$ **:**
        Ajouter $v$ à $F$ et marquer $v$

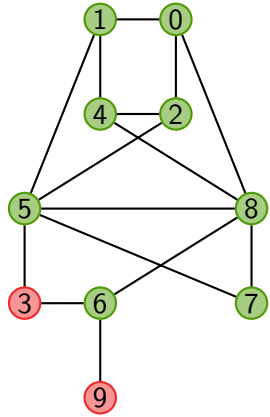



- File : 7 3 9
- Affichage : 0 1 2 8 4 5 6

# Rappel : parcours en largeur d'un graphe

**Algorithme :** ParcoursLargeur($G, s$)

$F \leftarrow$ file vide
Ajouter $s$ à $F$ et marquer $s$
**tant que** $F$ *est non vide* **:**
    $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$
    Afficher $u$
    **pour** *tout voisin non marqué* $v$ *de* $u$ **:**
        Ajouter $v$ à $F$ et marquer $v$

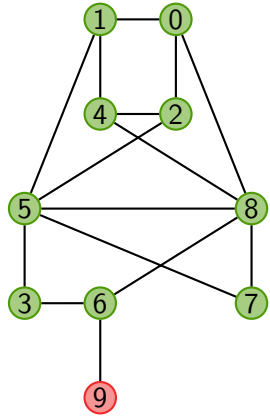



- File : 7 3 9
- Affichage : 0 1 2 8 4 5 6 7

# Rappel : parcours en largeur d'un graphe

**Algorithme :** PARCOURSLARGEUR($G, s$)

$F \leftarrow$ file vide
Ajouter $s$ à $F$ et marquer $s$
**tant que** $F$ *est non vide* **:**
    $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$
    Afficher $u$
    **pour** *tout voisin non marqué* $v$ *de* $u$ **:**
        Ajouter $v$ à $F$ et marquer $v$

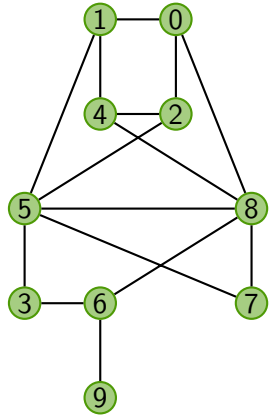



- File : 3 9
- Affichage : 0 1 2 8 4 5 6 7 3

# Rappel : parcours en largeur d'un graphe

**Algorithme :** ParcoursLargeur($G, s$)

$F \leftarrow$ file vide
Ajouter $s$ à $F$ et marquer $s$
**tant que** $F$ *est non vide* **:**
    $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$
    Afficher $u$
    **pour** *tout voisin non marqué* $v$ *de* $u$ **:**
        Ajouter $v$ à $F$ et marquer $v$




- File : 9
- Affichage : 0 1 2 8 4 5 6 7 3 9

# Parcours en largeur et calcul des distances

**Algorithme :** PARCOURSLARGEUR($G, s$)

$F \leftarrow$ file vide

Ajouter $s$ à $F$ et marquer $s$

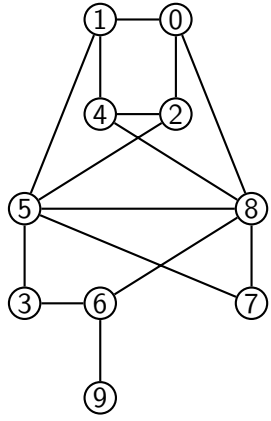
**tant que** $F$ *est non vide* **:**

  $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$

  Afficher $u$

  **pour** *tout voisin non marqué* $v$ *de* $u$ **:**

    Ajouter $v$ à $F$ et marquer $v$



# Parcours en largeur et calcul des distances

**Algorithme :** DISTANCES$(G, s)$

$F \leftarrow$ file vide ; $D_{[u]} \leftarrow +\infty$ pour tout $u$

Ajouter $s$ à $F$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$

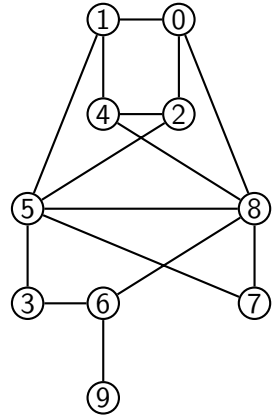
**tant que** $F$ *est non vide* **:**

  $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$

  **pour** *tout voisin* $v$ *de* $u$ *tq* $D_{[v]} = +\infty$ **:**

    Ajouter $v$ à $F$ ; $D_{[v]} \leftarrow D_{[u]} + 1$

**renvoyer** $D$



# Parcours en largeur et calcul des distances

**Algorithme :** DISTANCES$(G, s)$

$F \leftarrow$ file vide ; $D_{[u]} \leftarrow +\infty$ pour tout $u$

Ajouter $s$ à $F$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$

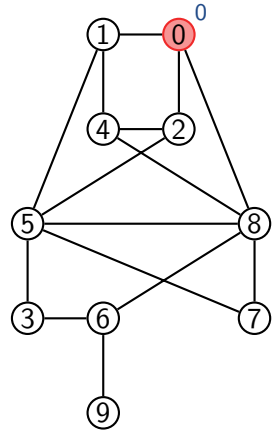
**tant que** $F$ *est non vide* **:**

  $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$

  **pour** *tout voisin* $v$ *de* $u$ *tq* $D_{[v]} = +\infty$ **:**

    Ajouter $v$ à $F$ ; $D_{[v]} \leftarrow D_{[u]} + 1$

**renvoyer** $D$




- File : 0

# Parcours en largeur et calcul des distances

**Algorithme :** DISTANCES$(G, s)$

$F \leftarrow$ file vide ; $D_{[u]} \leftarrow +\infty$ pour tout $u$

Ajouter $s$ à $F$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$

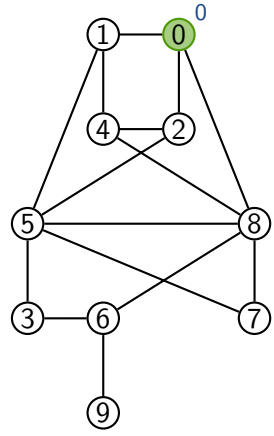
**tant que** $F$ *est non vide* **:**

  $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$

  **pour** *tout voisin* $v$ *de* $u$ *tq* $D_{[v]} = +\infty$ **:**

    Ajouter $v$ à $F$ ; $D_{[v]} \leftarrow D_{[u]} + 1$

**renvoyer** $D$




- File :

