Chapitre 1

Introduction

HLIN401 : Algorithmique et complexité

L2 Informatique
Université de Montpellier
2020 – 2021

Déroulement du cours

- Responsable : B. Grenet (`bruno.grenet@umontpellier.fr`)

Déroulement du cours

- Responsable : B. Grenet (`bruno.grenet@umontpellier.fr`)

- Cours : lundi 9h45-11h15, amphi 6.04 (*sauf changement*)
- TD/TP : par groupes (*cf* emploi du temps en ligne)

A+CMI	B. Grenet
B	E. Gurpınar
C	B. Grenet
D	A. Perret du Cray

Déroulement du cours

- Responsable : B. Grenet (`bruno.grenet@umontpellier.fr`)

- Cours : lundi 9h45-11h15, amphi 6.04 (*sauf changement*)
- TD/TP : par groupes (*cf* emploi du temps en ligne)

  A+CMI B. Grenet
  B E. Gurpınar
  C B. Grenet
  D A. Perret du Cray

- Évaluations : CC + Examen. Note $= \max(E, 30\%CC + 70\%E)$
  - Partiel type examen (15 pts) : *a priori* le 8 mars
  - TP (5 pts) : **tous** les TPs à rendre, via Moodle, avec correction automatique et détection de plagiat

Déroulement du cours

- Responsable : B. Grenet (`bruno.grenet@umontpellier.fr`)

- Cours : lundi 9h45-11h15, amphi 6.04 (*sauf changement*)
- TD/TP : par groupes (*cf* emploi du temps en ligne)

A+CMI	B. Grenet
B	E. Gurpınar
C	B. Grenet
D	A. Perret du Cray

- Évaluations : CC + Examen. Note = $\max(E, 30\%CC + 70\%E)$
  - Partiel type examen (15 pts) : *a priori* le 8 mars
  - TP (5 pts) : **tous** les TPs à rendre, via Moodle, avec correction automatique et détection de plagiat
- **Moodle – cours HLIN401 : à consulter impérativement !**

En cas de distanciel

Moodle encore plus important !

En cas de distanciel

Moodle encore plus important !

- Cours :
  - Vidéos en ligne
  - Séances de questions / réponses

En cas de distanciel

Moodle encore plus important !

- Cours :
  - Vidéos en ligne
  - Séances de questions / réponses
- TD : séances en visio, *via* BBB (ou autre outil)
- TP :
  - Si possible, en présentiel
  - Sinon, autonomie + séances d'aide

1. Exemple introductif : calculer x^n

2. Modèle pour la complexité algorithmique

3. Conception et analyse d'un algorithme

4. Outils mathématiques

Le problème

Pour un réel x et un entier $n \geq 1$, on veut calculer x^n

Le problème

Pour un réel x et un entier $n \geq 1$, on veut calculer x^n

Pour cela on va

- proposer plusieurs **algorithmes** et les analyser :
- démontrer leur **correction**
- estimer leur **complexité**
  (= temps nécessaire au déroulement du programme)
- voir une implémentation possible

Le problème

Pour un réel x et un entier $n \geq 1$, on veut calculer x^n

Pour cela on va

- proposer plusieurs **algorithmes** et les analyser :
- démontrer leur **correction**
- estimer leur **complexité**
  (= temps nécessaire au déroulement du programme)
- voir une implémentation possible

Remarque. Problème très utile en pratique !
(résolution d'équa. diff., codes correcteurs, crypto : RSA, courbes elliptiques...)

Algo 1 : multiplications successives

Algorithme : ALGOIT(x, n)

y un réel

$y \longleftarrow x$

pour tous les *i de 1 à* $n-1$ **faire**

  $y \longleftarrow x \times y$

renvoyer y

Algo 1 : multiplications successives

Algorithme : $\textsc{AlgoIt}(x, n)$

y un réel

$y \longleftarrow x$

pour tous les i *de 1 à* $n-1$ **faire**

  $y \longleftarrow x \times y$

renvoyer y

Un petit exemple :

On effectue **l'appel** $\textsc{AlgoIt}(2, 5)$:

- Initialisation de y : $y = 2$
- Étape $i = 1$: $y = 2 \times 2 = 4$
- Étape $i = 2$: $y = 2 \times 4 = 8$
- Étape $i = 3$: $y = 2 \times 8 = 16$
- Étape $i = 4$: $y = 2 \times 16 = 32$

- **L'algo retourne 32**

Algo 1 : multiplications successives

Algorithme : ALGOIT(x, n)

y un réel

$y \longleftarrow x$

pour tous les *i de 1 à $n-1$* **faire**

  $y \longleftarrow x \times y$

renvoyer y

Terminaison

À la fin de la boucle **pour**, l'algo. termine.

Algo 1 : multiplications successives

Algorithme : AlgoIt(x, n)

y un réel
$y \longleftarrow x$
pour tous les i *de 1 à* $n-1$ **faire**
  $y \longleftarrow x \times y$
renvoyer y

Complexité (en temps)

Nombre d'*opérations élémentaires* :

- Récupérations de x et n, déclaration de y ; affectation ($y \leftarrow x$), retour $\rightsquigarrow$ **5 op.**
- Dans la boucle **pour** : incrémentation de i ; multiplication et affectation ($y \leftarrow x \times y$) $\rightsquigarrow$ **3 op.**
- $n-1$ répétitions de la boucle $\rightsquigarrow$ $\mathbf{3n+2}$ **op.**

