TD3 : Algorithmes gloutons

Autour des algorithmes du cours

Exercice 1. *Choix d'autres cours*

On propose des approches différentes pour le problème de choix de cours. Pour chacune d'elle, prouver qu'elle fournit un choix optimal ou au contraire, montrer sur un exemple qu'elle peut ne pas retourner un choix optimal.

1. Parmi les cours non encore sélectionnés et compatibles avec les cours déjà sélectionnés, choisir le cours qui commence le plus tôt possible.
2. Parmi les cours non encore sélectionnés et compatibles avec les cours déjà sélectionnés, choisir le cours qui commence le plus tard possible.
3. Parmi les activités non encore sélectionnées et compatibles avec les activités sélectionnées, choisir l'activité la plus courte.
4. Parmi les cours non encore sélectionnés et compatibles avec les cours déjà sélectionnés, choisir le cours incompatible avec le moins de cours possibles.

Exercice 2. *Sac-à-dos avec morceaux*

On a trois objets non cassables à emporter : un vase précieux de 2kg valant 100€, une bouteille de grand cru pesant 1kg valant 60€ et un tableau de maître de 3kg valant 120€. Pour cela on dispose d'un sac à dos pouvant contenir jusqu'à 5kg.

✎ Montrer que le choix fait par l'algorithme glouton fractionnaire ne donne pas un choix optimal.

Exercice 3. *L'épreuve du Sac-à-Dos*

On souhaite prouver la validité de l'algorithme SÀDFRACGLOUTON du cours, en montrant que le problème du sac-à-dos fractionnaire vérifie le lemme d'optimalité donné en cours.

On considère une instance $(T, (t_1, v_1), \ldots, (t_n, v_n))$ du problème, où les objets sont classés par ratios v_i/t_i strictement[1] décroissants.

1. On suppose que $t_1 > T$. Montrer que SÀDFRACGLOUTON renvoie une solution optimale.
2. On suppose maintenant $t_1 \leq T$. Montrer qu'une solution optimale est faite de l'objet 1 dans son intégralité et d'une solution optimale pour un sac-à-dos de taille $T - t_1$, avec les objets 2 à n.
3. Conclure.

Exercice 4. *Pas sur mon toit !*

On veut préciser une implémentation possible pour l'algorithme approchant l'optimal de SETCOVER vu en cours.

✎ Proposer une telle implémentation et estimer sa complexité en temps.

Approche gloutonne pour d'autres problèmes

Exercice 5. SETCOVER *en dimension 1*

On s'intéresse au problème de SETCOVER en dimension 1. Autrement dit, on considère n maisons le long d'une route repérées par leur distance en mètres $\{x_1, \ldots, x_n\}$ au début de la route. On suppose les valeurs $(x_1, \ldots, x_n)$ classées par ordre croissant. Le but est de disposer sur la route (pas forcément sur une maison) des émetteurs afin de couvrir toutes les maisons. Un émetteur couvre toutes les maisons situées à moins de 500m de l'endroit où il se trouve. On souhaite, bien entendu, minimiser le nombre d'émetteurs à positionner.

1. Si deux ratios étaient égaux, on pourrait *fusionner* les objets correspondants.

✎ Proposer un algorithme pour résoudre ce problème et prouver la validité de votre algorithme.

Exercice 6. *Rendu de monnaie*

On veut programmer une caisse automatique pour rendre la monnaie afin qu'elle délivre le moins de pièce possible. On suppose que la caisse doit rendre S centimes (avec S multiple de 10).

1. Construire un algorithme glouton qui répond au problème avec des pièces à rendre de 50, 20, 10 centimes, supposées en quantité infinie.
2. Donner un autre jeu de pièces (existant réellement ou pas) pour lequel l'algorithme précédent ne fonctionne pas.
3. Prouver la validité de l'algorithme proposé en question 1.
4. *(bonus)* Montrer que l'algorithme proposé en question 1. est optimal tout ensemble de pièces de la forme p^0, p^1, ..., p^k où $p > 1$ et $k \geq 1$ sont deux entiers.