# Parcours en largeur et calcul des distances

**Algorithme :** DISTANCES$(G, s)$

$F \leftarrow$ file vide ; $D_{[u]} \leftarrow +\infty$ pour tout $u$

Ajouter $s$ à $F$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$

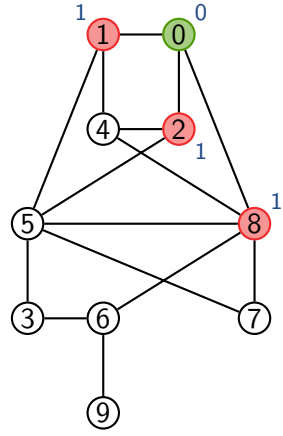
**tant que** $F$ *est non vide* **:**

  $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$

  **pour** *tout voisin* $v$ *de* $u$ *tq* $D_{[v]} = +\infty$ **:**

    Ajouter $v$ à $F$ ; $D_{[v]} \leftarrow D_{[u]} + 1$

**renvoyer** $D$




- File : 1 2 8

# Parcours en largeur et calcul des distances

**Algorithme :** DISTANCES$(G, s)$

$F \leftarrow$ file vide ; $D_{[u]} \leftarrow +\infty$ pour tout $u$

Ajouter $s$ à $F$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$

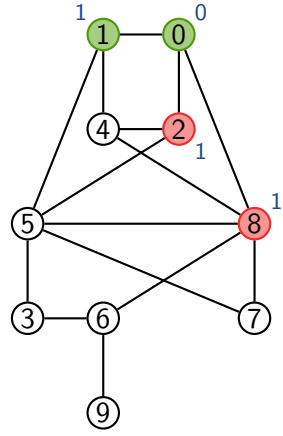
**tant que** $F$ *est non vide* **:**

  $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$

  **pour** *tout voisin* $v$ *de* $u$ *tq* $D_{[v]} = +\infty$ **:**

    Ajouter $v$ à $F$ ; $D_{[v]} \leftarrow D_{[u]} + 1$

**renvoyer** $D$




- File : 2 8

# Parcours en largeur et calcul des distances

**Algorithme :** DISTANCES$(G, s)$

$F \leftarrow$ file vide ; $D_{[u]} \leftarrow +\infty$ pour tout $u$

Ajouter $s$ à $F$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$

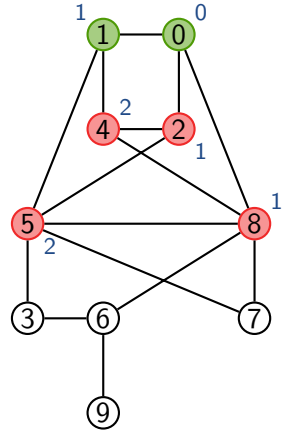
**tant que** $F$ *est non vide* **:**

  $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$

  **pour** *tout voisin* $v$ *de* $u$ *tq* $D_{[v]} = +\infty$ **:**

    Ajouter $v$ à $F$ ; $D_{[v]} \leftarrow D_{[u]} + 1$

**renvoyer** $D$




- File : 2 8 4 5

# Parcours en largeur et calcul des distances

**Algorithme :** DISTANCES$(G, s)$

$F \leftarrow$ file vide ; $D_{[u]} \leftarrow +\infty$ pour tout $u$

Ajouter $s$ à $F$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$

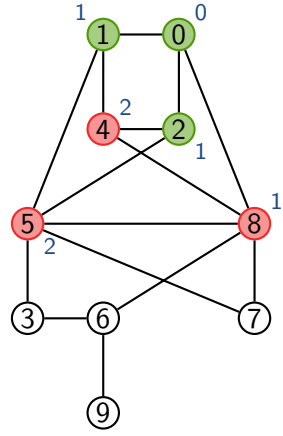
**tant que** $F$ *est non vide* **:**

  $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$

  **pour** *tout voisin* $v$ *de* $u$ *tq* $D_{[v]} = +\infty$ **:**

    Ajouter $v$ à $F$ ; $D_{[v]} \leftarrow D_{[u]} + 1$

**renvoyer** $D$




- File : 8 4 5

# Parcours en largeur et calcul des distances

**Algorithme :** DISTANCES$(G, s)$

$F \leftarrow$ file vide ; $D_{[u]} \leftarrow +\infty$ pour tout $u$

Ajouter $s$ à $F$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$

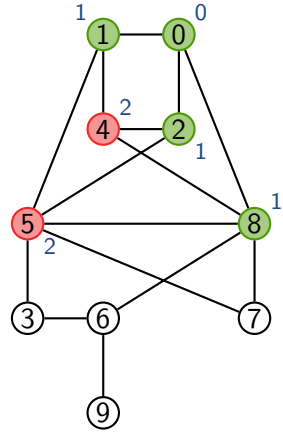
**tant que** $F$ *est non vide* **:**

  $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$

  **pour** *tout voisin* $v$ *de* $u$ *tq* $D_{[v]} = +\infty$ **:**

    Ajouter $v$ à $F$ ; $D_{[v]} \leftarrow D_{[u]} + 1$

**renvoyer** $D$




- File : 4 5

# Parcours en largeur et calcul des distances

**Algorithme :** DISTANCES$(G, s)$

$F \leftarrow$ file vide ; $D_{[u]} \leftarrow +\infty$ pour tout $u$

Ajouter $s$ à $F$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$

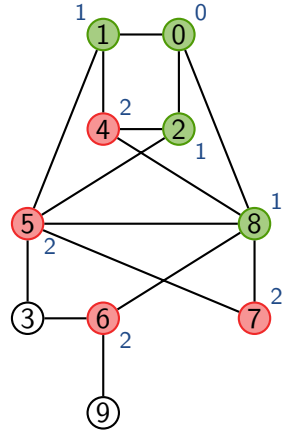
**tant que** $F$ *est non vide* **:**

  $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$

  **pour** *tout voisin* $v$ *de* $u$ *tq* $D_{[v]} = +\infty$ **:**

    Ajouter $v$ à $F$ ; $D_{[v]} \leftarrow D_{[u]} + 1$

**renvoyer** $D$




- File : 4 5 6 7

# Parcours en largeur et calcul des distances

**Algorithme :** DISTANCES$(G, s)$

$F \leftarrow$ file vide ; $D_{[u]} \leftarrow +\infty$ pour tout $u$

Ajouter $s$ à $F$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$

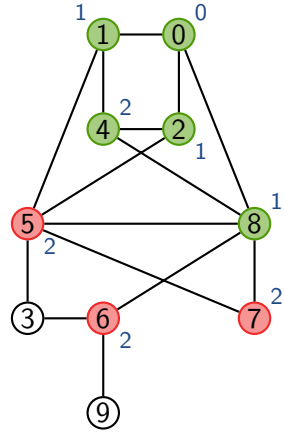
**tant que** $F$ *est non vide* **:**

  $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$

  **pour** *tout voisin* $v$ *de* $u$ *tq* $D_{[v]} = +\infty$ **:**

    Ajouter $v$ à $F$ ; $D_{[v]} \leftarrow D_{[u]} + 1$

**renvoyer** $D$




- File : 5 6 7

# Parcours en largeur et calcul des distances

**Algorithme :** DISTANCES$(G, s)$

$F \leftarrow$ file vide ; $D_{[u]} \leftarrow +\infty$ pour tout $u$

Ajouter $s$ à $F$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$

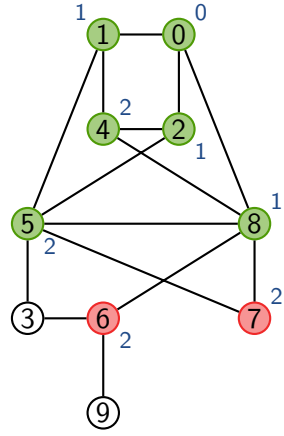
**tant que** $F$ *est non vide* **:**

  $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$

  **pour** *tout voisin* $v$ *de* $u$ *tq* $D_{[v]} = +\infty$ **:**

    Ajouter $v$ à $F$ ; $D_{[v]} \leftarrow D_{[u]} + 1$

**renvoyer** $D$




- File : 6 7

# Parcours en largeur et calcul des distances

**Algorithme :** DISTANCES$(G, s)$

$F \leftarrow$ file vide ; $D_{[u]} \leftarrow +\infty$ pour tout $u$

Ajouter $s$ à $F$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$

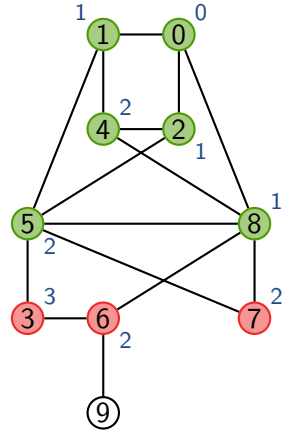
**tant que** $F$ *est non vide* **:**

  $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$

  **pour** *tout voisin* $v$ *de* $u$ *tq* $D_{[v]} = +\infty$ **:**

    Ajouter $v$ à $F$ ; $D_{[v]} \leftarrow D_{[u]} + 1$

**renvoyer** $D$




- File : 6 7 3

# Parcours en largeur et calcul des distances

**Algorithme :** DISTANCES$(G, s)$

$F \leftarrow$ file vide ; $D_{[u]} \leftarrow +\infty$ pour tout $u$

Ajouter $s$ à $F$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$

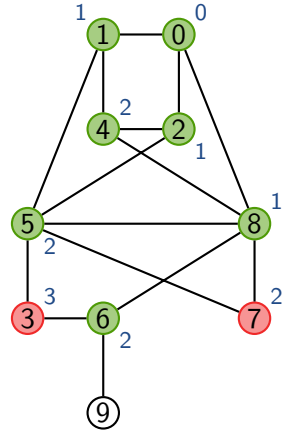
**tant que** $F$ *est non vide* **:**

  $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$

  **pour** *tout voisin* $v$ *de* $u$ *tq* $D_{[v]} = +\infty$ **:**

    Ajouter $v$ à $F$ ; $D_{[v]} \leftarrow D_{[u]} + 1$

**renvoyer** $D$




- File : 7 3

# Parcours en largeur et calcul des distances

**Algorithme :** DISTANCES$(G, s)$

$F \leftarrow$ file vide ; $D_{[u]} \leftarrow +\infty$ pour tout $u$

Ajouter $s$ à $F$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$

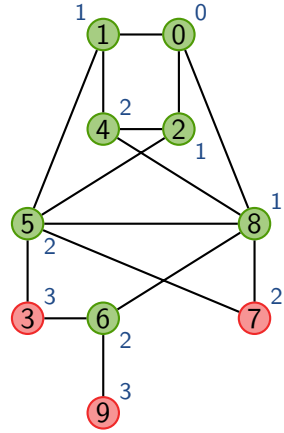
**tant que** $F$ *est non vide* **:**

  $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$

  **pour** *tout voisin* $v$ *de* $u$ *tq* $D_{[v]} = +\infty$ **:**

    Ajouter $v$ à $F$ ; $D_{[v]} \leftarrow D_{[u]} + 1$

**renvoyer** $D$




- File : 7 3 9

# Parcours en largeur et calcul des distances

**Algorithme :** DISTANCES$(G, s)$

$F \leftarrow$ file vide ; $D_{[u]} \leftarrow +\infty$ pour tout $u$

Ajouter $s$ à $F$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$

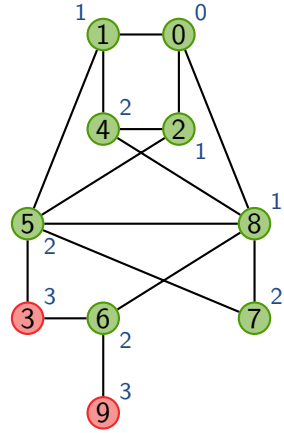
**tant que** $F$ *est non vide* **:**

  $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$

  **pour** *tout voisin* $v$ *de* $u$ *tq* $D_{[v]} = +\infty$ **:**

    Ajouter $v$ à $F$ ; $D_{[v]} \leftarrow D_{[u]} + 1$

**renvoyer** $D$




- File : 3 9

# Parcours en largeur et calcul des distances

**Algorithme :** DISTANCES$(G, s)$

$F \leftarrow$ file vide ; $D_{[u]} \leftarrow +\infty$ pour tout $u$

Ajouter $s$ à $F$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$

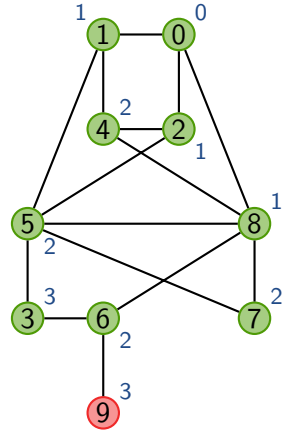
**tant que** $F$ *est non vide* **:**

  $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$

  **pour** *tout voisin* $v$ *de* $u$ *tq* $D_{[v]} = +\infty$ **:**

    Ajouter $v$ à $F$ ; $D_{[v]} \leftarrow D_{[u]} + 1$

**renvoyer** $D$




- File : 9

# Parcours en largeur et calcul des distances

**Algorithme :** DISTANCES$(G, s)$

$F \leftarrow$ file vide ; $D_{[u]} \leftarrow +\infty$ pour tout $u$

Ajouter $s$ à $F$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$

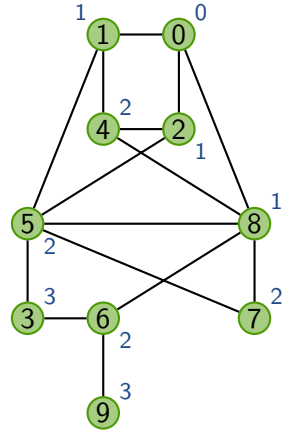
**tant que** $F$ *est non vide* **:**

  $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$

  **pour** *tout voisin* $v$ *de* $u$ *tq* $D_{[v]} = +\infty$ **:**

    Ajouter $v$ à $F$ ; $D_{[v]} \leftarrow D_{[u]} + 1$

**renvoyer** $D$




- File :

# Parcours en largeur et calcul des distances

**Algorithme :** DISTANCES$(G, s)$

$F \leftarrow$ file vide ; $D_{[u]} \leftarrow +\infty$ pour tout $u$

Ajouter $s$ à $F$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$

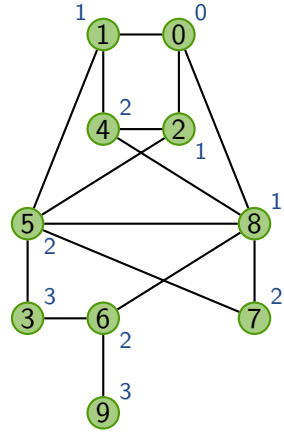
**tant que** $F$ *est non vide* **:**

  $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$

  **pour** *tout voisin* $v$ *de* $u$ *tq* $D_{[v]} = +\infty$ **:**

    Ajouter $v$ à $F$ ; $D_{[v]} \leftarrow D_{[u]} + 1$

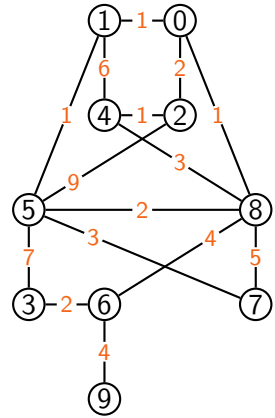
**renvoyer** $D$




- File :
- DISTANCES calcule les distances entre $s$ et tous les autres sommets

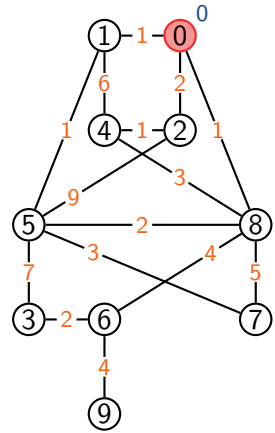
# Algorithme de Dijkstra

Et si le graphe est *pondéré* ?



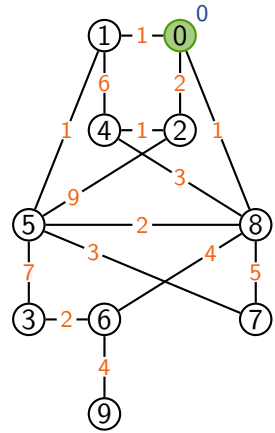
# Algorithme de Dijkstra

Et si le graphe est *pondéré* ?



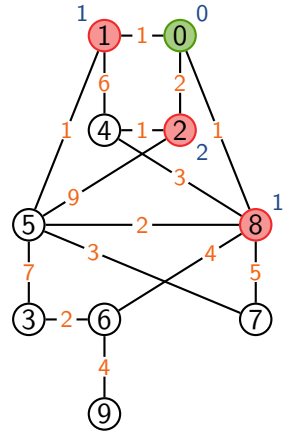
# Algorithme de Dijkstra

Et si le graphe est *pondéré* ?



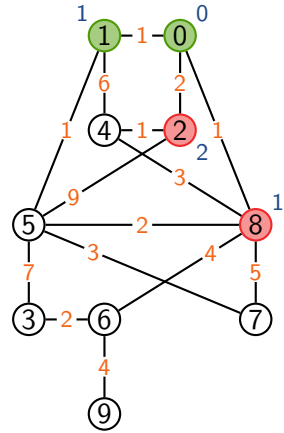
# Algorithme de Dijkstra

Et si le graphe est *pondéré* ?



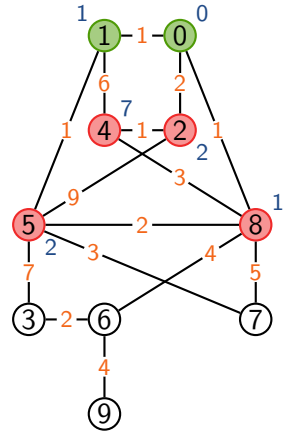
# Algorithme de Dijkstra

Et si le graphe est *pondéré* ?



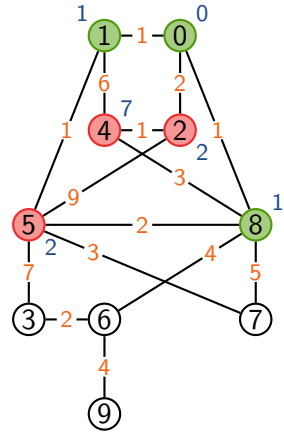
# Algorithme de Dijkstra

Et si le graphe est *pondéré* ?



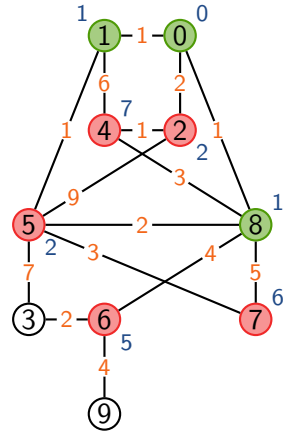
# Algorithme de Dijkstra

Et si le graphe est *pondéré* ?



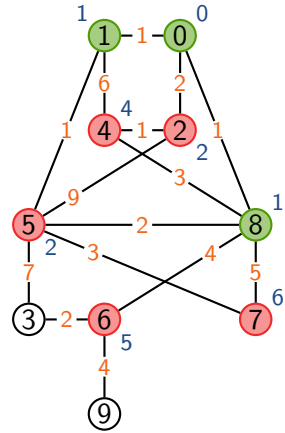
# Algorithme de Dijkstra

Et si le graphe est *pondéré* ?



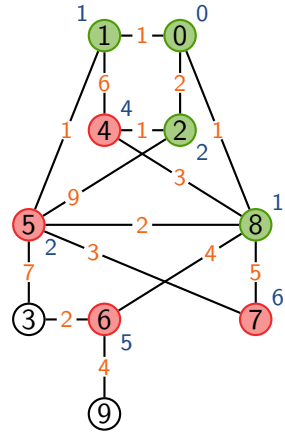
# Algorithme de Dijkstra

Et si le graphe est *pondéré* ?



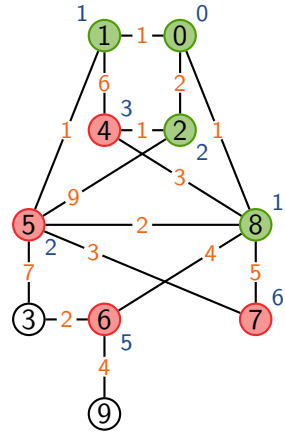
# Algorithme de Dijkstra

Et si le graphe est *pondéré* ?



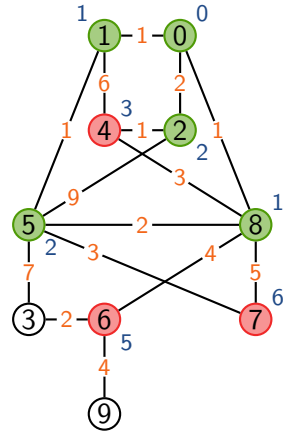
# Algorithme de Dijkstra

Et si le graphe est *pondéré* ?



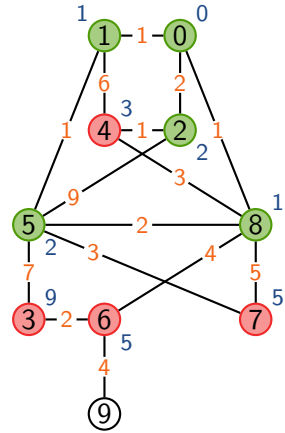
# Algorithme de Dijkstra

Et si le graphe est *pondéré* ?



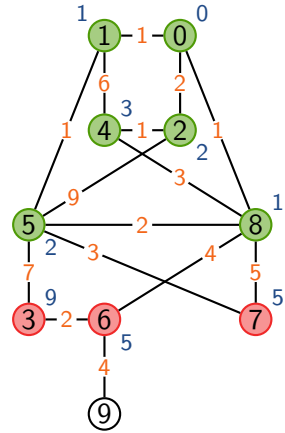
# Algorithme de Dijkstra

Et si le graphe est *pondéré* ?



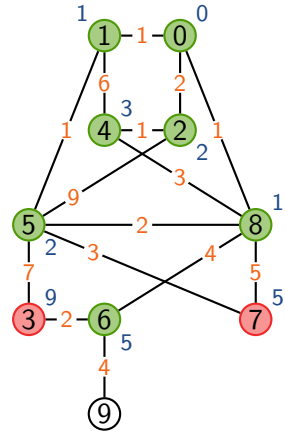
# Algorithme de Dijkstra

Et si le graphe est *pondéré* ?



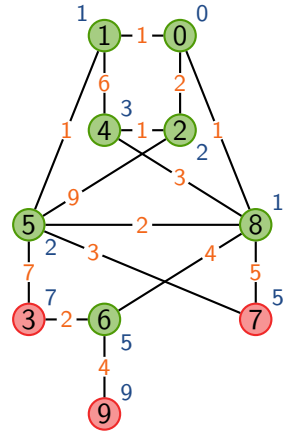
# Algorithme de Dijkstra

Et si le graphe est *pondéré* ?



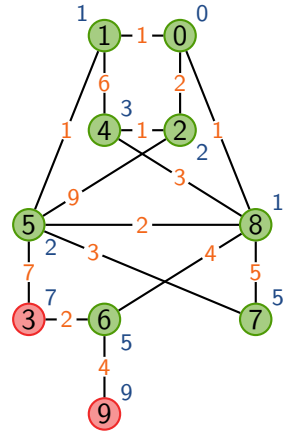
# Algorithme de Dijkstra

Et si le graphe est *pondéré* ?



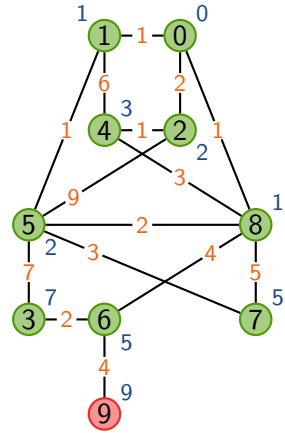
# Algorithme de Dijkstra

Et si le graphe est *pondéré* ?



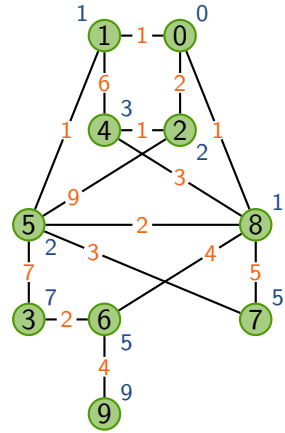
# Algorithme de Dijkstra

Et si le graphe est *pondéré* ?



# Algorithme de Dijkstra

Et si le graphe est *pondéré* ?

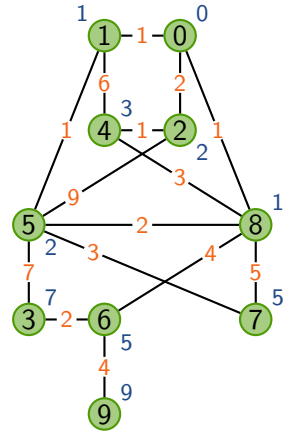


# Algorithme de Dijkstra

Et si le graphe est *pondéré* ?

**Algorithme :** DISTANCES$(G, s)$

$F \leftarrow$ file vide
$D_{[u]} \leftarrow +\infty$ pour tout $u$
Ajouter $s$ à $F$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$
**tant que** $F$ *est non vide* **:**
    $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$
    **pour** *tout voisin* $v$ *de* $u$ *tq* $D_{[v]} = +\infty$ **:**
        Ajouter $v$ à $F$
        $D_{[v]} \leftarrow D_{[u]} + 1$
**renvoyer** $D$

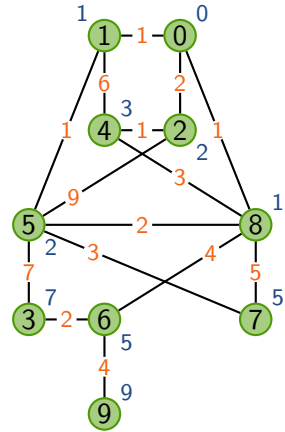


# Algorithme de Dijkstra

Et si le graphe est *pondéré* ?