Exercice 7. *Station service*

Un étudiant voyageur prévoit de faire le trajet Berlin Barcelone en voiture. Son réservoir plein lui permet de faire une distance de p kilomètres. Il souhaite faire le moins d'arrêts possibles pour faire le plein.

✎ Proposer un algorithme pour résoudre ce problème et prouver la validité de votre algorithme.

Exercice 8. *Stockage sur bande magnétique*

Pour stocker des quantités très importantes de données, la solution encore privilégiée est l'utilisation de bandes magnétiques[2]. Lorsqu'on souhaite lire une donnée sur une bande magnétique, le temps d'accès dépend de l'emplacement de la donnée : plus elle est loin, plus elle est longue à récupérer.

On souhaite optimiser le temps d'accès à des fichiers sur bande magnétique. On modélise le problème de la façon suivante : si on stocke n fichiers P_1, ..., P_n, de tailles respectives t_1, ..., t_n, dans cet ordre sur la bande, le coût d'accès au fichier P_k est $c(k) = \sum_{i=1}^{k} t_i$.

1. Calculer le *coût moyen* d'accès à un fichier, en supposant qu'on accède aussi fréquemment à chaque fichier.
2. Concevoir un algorithme glouton pour minimiser le coût moyen d'accès à chaque fichier. Estimer sa complexité et démontrer sa validité.
3. Supposons maintenant qu'on dispose, pour chaque fichier P_i, de sa fréquence f_i d'accès, de telle sorte que $\sum_{i=1}^{n} f_i = 1$. Adapter l'algorithme précédent pour qu'il ordonne toujours de manière optimale les fichiers sur la bande.

Exercice 9. *Utilisation de la mémoire*

On souhaite enregistrer sur une mémoire de taille L un groupe de fichiers $P = (P_1, \ldots, P_n)$. Chaque fichier P_i a une taille t_i. Supposons que $\sum t_i > L$: on ne peut pas enregistrer tous les fichiers. Il s'agit donc de choisir un sous-ensemble de fichiers à enregistrer.

On pourrait souhaiter le sous-ensemble qui contient le plus grand nombre de fichiers. Un algorithme glouton pour ce problème pourrait par exemple ranger les fichiers par ordre croissant des t_i.

Supposons que les P_i soient ordonnés par taille ($t_1 \leq \cdots \leq t_n$).

1. Écrivez un algorithme pour la stratégie présentée ci-dessus et analyser sa complexité. *Cet algorithme doit renvoyer un tableau booléen S tel que $S[i] = 1$ si P_i est enregistré et $S[i] = 0$ sinon.*
2. Montrer que l'algorithme proposé est optimal : le sous-ensemble Q calculé est maximal tel que $\sum_{P_i \in Q} t_i \leq L$.

2. *Malgré les progrès très importants réalisés en matière de techniques de stockage sur disques magnétiques ou optiques à la fin du XXe siècle, les bandes magnétiques restent un support privilégié de sauvegarde et d'archivage des données en raison de leur très grande capacité, de leur bon rapport qualité/prix et de leur caractère amovible qui permettent de les délocaliser aisément. Au XXIe siècle, elles sont ainsi utilisées dans les « fermes » de serveurs sur PC c'est-à-dire pour les grands sites web.* (source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Bande_magnétique)

Supposons maintenant que l'on souhaite enregistrer le sous-ensemble Q de P qui maximise le quotient d'utilisation, c'est-à-dire celui qui remplit le plus de disque.

3. Soit Q le sous-ensemble obtenu par l'algorithme glouton précédent. À quel point le quotient d'utilisation $(\sum_{P_i \in Q} t_i)/L$ peut-il être petit ? En particulier, à quel point le rapport entre ce quotient d'utilisation et le quotient maximal peut-il être petit ?

Une approche *gloutonne* consisterait à considérer les fichiers dans l'ordre décroissant des t_i et, s'il reste assez d'espace pour P_i, on l'ajoute à Q.

4. On suppose toujours les P_i ordonnés par taille croissante. Écrivez un algorithme pour cette nouvelle stratégie.
5. Montrer que cette nouvelle stratégie ne donne pas nécessairement un sous-ensemble qui maximise le quotient d'utilisation. À quel point ce quotient peut-il être petit ? Prouvez-le.