**Algorithme :** DIJKSTRA$(G, s, p)$

$F \leftarrow$ file de priorité vide
$D_{[u]} \leftarrow +\infty$ pour tout $u$
Ajouter $s$ à $F$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$
**tant que** $F$ *est non vide* **:**
    $u \leftarrow$ défiler un élément de $F$ de distance minimale
    **pour** *tout voisin* $v$ *de* $u$ **:**
        Ajouter $v$ à $F$ **si** $D_{[v]} = +\infty$
        $D_{[v]} \leftarrow \min(D_{[v]}, D_{[u]} + p(u, v))$
**renvoyer** $D$



# L'algorithme en détail

**Algorithme :** DIJKSTRA$(G, s, p)$

$F \leftarrow$ file de priorité vide
$D \leftarrow$ tableau de $n$ entiers, initialisé à $+\infty$ `// Tableau des distances`
**pour** *chaque sommet $u$ de $G$* **:** AJOUTER$(F, u, +\infty)$ `// Insertion dans la file`
CHANGERPRIORITÉ$(F, s, 0)$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$ `// Distance 0 pour s`

**tant que** *$F$ est non vide* **:**
    $u \leftarrow$ EXTRAIREMIN$(F)$ `// Élément de distance minimale`
    **pour** *tout voisin $v$ de $u$* **:**
        **si** $D_{[u]} + p(u, v) < D_{[v]}$ **:**
            $D_{[v]} \leftarrow D_{[u]} + p(u, v)$ `// Mise à jour de la distance`
            CHANGERPRIORITÉ$(F, v, D_{[v]})$ `// Mise à jour de la file`

**renvoyer** $D$

# Propriétés de l'algorithme de Dijkstra

## Théorème

*Si $G$ est connexe,* DISJKTRA$(G, s, p)$ *calcule les longueurs des plus courts chemins de $s$ à chaque sommet de $G$. Sa complexité est*

- $O(m \log n)$ *avec des listes d'adjacence*
- $O(n^2)$ *avec une matrice d'adjacence*

*où $n$ est le nombre de sommets, $m$ le nombre d'arêtes.*

# Propriétés de l'algorithme de Dijkstra

## Théorème

*Si $G$ est connexe,* DISJKTRA$(G, s, p)$ *calcule les longueurs des plus courts chemins de $s$ à chaque sommet de $G$. Sa complexité est*

- $O(m \log n)$ *avec des listes d'adjacence*
- $O(n^2)$ *avec une matrice d'adjacence*

*où $n$ est le nombre de sommets, $m$ le nombre d'arêtes.*

## Preuve de complexité

- Listes d'adjacence :
  - Liste de priorité : AJOUTER/EXTRAIREMIN/CHANGERPRIORITÉ en $O(\log n)$
  - Chaque sommet est extrait une fois $\rightsquigarrow O(n \log n)$
  - Chaque arête *peut* déclencher un CHANGERPRIORITÉ $\rightsquigarrow O(m \log n)$

# Propriétés de l'algorithme de Dijkstra

## Théorème

*Si $G$ est connexe,* DISJKTRA$(G, s, p)$ *calcule les longueurs des plus courts chemins de $s$ à chaque sommet de $G$. Sa complexité est*

- $O(m \log n)$ *avec des listes d'adjacence*
- $O(n^2)$ *avec une matrice d'adjacence*

*où $n$ est le nombre de sommets, $m$ le nombre d'arêtes.*

## Preuve de complexité

- Listes d'adjacence :
  - Liste de priorité : AJOUTER/EXTRAIREMIN/CHANGERPRIORITÉ en $O(\log n)$
  - Chaque sommet est extrait une fois $\rightsquigarrow O(n \log n)$
  - Chaque arête *peut* déclencher un CHANGERPRIORITÉ $\rightsquigarrow O(m \log n)$
- Matrices d'adjacence
  - Pas de liste de priorité : parcours de tous les sommets à chaque fois
  - $\ll$ pour tout voisin $v$ de $u \gg \rightsquigarrow n \times O(n)$

# Propriétés de l'algorithme de Dijkstra

## Théorème

*Si $G$ est connexe,* DISJKTRA$(G, s, p)$ *calcule les longueurs des plus courts chemins de $s$ à chaque sommet de $G$. Sa complexité est*

- $O(m \log n)$ *avec des listes d'adjacence*
- $O(n^2)$ *avec une matrice d'adjacence*

*où $n$ est le nombre de sommets, $m$ le nombre d'arêtes.*

Preuve de correction. On note $d_u$ la distance minimale de $u$ à $s$
Invariant : $\ll$ quand $u$ est extrait de $F$ à l'itération $k$, $D_{[u]} = d_u$ $\gg$

- $k = 1$ : extraction de $s$ et $D_{[s]} = d_s = 0 \rightsquigarrow$ OK

# Propriétés de l'algorithme de Dijkstra

## Théorème

*Si $G$ est connexe,* DISJKTRA$(G, s, p)$ *calcule les longueurs des plus courts chemins de $s$ à chaque sommet de $G$. Sa complexité est*

- $O(m \log n)$ *avec des listes d'adjacence*
- $O(n^2)$ *avec une matrice d'adjacence*

*où $n$ est le nombre de sommets, $m$ le nombre d'arêtes.*

Preuve de correction. On note $d_u$ la distance minimale de $u$ à $s$
Invariant : « quand $u$ est extrait de $F$ à l'itération $k$, $D_{[u]} = d_u$ »

- $k = 1$ : extraction de $s$ et $D_{[s]} = d_s = 0 \rightsquigarrow$ OK
- Soit $u$ le $k^{\text{ème}}$ sommet extrait, $k > 0$, et $d = D_{[u]}$ à ce moment-là
  - Supposons qu'il existe un chemin de longueur $d_u < d$ de $s$ à $u$
  - Il existe une arête $xy$ sur ce chemin tq $x$ est extrait avant l'itération $k$ mais pas $y$
  - À l'itération $k$, $D_{[x]} = d_x$ et comme $y$ est voisin de $x$, $D_{[y]} \leq d_x + p(x, y)$
  - Mais $d_x + p(x, y) \leq d_u < d$ : $y$ devrait avoir été choisi avant $u$

# Algorithme de Dijkstra : reconstruction

**Algorithme :** DIJKSTRA$(G, s, p)$

$F \leftarrow$ file de priorité vide
$D \leftarrow$ tableau de $n$ entiers, initialisé à $+\infty$
$P \leftarrow$ tableau de $n$ entiers `// Prédecesseurs`
**pour** *chaque sommet u de G* **:** AJOUTER$(F, u, +\infty)$
CHANGERPRIORITÉ$(F, s, 0)$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$
**tant que** $F$ *est non vide* **:**
    $u \leftarrow$ EXTRAIREMIN$(F)$
    **pour** *tout voisin v de u* **:**
        **si** $D_{[u]} + p(u, v) < D_{[v]}$ **:**
            $D_{[v]} \leftarrow D_{[u]} + p(u, v)$ ; $P_{[v]} \leftarrow u$
            CHANGERPRIORITÉ$(F, v, D_{[v]})$

**renvoyer** $D$ *et* $P$

# Algorithme de Dijkstra : reconstruction

**Algorithme :** DIJKSTRA$(G, s, p)$

$F \leftarrow$ file de priorité vide
$D \leftarrow$ tableau de $n$ entiers, initialisé à $+\infty$
$P \leftarrow$ tableau de $n$ entiers `// Prédecesseurs`
**pour** *chaque sommet u de G* **:** AJOUTER$(F, u, +\infty)$
CHANGERPRIORITÉ$(F, s, 0)$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$
**tant que** $F$ *est non vide* **:**
    $u \leftarrow$ EXTRAIREMIN$(F)$
    **pour** *tout voisin v de u* **:**
        **si** $D_{[u]} + p(u, v) < D_{[v]}$ **:**
            $D_{[v]} \leftarrow D_{[u]} + p(u, v)$ ; $P_{[v]} \leftarrow u$
            CHANGERPRIORITÉ$(F, v, D_{[v]})$
**renvoyer** $D$ *et* $P$

**Algorithme :** DIJKSTRA_REC$(G, P, u)$

$C \leftarrow \{u\}$ `// Chemin`
**tant que** $u \neq s$ **:**
    $u \leftarrow P_{[u]}$
    Ajouter $u$ à $C$
**renvoyer** $C$

# Algorithme de Dijkstra : reconstruction

**Algorithme :** DIJKSTRA$(G, s, p)$

$F \leftarrow$ file de priorité vide
$D \leftarrow$ tableau de $n$ entiers, initialisé à $+\infty$
$P \leftarrow$ tableau de $n$ entiers `// Prédecesseurs`
**pour** *chaque sommet $u$ de $G$* **:** AJOUTER$(F, u, +\infty)$
CHANGERPRIORITÉ$(F, s, 0)$ ; $D_{[s]} \leftarrow 0$
**tant que** *$F$ est non vide* **:**
    $u \leftarrow$ EXTRAIREMIN$(F)$
    **pour** *tout voisin $v$ de $u$* **:**
        **si** $D_{[u]} + p(u, v) < D_{[v]}$ **:**
            $D_{[v]} \leftarrow D_{[u]} + p(u, v)$ ; $P_{[v]} \leftarrow u$
            CHANGERPRIORITÉ$(F, v, D_{[v]})$
**renvoyer** $D$ *et* $P$

**Algorithme :** DIJKSTRA_REC$(G, P, u)$

$C \leftarrow \{u\}$ `// Chemin`
**tant que** $u \neq s$ **:**
    $u \leftarrow P_{[u]}$
    Ajouter $u$ à $C$
**renvoyer** $C$

**Algorithme :** DIJKSTRA_ARBRE$(G, P)$

$T \leftarrow$ arbre vide
**pour** *tout sommet $u \neq s$* **:**
    Ajouter l'arête $P_{[u]}u$ à $T$
**renvoyer** $T$

# Calcul de plus court chemins

**Théorème**

*L'algorithme* DIJKSTRA_ARBRE *construit un* ***arbre des plus courts chemins*** *depuis* $s$, *en temps* $O(n)$.

Preuve (idée) : Chaque sommet a un unique prédecesseur $\rightsquigarrow$ arbre

# Calcul de plus court chemins

**Théorème**

*L'algorithme* DIJKSTRA_ARBRE *construit un* ***arbre des plus courts chemins*** *depuis $s$, en temps $O(n)$.*

Preuve (idée) : Chaque sommet a un unique prédecesseur $\rightsquigarrow$ arbre

Pour aller plus loin

- Si arêtes de poids négatif (*raccourcis*), mais pas de cycle strictement négatif
  - Algorithme de Bellman-Ford (adaptation de DIJKSTRA)

# Calcul de plus court chemins

**Théorème**

*L'algorithme* DIJKSTRA_ARBRE *construit un* ***arbre des plus courts chemins*** *depuis $s$, en temps $O(n)$.*

Preuve (idée) : Chaque sommet a un unique prédecesseur $\rightsquigarrow$ arbre

Pour aller plus loin

- Si arêtes de poids négatif (*raccourcis*), mais pas de cycle strictement négatif
  - Algorithme de Bellman-Ford (adaptation de DIJKSTRA)
- Chemins les plus courts entre toute paire de sommets
  - $n$ répétitions de DIJKSTRA $\rightsquigarrow O(mn \log n)$ ou $O(n^3)$
  - Algorithme de Floyd-Warshall $\rightsquigarrow$ TD

# Calcul de plus court chemins

**Théorème**

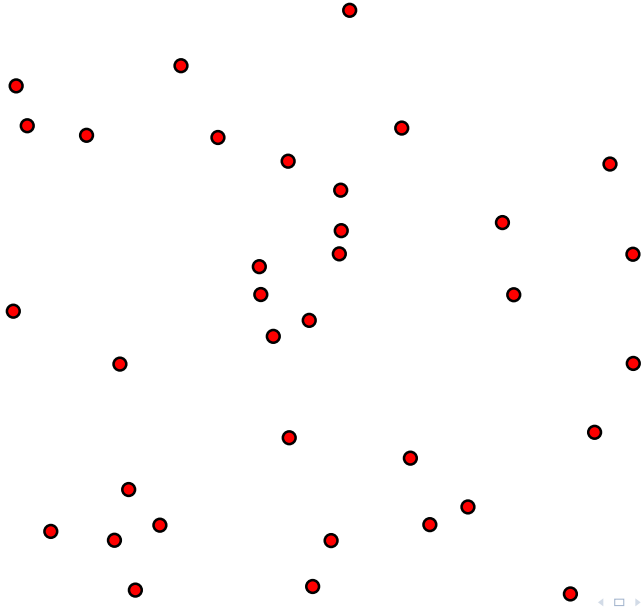
*L'algorithme* DIJKSTRA_ARBRE *construit un* ***arbre des plus courts chemins*** *depuis $s$, en temps $O(n)$.*

Preuve (idée) : Chaque sommet a un unique prédecesseur $\rightsquigarrow$ arbre

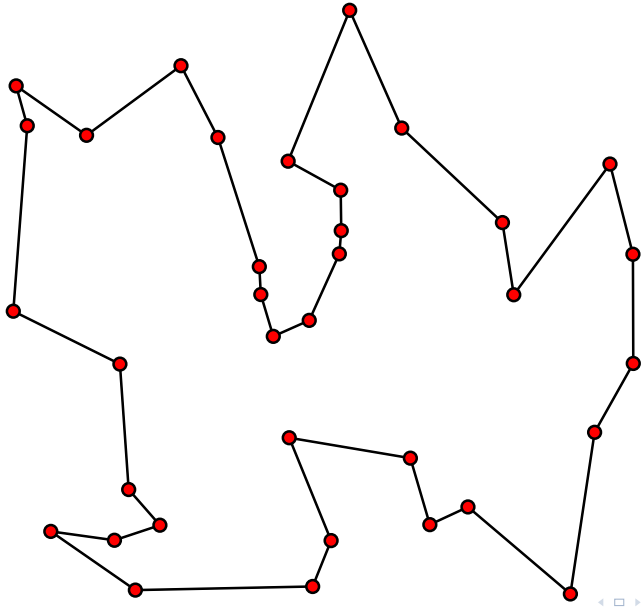
Pour aller plus loin

- Si arêtes de poids négatif (*raccourcis*), mais pas de cycle strictement négatif
  - Algorithme de Bellman-Ford (adaptation de DIJKSTRA)
- Chemins les plus courts entre toute paire de sommets
  - $n$ répétitions de DIJKSTRA $\rightsquigarrow O(mn \log n)$ ou $O(n^3)$
  - Algorithme de Floyd-Warshall $\rightsquigarrow$ TD
- En pratique (ex. cartes routières) : algorithme $A^\star$
  - distance par la route $\geq$ distance à vol d'oiseau (calcul facile)
  - certains sommets peuvent être ignorés $\rightsquigarrow$ calcul plus rapide !

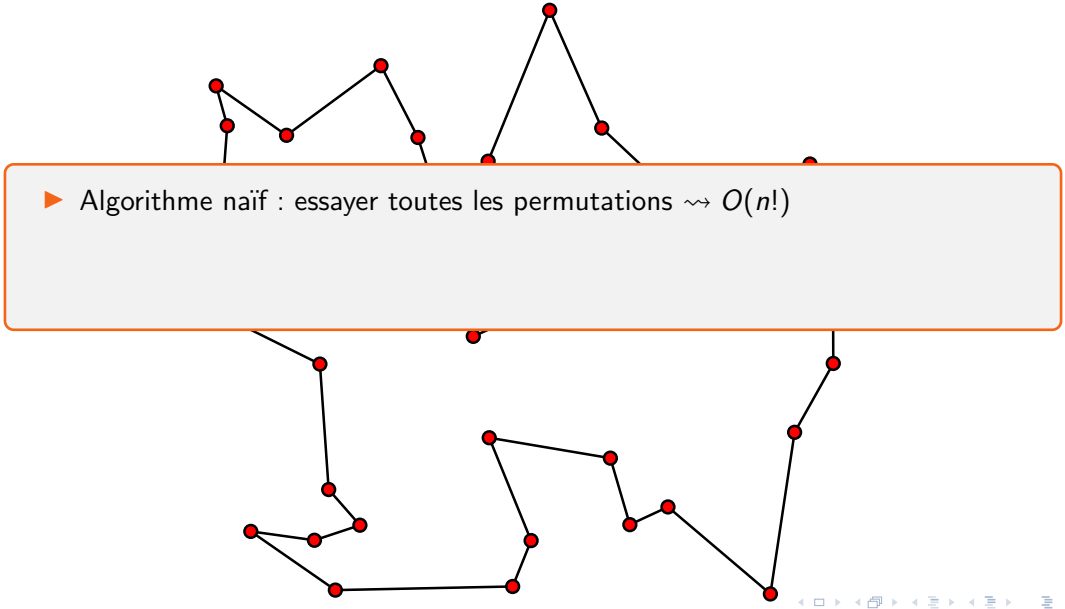
# Chemin le plus court passant par chaque point ?



# Chemin le plus court passant par chaque point ?

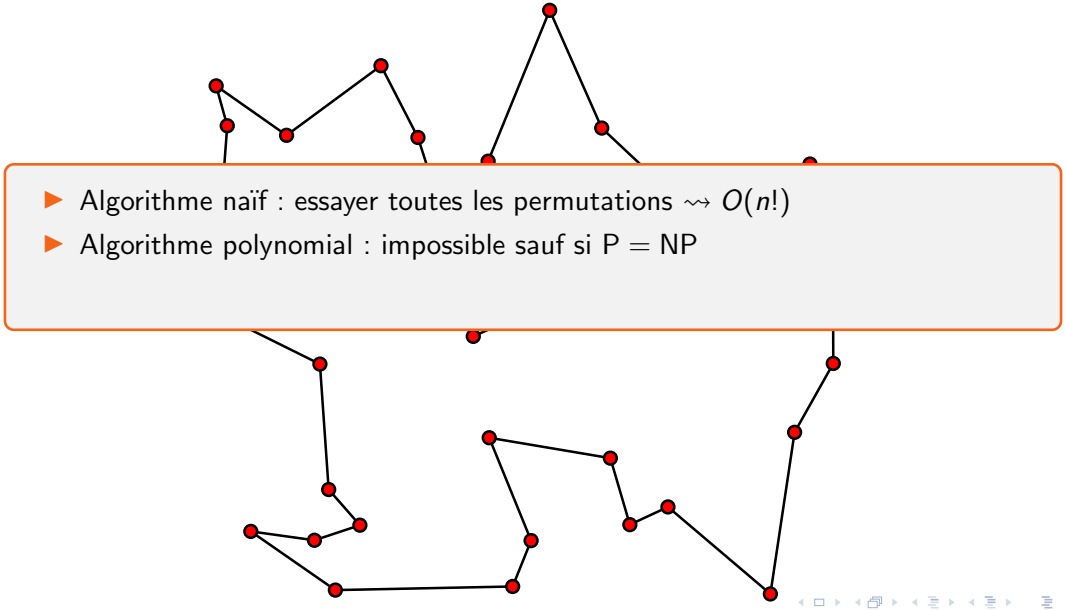


# Chemin le plus court passant par chaque point ?



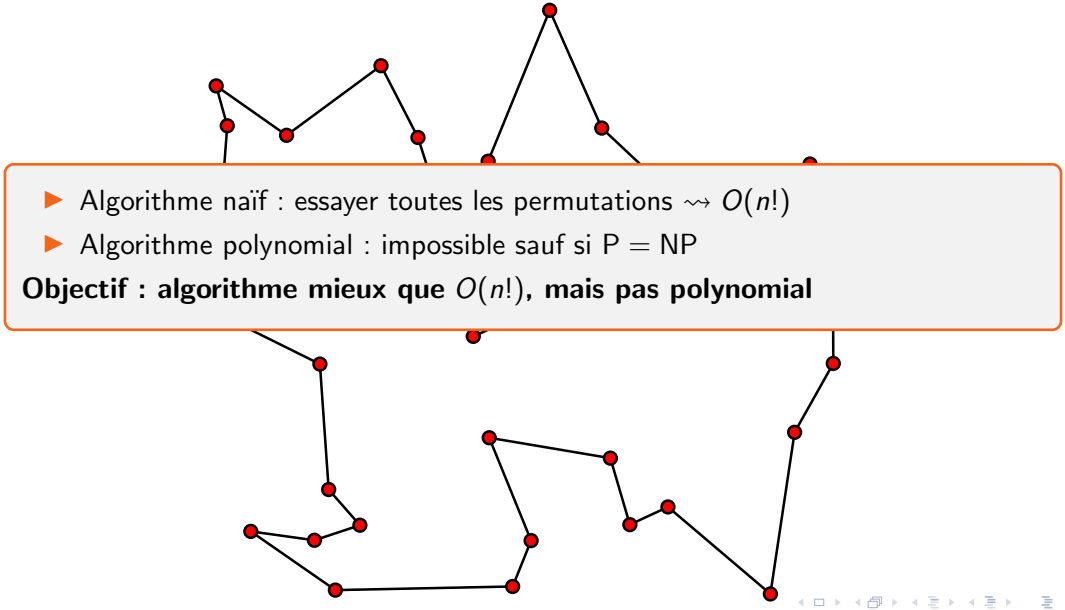
- Algorithme naïf : essayer toutes les permutations $\rightsquigarrow O(n!)$

# Chemin le plus court passant par chaque point ?



- Algorithme naïf : essayer toutes les permutations $\rightsquigarrow O(n!)$
- Algorithme polynomial : impossible sauf si P = NP

# Chemin le plus court passant par chaque point ?



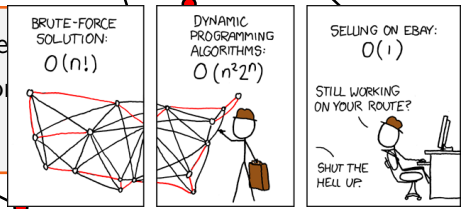
- Algorithme naïf : essayer toutes les permutations $\rightsquigarrow O(n!)$
- Algorithme polynomial : impossible sauf si P = NP

**Objectif : algorithme mieux que $O(n!)$, mais pas polynomial**

# Chemin le plus court passant par chaque point ?

- Algorithme naïf : e $n!)$
- Algorithme polyno

**Objectif : algorithme** **mial**




https://xkcd.com/399/

# Formalisation

**Entrée** Ensemble $S = \{s_0, \ldots, s_{n-1}\}$ de points dans le plan

**Sortie 1** Chemin $s_{i_0} \to s_{i_1} \to \cdots \to s_{i_{n-1}} \to s_{i_0}$ qui minimise la distance totale, avec $\delta_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ si $s_i = (x_i, y_i)$ et $s_j = (x_j, y_j)$

**Sortie 2** Longueur $\ell_S = \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{i_j i_{j+1}}$ du chemin le plus court ($i_n = i_0$)

# Formalisation

**Entrée** Ensemble $S = \{s_0, \ldots, s_{n-1}\}$ de points dans le plan

**Sortie 1** Chemin $s_{i_0} \to s_{i_1} \to \cdots \to s_{i_{n-1}} \to s_{i_0}$ qui minimise la distance totale, avec $\delta_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ si $s_i = (x_i, y_i)$ et $s_j = (x_j, y_j)$

**Sortie 2** Longueur $\ell_S = \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{i_j i_{j+1}}$ du chemin le plus court ($i_n = i_0$)

- On peut fixer $s_{i_0} = s_0$

# Formalisation

**Entrée** Ensemble $S = \{s_0, \ldots, s_{n-1}\}$ de points dans le plan

**Sortie 1** Chemin $s_{i_0} \to s_{i_1} \to \cdots \to s_{i_{n-1}} \to s_{i_0}$ qui minimise la distance totale, avec $\delta_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ si $s_i = (x_i, y_i)$ et $s_j = (x_j, y_j)$

**Sortie 2** Longueur $\ell_S = \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{i_j i_{j+1}}$ du chemin le plus court ($i_n = i_0$)

- On peut fixer $s_{i_0} = s_0$
- Si $U \subset S$ avec $s_0, s_j \in U$, on note $\boldsymbol{\Delta(U, s_j)}$ la longueur du plus court chemin de $s_0$ à $s_j$ visitant chaque $s_i \in U$ une fois exactement

# Formalisation

**Entrée** Ensemble $S = \{s_0, \ldots, s_{n-1}\}$ de points dans le plan

**Sortie 1** Chemin $s_{i_0} \to s_{i_1} \to \cdots \to s_{i_{n-1}} \to s_{i_0}$ qui minimise la distance totale, avec $\delta_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ si $s_i = (x_i, y_i)$ et $s_j = (x_j, y_j)$

**Sortie 2** Longueur $\ell_S = \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{i_j i_{j+1}}$ du chemin le plus court ($i_n = i_0$)

- On peut fixer $s_{i_0} = s_0$
- Si $U \subset S$ avec $s_0, s_j \in U$, on note $\boldsymbol{\Delta(U, s_j)}$ la longueur du plus court chemin de $s_0$ à $s_j$ visitant chaque $s_i \in U$ une fois exactement

$$\boxed{\ell_S = \min_j \Delta(\{s_0, \ldots, s_{n-1}\}, s_j) + \delta_{j,0}}$$

# Formule récursive pour $\Delta$

$\Delta(U, s_j)$ : longueur du plus court chemin de $s_0$ à $s_j$ visitant chaque $s_i \in U$ une fois exactement

# Formule récursive pour $\Delta$

$\Delta(U, s_j)$ : longueur du plus court chemin de $s_0$ à $s_j$ visitant chaque $s_i \in U$ une fois exactement

## Lemme

- $\Delta(\{s_0\}, s_0) = 0$ *et* $\Delta(U, s_0) = +\infty$ *si* $|U| > 1$
- $\Delta(U, s_j) = \min_{i \in U : i \neq j} \Delta(U \setminus \{s_j\}, s_i) + \delta_{ij}$

# Formule récursive pour $\Delta$

$\Delta(U, s_j)$ : longueur du plus court chemin de $s_0$ à $s_j$ visitant chaque $s_i \in U$ une fois exactement

## Lemme

- $\Delta(\{s_0\}, s_0) = 0$ *et* $\Delta(U, s_0) = +\infty$ *si* $|U| > 1$
- $\Delta(U, s_j) = \min_{i \in U : i \neq j} \Delta(U \setminus \{s_j\}, s_i) + \delta_{ij}$

Preuve : pour aller de $s_0$ à $s_j$,

- on choisit un point $s_i$
- on va de $s_0$ à $s_i$
- puis directement de $s_i$ à $s_j$

# Formule récursive pour $\Delta$

$\Delta(U, s_j)$ : longueur du plus court chemin de $s_0$ à $s_j$ visitant chaque $s_i \in U$ une fois exactement

## Lemme

- $\Delta(\{s_0\}, s_0) = 0$ *et* $\Delta(U, s_0) = +\infty$ *si* $|U| > 1$
- $\Delta(U, s_j) = \min_{i \in U : i \neq j} \Delta(U \setminus \{s_j\}, s_i) + \delta_{ij}$

Preuve : pour aller de $s_0$ à $s_j$,

- on choisit un point $s_i$
- on va de $s_0$ à $s_i$
- puis directement de $s_i$ à $s_j$

  $\rightsquigarrow$ il *suffit* de trouver le meilleur $s_i$ !

# Algorithme TSP

**Algorithme :** $\text{TSP}(S)$

$\Delta \leftarrow$ tableau à deux dimensions, indexé par les sous-ensembles de $S$ contenant $\{s_0\}$, et par les sommets $s_0$ à $s_{n-1}$

$\Delta_{[\{s_0\},s_0]} = 0$

**pour** $t = 2$ *à* $n$ **:**

  **pour** *tous les* $U \subset S$ *de taille* $t$ *tels que* $s_0 \in U$ **:**

    $\Delta_{[U,s_0]} = +\infty$

    **pour** *tout* $s_j \in U$, $j \neq 0$ **:**

      $\Delta_{[U,s_j]} = \min\{\Delta_{[U\setminus\{s_j\},s_i]} + \delta_{ij} : s_i \in U, i \neq j\}$

**renvoyer** $\min_j(\Delta_{[\{s_0,\ldots,s_n\},s_j]} + \delta_{j0})$

# Algorithme TSP

**Algorithme :** $\text{TSP}(S)$

$\Delta \leftarrow$ tableau à deux dimensions, indexé par les sous-ensembles de $S$ contenant $\{s_0\}$, et par les sommets $s_0$ à $s_{n-1}$

$\Delta_{[\{s_0\},s_0]} = 0$

**pour** $t = 2$ *à* $n$ **:**

  **pour** *tous les* $U \subset S$ *de taille* $t$ *tels que* $s_0 \in U$ **:**

    $\Delta_{[U,s_0]} = +\infty$

    **pour** *tout* $s_j \in U$, $j \neq 0$ **:**

      $\Delta_{[U,s_j]} = \min\{\Delta_{[U\setminus\{s_j\},s_i]} + \delta_{ij} : s_i \in U, i \neq j\}$

**renvoyer** $\min_j(\Delta_{[\{s_0,\ldots,s_n\},s_j]} + \delta_{j0})$

## Lemme

*L'algorithme* TSP *calcule* $\ell_S$ *en temps* $O(n^2 2^n)$

# Preuve de la complexité

**Algorithme :** $\text{TSP}(S)$

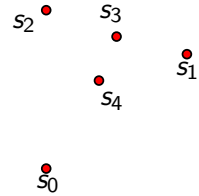
$\Delta \leftarrow$ tableau à deux dimensions, indexé par les sous-ensembles de
    $S$ contenant $\{s_0\}$, et par les sommets $s_0$ à $s_{n-1}$
$\Delta_{[\{s_0\},s_0]} = 0$
**pour** $t = 2$ *à* $n$ **:**
    **pour** *tous les* $U \subset S$ *de taille* $t$ *tels que* $s_0 \in U$ **:**
        $\Delta_{[U,s_0]} = +\infty$
        **pour** *tout* $s_j \in U$, $j \neq 0$ **:**
            $\Delta_{[U,s_j]} = \min\{\Delta_{[U\setminus\{s_j\},s_i]} + \delta_{ij} : s_i \in U, i \neq j\}$
**renvoyer** $\min_j(\Delta_{[\{s_0,\ldots,s_n\},s_j]} + \delta_{j0})$

## Preuve

- Calcul du min : $O(t)$ car $|U| = t$
- Boucle sur $s_j$ : $O(t^2)$
- Boucle sur $U$ : $\binom{n-1}{t-1}O(t^2)$ car $\binom{n-1}{t-1}$ sous-ensembles
- Boucle sur $t$ : $\sum_{t=2}^{n}\binom{n-1}{t-1}O(t^2) \leq O(n^2)\sum_t \binom{n}{t} = O(n^2 2^n)$

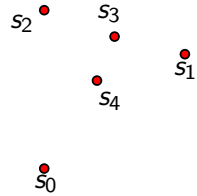
# Exemple

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | | | | |



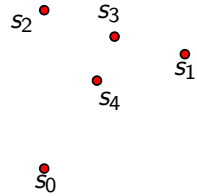
# Exemple

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | 20, 6 | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | | | | |



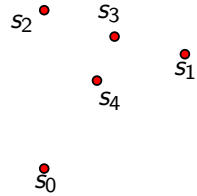
# Exemple

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | 20, 6 | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | 18 | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | | | | |



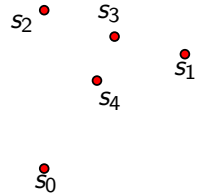
# Exemple

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | 20, 6 | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | 18 | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | 17 | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | | | | |



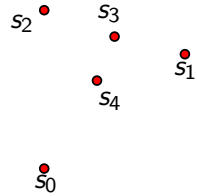
# Exemple

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | 20, 6 | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | 18 | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | 17 | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | 11, 7 |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | | | | |



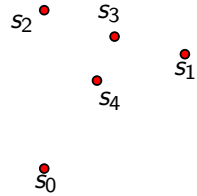
# Exemple

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | 20, 6 | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | 18 | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | 17 | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | 11, 7 |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | 34, 7 | | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | | | | |



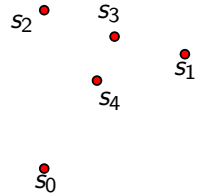
# Exemple

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | $20,6$ | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | $18$ | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | $17$ | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | $11,7$ |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | $34,7$ | $37,4$ | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | | | | |



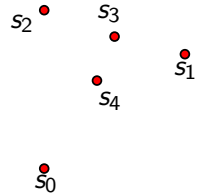
# Exemple

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | $20,6$ | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | $18$ | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | $17$ | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | $11,7$ |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | $34,7$ | $37,4$ | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | $25,2$ | | $28,9$ | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | | | | |



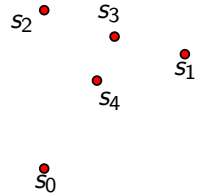
# Exemple

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | $20,6$ | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | $18$ | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | $17$ | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | $11,7$ |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | $34,7$ | $37,4$ | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | $25,2$ | | $28,9$ | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | $22,1$ | | | $31,1$ |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | | | | |



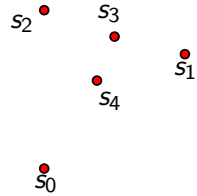
# Exemple

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | $20,6$ | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | $18$ | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | $17$ | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | $11,7$ |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | $34,7$ | $37,4$ | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | $25,2$ | | $28,9$ | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | $22,1$ | | | $31,1$ |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | $25,5$ | $26,5$ | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | | | | |



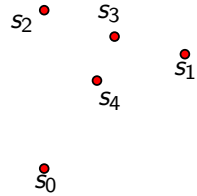
# Exemple

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | $20,6$ | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | $18$ | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | $17$ | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | $11,7$ |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | $34,7$ | $37,4$ | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | $25,2$ | | $28,9$ | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | $22,1$ | | | $31,1$ |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | $25,5$ | $26,5$ | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | $21,7$ | | $28$ |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | | | | |



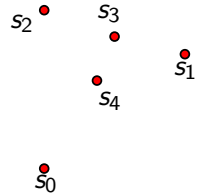
# Exemple

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | $20,6$ | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | $18$ | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | $17$ | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | $11,7$ |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | $34,7$ | $37,4$ | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | $25,2$ | | $28,9$ | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | $22,1$ | | | $31,1$ |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | $25,5$ | $26,5$ | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | $21,7$ | | $28$ |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | $17,0$ | $22,4$ |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | | | | |



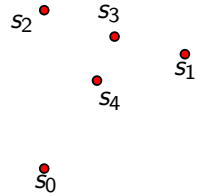
# Exemple

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | $20,6$ | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | 18 | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | 17 | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | $11,7$ |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | $34,7$ | $37,4$ | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | $25,2$ | | $28,9$ | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | $22,1$ | | | $31,1$ |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | $25,5$ | $26,5$ | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | $21,7$ | | 28 |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | $17,0$ | $22,4$ |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | $34,8$ | $37,4$ | $43,0$ | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | | | | |



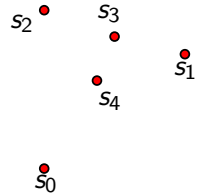
# Exemple

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | $20,6$ | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | $18$ | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | $17$ | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | $11,7$ |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | $34,7$ | $37,4$ | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | $25,2$ | | $28,9$ | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | $22,1$ | | | $31,1$ |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | $25,5$ | $26,5$ | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | $21,7$ | | $28$ |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | $17,0$ | $22,4$ |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | $34,8$ | $37,4$ | $43,0$ | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | $38,4$ | $38,9$ | | $45,2$ |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | | | | |



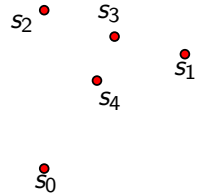
# Exemple

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | $20,6$ | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | $18$ | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | $17$ | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | $11,7$ |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | $34,7$ | $37,4$ | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | $25,2$ | | $28,9$ | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | $22,1$ | | | $31,1$ |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | $25,5$ | $26,5$ | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | $21,7$ | | $28$ |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | $17,0$ | $22,4$ |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | $34,8$ | $37,4$ | $43,0$ | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | $38,4$ | $38,9$ | | $45,2$ |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | $25,3$ | | $30,3$ | $34,2$ |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | | | | |



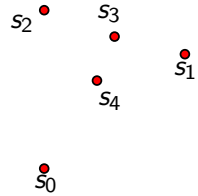
# Exemple

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | $20,6$ | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | $18$ | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | $17$ | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | $11,7$ |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | $34,7$ | $37,4$ | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | $25,2$ | | $28,9$ | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | $22,1$ | | | $31,1$ |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | $25,5$ | $26,5$ | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | $21,7$ | | $28$ |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | $17,0$ | $22,4$ |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | $34,8$ | $37,4$ | $43,0$ | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | $38,4$ | $38,9$ | | $45,2$ |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | $25,3$ | | $30,3$ | $34,2$ |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | $25,6$ | $30,2$ | $31,9$ |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | | | | |



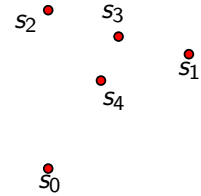
# Exemple

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | $20,6$ | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | $18$ | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | $17$ | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | $11,7$ |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | $34,7$ | $37,4$ | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | $25,2$ | | $28,9$ | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | $22,1$ | | | $31,1$ |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | $25,5$ | $26,5$ | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | $21,7$ | | $28$ |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | $17,0$ | $22,4$ |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | $34,8$ | $37,4$ | $43,0$ | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | $38,4$ | $38,9$ | | $45,2$ |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | $25,3$ | | $30,3$ | $34,2$ |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | $25,6$ | $30,2$ | $31,9$ |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | $38,5$ | $38,9$ | $46,7$ | $45,2$ |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | | | | |



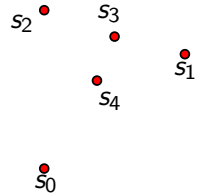
# Exemple

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | 20, 6 | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | 18 | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | 17 | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | 11, 7 |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | 34, 7 | 37, 4 | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | 25, 2 | | 28, 9 | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | 22, 1 | | | 31, 1 |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | 25, 5 | 26, 5 | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | 21, 7 | | 28 |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | 17, 0 | 22, 4 |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | 34, 8 | 37, 4 | 43, 0 | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | 38, 4 | 38, 9 | | 45, 2 |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | 25, 3 | | 30, 3 | 34, 2 |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | 25, 6 | 30, 2 | 31, 9 |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | 38, 5 | 38, 9 | 46, 7 | 45, 2 |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | 59, 1 | 56, 9 | 63, 7 | 56, 9 |



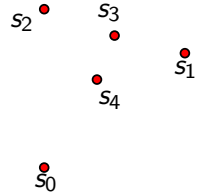
# Exemple

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | 20, 6 | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | 18 | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | 17 | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | 11, 7 |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | 34, 7 | 37, 4 | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | 25, 2 | | 28, 9 | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | 22, 1 | | | 31, 1 |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | 25, 5 | 26, 5 | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | 21, 7 | | 28 |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | 17, 0 | 22, 4 |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | 34, 8 | 37, 4 | 43, 0 | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | 38, 4 | 38, 9 | | 45, 2 |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | 25, 3 | | 30, 3 | 34, 2 |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | 25, 6 | 30, 2 | 31, 9 |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | 38, 5 | 38, 9 | 46, 7 | 45, 2 |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | 59, 1 | 56, 9 | 63, 7 | 56, 9 |



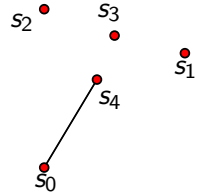
# Exemple : reconstruction

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | 20,6 | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | 18 | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | 17 | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | 11,7 |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | 34,7 | 37,4 | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | 25,2 | | 28,9 | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | 22,1 | | | 31,1 |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | 25,5 | 26,5 | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | 21,7 | | 28 |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | 17,0 | 22,4 |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | 34,8 | 37,4 | 43,0 | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | 38,4 | 38,9 | | 45,2 |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | 25,3 | | 30,3 | 34,2 |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | 25,6 | 30,2 | 31,9 |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | 38,5 | 38,9 | 46,7 | 45,2 |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | 59,1 | 56,9 | 63,7 | 56,9 |



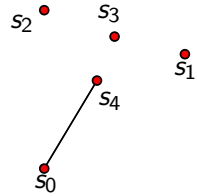
# Exemple : reconstruction

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | 20, 6 | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | 18 | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | 17 | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | 11, 7 |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | 34, 7 | 37, 4 | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | 25, 2 | | 28, 9 | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | 22, 1 | | | 31, 1 |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | 25, 5 | 26, 5 | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | 21, 7 | | 28 |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | 17, 0 | 22, 4 |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | 34, 8 | 37, 4 | 43, 0 | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | 38, 4 | 38, 9 | | 45, 2 |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | 25, 3 | | 30, 3 | 34, 2 |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | 25, 6 | 30, 2 | 31, 9 |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | 38, 5 | 38, 9 | 46, 7 | 45, 2 |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | 59, 1 | 56, 9 | 63, 7 | 56, 9 |



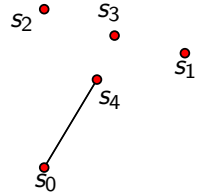
# Exemple : reconstruction

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | 20, 6 | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | 18 | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | 17 | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | 11, 7 |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | 34, 7 | 37, 4 | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | 25, 2 | | 28, 9 | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | 22, 1 | | | 31, 1 |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | 25, 5 | 26, 5 | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | 21, 7 | | 28 |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | 17, 0 | 22, 4 |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | 34, 8 | 37, 4 | 43, 0 | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | 38, 4 | 38, 9 | | 45, 2 |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | 25, 3 | | 30, 3 | 34, 2 |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | 25, 6 | 30, 2 | 31, 9 |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | 38, 5 | 38, 9 | 46, 7 | 45, 2 |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | 59, 1 | 56, 9 | 63, 7 | 56, 9 |



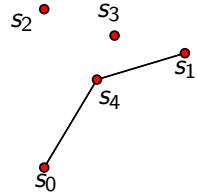
# Exemple : reconstruction

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | 20, 6 | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | 18 | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | 17 | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | 11, 7 |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | 34, 7 | 37, 4 | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | 25, 2 | | 28, 9 | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | 22, 1 | | | 31, 1 |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | 25, 5 | 26, 5 | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | 21, 7 | | 28 |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | 17, 0 | 22, 4 |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | 34, 8 | 37, 4 | 43, 0 | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | 38, 4 | 38, 9 | | 45, 2 |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | 25, 3 | | 30, 3 | 34, 2 |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | 25, 6 | 30, 2 | 31, 9 |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | 38, 5 | 38, 9 | 46, 7 | 45, 2 |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | 59, 1 | 56, 9 | 63, 7 | 56, 9 |



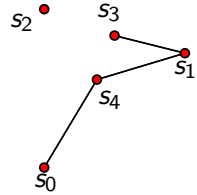
# Exemple : reconstruction

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | 20,6 | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | 18 | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | 17 | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | 11,7 |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | 34,7 | 37,4 | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | 25,2 | | 28,9 | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | 22,1 | | | 31,1 |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | 25,5 | 26,5 | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | 21,7 | | 28 |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | 17,0 | 22,4 |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | 34,8 | 37,4 | 43,0 | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | 38,4 | 38,9 | | 45,2 |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | 25,3 | | 30,3 | 34,2 |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | 25,6 | 30,2 | 31,9 |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | 38,5 | 38,9 | 46,7 | 45,2 |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | 59,1 | 56,9 | 63,7 | 56,9 |



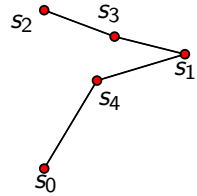
# Exemple : reconstruction

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | 20, 6 | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | 18 | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | 17 | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | 11, 7 |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | 34, 7 | 37, 4 | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | 25, 2 | | 28, 9 | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | 22, 1 | | | 31, 1 |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | 25, 5 | 26, 5 | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | 21, 7 | | 28 |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | 17, 0 | 22, 4 |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | 34, 8 | 37, 4 | 43, 0 | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | 38, 4 | 38, 9 | | 45, 2 |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | 25, 3 | | 30, 3 | 34, 2 |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | 25, 6 | 30, 2 | 31, 9 |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | 38, 5 | 38, 9 | 46, 7 | 45, 2 |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | 59, 1 | 56, 9 | 63, 7 | 56, 9 |



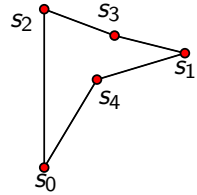
# Exemple : reconstruction

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | 20, 6 | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | 18 | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | 17 | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | 11, 7 |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | 34, 7 | 37, 4 | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | 25, 2 | | 28, 9 | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | 22, 1 | | | 31, 1 |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | 25, 5 | 26, 5 | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | 21, 7 | | 28 |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | 17, 0 | 22, 4 |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | 34, 8 | 37, 4 | 43, 0 | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | 38, 4 | 38, 9 | | 45, 2 |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | 25, 3 | | 30, 3 | 34, 2 |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | 25, 6 | 30, 2 | 31, 9 |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | 38, 5 | 38, 9 | 46, 7 | 45, 2 |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | 59, 1 | 56, 9 | 63, 7 | 56, 9 |



# Exemple : reconstruction

| | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{s_0\}$ | 0 | | | | |
| $\{s_0, s_1\}$ | $+\infty$ | 20, 6 | | | |
| $\{s_0, s_2\}$ | $+\infty$ | | 18 | | |
| $\{s_0, s_3\}$ | $+\infty$ | | | 17 | |
| $\{s_0, s_4\}$ | $+\infty$ | | | | 11, 7 |
| $\{s_0, s_1, s_2\}$ | $+\infty$ | 34, 7 | 37, 4 | | |
| $\{s_0, s_1, s_3\}$ | $+\infty$ | 25, 2 | | 28, 9 | |
| $\{s_0, s_1, s_4\}$ | $+\infty$ | 22, 1 | | | 31, 1 |
| $\{s_0, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | | 25, 5 | 26, 5 | |
| $\{s_0, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | | 21, 7 | | 28 |
| $\{s_0, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | | 17, 0 | 22, 4 |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ | $+\infty$ | 34, 8 | 37, 4 | 43, 0 | |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$ | $+\infty$ | 38, 4 | 38, 9 | | 45, 2 |
| $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | 25, 3 | | 30, 3 | 34, 2 |
| $\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | | 25, 6 | 30, 2 | 31, 9 |
| $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | $+\infty$ | 38, 5 | 38, 9 | 46, 7 | 45, 2 |
| $\min_j(\Delta_{[S,s_j]} + \delta_{j0})$ | | 59, 1 | 56, 9 | 63, 7 | 56, 9 |



# Algorithme de reconstruction

**Algorithme :** $\textsc{tsp}(S)$

$\Delta \leftarrow$ tableau à deux dimensions, indexé par les sous-ensembles de $S$ contenant $\{s_0\}$, et par les sommets $s_0$ à $s_{n-1}$

Prec $\leftarrow$ tableau de mêmes dimensions

$\Delta_{[\{s_0\},s_0]} = 0$

**pour** $t = 2$ *à* $n$ **:**

  **pour** *tous les* $U \subset S$ *de taille* $t$ *tels que* $s_0 \in U$ **:**

    $\Delta_{[U,s_0]} = +\infty$

    **pour** *tout* $s_j \in U$, $j \neq 0$ **:**

      $\Delta_{[U,s_j]} = \min\{\Delta_{[U\setminus\{s_j\},s_i]} + \delta_{ij} : s_i \in U, i \neq j\}$

      $\text{Prec}_{[U,s_j]} \leftarrow$ indice du minimum

**renvoyer** $\min_j(\Delta_{[\{s_0,\ldots,s_n\},s_j]} + \delta_{j0})$, *indice du min et Prec*

# Algorithme de reconstruction

**Algorithme :** TSP$(S)$

$\Delta \leftarrow$ tableau à deux dimensions, indexé par les sous-ensembles de $S$ contenant $\{s_0\}$, et par les sommets $s_0$ à $s_{n-1}$

Prec $\leftarrow$ tableau de mêmes dimensions

$\Delta_{[\{s_0\},s_0]} = 0$

**pour** $t = 2$ *à* $n$ **:**

  **pour** *tous les* $U \subset S$ *de taille* $t$ *tels que* $s_0 \in U$ **:**

    $\Delta_{[U,s_0]} = +\infty$

    **pour** *tout* $s_j \in U$, $j \neq 0$ **:**

      $\Delta_{[U,s_j]} = \min\{\Delta_{[U\setminus\{s_j\},s_i]} + \delta_{ij} : s_i \in U, i \neq j\}$

      $\text{Prec}_{[U,s_j]} \leftarrow$ indice du minimum

**renvoyer** $\min_j(\Delta_{[\{s_0,\ldots,s_n\},s_j]} + \delta_{j0})$, *indice du min et Prec*

**Algorithme :** TSP-REC$(S, \Delta, \text{Prec}, j)$

$i_0 \leftarrow 0$

$i_1 \leftarrow j$

$U \leftarrow S$

**pour** $k = 2$ *à* $n-1$ **:**

  $i_k \leftarrow \text{Prec}_{[U,i_{k-1}]}$

  $U \leftarrow U \setminus \{s_{i_{k-1}}\}$

**renvoyer** $(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i_0)$

# Algorithme de reconstruction

**Algorithme :** TSP($S$)

$\Delta \leftarrow$ tableau à deux dimensions, indexé par les sous-ensembles de $S$ contenant $\{s_0\}$, et par les sommets $s_0$ à $s_{n-1}$

Prec $\leftarrow$ tableau de mêmes dimensions

$\Delta_{[\{s_0\},s_0]} = 0$

**pour** $t = 2$ *à* $n$ **:**

  **pour** *tous les* $U \subset S$ *de taille* $t$ *tels que* $s_0 \in U$ **:**

    $\Delta_{[U,s_0]} = +\infty$

    **pour** *tout* $s_j \in U$, $j \neq 0$ **:**

      $\Delta_{[U,s_j]} = \min\{\Delta_{[U\setminus\{s_j\},s_i]} + \delta_{ij} : s_i \in U, i \neq j\}$

      $\mathrm{Prec}_{[U,s_j]} \leftarrow$ indice du minimum

**renvoyer** $\min_j(\Delta_{[\{s_0,\ldots,s_n\},s_j]} + \delta_{j0})$, *indice du min et Prec*

**Algorithme :** TSP-REC($S, \Delta, \mathrm{Prec}, j$)

$i_0 \leftarrow 0$

$i_1 \leftarrow j$

$U \leftarrow S$

**pour** $k = 2$ *à* $n-1$ **:**

  $i_k \leftarrow \mathrm{Prec}_{[U,i_{k-1}]}$

  $U \leftarrow U \setminus \{s_{i_{k-1}}\}$

**renvoyer** $(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i_0)$

## Lemme

*L'algorithme* TSP-REC *construit un chemin de longueur minimale en temps* $O(n)$

# Bilan

**Théorème**

*La longueur minimale d'un chemin passant par $n$ points peut être calculée en temps $O(n^2 2^n)$. Le chemin lui-même peut être calculé en temps $O(n)$ supplémentaire.*

# Bilan

**Théorème**

*La longueur minimale d'un chemin passant par $n$ points peut être calculée en temps $O(n^2 2^n)$. Le chemin lui-même peut être calculé en temps $O(n)$ supplémentaire.*

- Détails à régler : gestion des ensembles
  - théorie : pas de problème (bonne complexité)
  - pratique : pas si facile !

# Bilan

**Théorème**

*La longueur minimale d'un chemin passant par n points peut être calculée en temps $O(n^2 2^n)$. Le chemin lui-même peut être calculé en temps $O(n)$ supplémentaire.*

- Détails à régler : gestion des ensembles
  - théorie : pas de problème (bonne complexité)
  - pratique : pas si facile !
- Fonctionne aussi hors d'un plan euclidien (carte, plans, graphes, ...)

# Bilan

**Théorème**

*La longueur minimale d'un chemin passant par n points peut être calculée en temps $O(n^2 2^n)$. Le chemin lui-même peut être calculé en temps $O(n)$ supplémentaire.*

- Détails à régler : gestion des ensembles
  - théorie : pas de problème (bonne complexité)
  - pratique : pas si facile !
- Fonctionne aussi hors d'un plan euclidien (carte, plans, graphes, ...)
- Très utile en pratique comme en théorie !

# Bilan

**Théorème**

*La longueur minimale d'un chemin passant par n points peut être calculée en temps $O(n^2 2^n)$. Le chemin lui-même peut être calculé en temps $O(n)$ supplémentaire.*

- Détails à régler : gestion des ensembles
  - théorie : pas de problème (bonne complexité)
  - pratique : pas si facile !
- Fonctionne aussi hors d'un plan euclidien (carte, plans, graphes, ...)
- Très utile en pratique comme en théorie !
- Un exemple : `http://map.vroom-project.org/`

# Conclusion sur la programmation dynamique

- Méthode assez systématique pour de nombreux problèmes
- Souvent :
  - version simple en *bonne* complexité
  - améliorations possibles
- Parfois (trop) gourmande en mémoire

# Conclusion sur la programmation dynamique

- Méthode assez systématique pour de nombreux problèmes
- Souvent :
  - version simple en *bonne* complexité
  - améliorations possibles
- Parfois (trop) gourmande en mémoire

## Également aperçu dans ce cours

- Algorithme exact exponentiel (TSP)
- Plus courts chemins dans des graphes (DIJKSTRA)