$\rightsquigarrow$ **Complexité en temps $O(n)$**

Algo 1 : multiplications successives

Algorithme : AlgoIt(x, n)

y un réel

$y \longleftarrow x$

pour tous les i *de 1 à* $n-1$ **faire**

  $y \longleftarrow x \times y$

renvoyer y

Correction : preuve d'un **invariant de l'algo.**

$\mathcal{P}_i$: « *après i tours de boucle, y contient x^{i+1}* »

Algo 1 : multiplications successives

Algorithme : AlgoIt(x, n)

y un réel

$y \longleftarrow x$

pour tous les i *de 1 à* $n-1$ **faire**

  $y \longleftarrow x \times y$

renvoyer y

Correction : preuve d'un **invariant de l'algo.**

$\mathcal{P}_i$: « *après i tours de boucle, y contient* x^{i+1} »

Preuve par **récurrence** (quelle surprise...) :

- Pour $i = 0$, $\mathcal{P}_0$ est vraie : avant la boucle, y vaut x $(= x^1)$.
- Supposons $\mathcal{P}_{i-1}$ pour $i \geq 1$: après $(i-1)$ tours, y contient $x^{(i-1)+1} = x^i$. Alors au $i^{\text{ème}}$ tour, y prend la valeur $x \times y = x^{i+1}$. Donc $\mathcal{P}_i$ est vraie.

Donc, par récurrence, $y = x^n$ à la fin de l'algo. ■

Algo 1 : multiplications successives

Algorithme : ALGOIT(x, n)

y un réel

$y \longleftarrow x$

pour tous les *i de 1 à* $n-1$ **faire**

  $y \longleftarrow x \times y$

renvoyer y

Exemple de code :

```
float AlgoIt(float x, int n)
{
    float y;
    y = x;
    for (int i = 1; i < n; i++)
        y *= x;
    return y;
}

int main(int argc, char** argv)
{
    float x = strtod(argv[1], NULL);
    int n = strtol(argv[2], NULL, 0);
    cout << AlgoIt(x, n) << endl;
    return 0;
}
```

Algo 2 : Diviser pour régner

Algorithme : AlgoD&C(x, n)

si $n = 1$ **: renvoyer** x

sinon :

- $z =$AlgoD&C$(x, \lfloor n/2 \rfloor)$
- **si** n *est pair* **: renvoyer** $z \times z$
- **si** n *est impair* **: renvoyer** $x \times z \times z$

Algo 2 : Diviser pour régner

Algorithme : AlgoD&C(x, n)

si $n = 1$ **: renvoyer** x
sinon :
  $z =$AlgoD&C$(x, \lfloor n/2 \rfloor)$
  si n *est pair* **: renvoyer** $z \times z$
  si n *est impair* **: renvoyer** $x \times z \times z$

Un petit exemple :

On effectue **l'appel AlgoD&C**$(3, 5)$:

- AlgoD&C$(3, 5)$ calcule $z =$ AlgoD&C$(3, 2)$ et retourne $3z^2$
- AlgoD&C$(3, 2)$ calcule $z =$ AlgoD&C$(3, 1)$ et retourne z^2
- AlgoD&C$(3, 1)$ retourne 3

Algo 2 : Diviser pour régner

Algorithme : ALGOD&C(x, n)

si $n = 1$ **: renvoyer** x

sinon :

- $z =$ALGOD&C$(x, \lfloor n/2 \rfloor)$
- **si** *n est pair* **: renvoyer** $z \times z$
- **si** *n est impair* **: renvoyer** $x \times z \times z$

Un petit exemple :

On effectue **l'appel ALGOD&C**$(3, 5)$:

- ALGOD&C$(3, 5)$ calcule $z =$ ALGOD&C$(3, 2)$ et retourne $3z^2$
- ALGOD&C$(3, 2)$ calcule $z =$ ALGOD&C$(3, 1)$ et retourne z^2
- ALGOD&C$(3, 1)$ retourne 3
- Du coup, ALGOD&C$(3, 2)$ retourne $3^2 = 9$
- Du coup, **ALGOD&C**$(3, 5)$ **retourne** $\mathbf{3 \times 9^2 = 243}$

Algo 2 : Diviser pour régner

Algorithme : ALGOD&C(x, n)

si $n = 1$ **: renvoyer** x
sinon :
  $z =$ALGOD&C(x, $\lfloor n/2 \rfloor$)
  si n *est pair* **: renvoyer** $z \times z$
  si n *est impair* **: renvoyer** $x \times z \times z$

Terminaison

- **Nombre constant d'opérations** (≤ 5) + un appel récursif
- Appel récursif sur un **paramètre strictement plus petit** mais toujours ≥ 1 (*variant* de l'algo.)
- **Cas de base** présent

$\rightsquigarrow$ L'algorithme termine.

Algo 2 : Diviser pour régner

Algorithme : AlgoD&C(x, n)

si $n = 1$ **: renvoyer** x
sinon :
  $z =$AlgoD&C$(x, \lfloor n/2 \rfloor)$
  si n *est pair* **: renvoyer** $z \times z$
  si n *est impair* **: renvoyer** $x \times z \times z$

Complexité

Nombre constant d'opérations
$\rightsquigarrow$ complexité **proportionnelle au nombre d'appels récursifs**

Algo 2 : Diviser pour régner

Algorithme : $\textsc{AlgoD\&C}(x, n)$

si $n = 1$ **: renvoyer** x
sinon :
- $z = \textsc{AlgoD\&C}(x, \lfloor n/2 \rfloor)$
- **si** n *est pair* **: renvoyer** $z \times z$
- **si** n *est impair* **: renvoyer** $x \times z \times z$

Nombre d'appels récursifs (nb de fois qu'on peut diviser n par 2 $\rightsquigarrow \log n$)

$$\mathcal{P}_n : \ll \textsc{AlgoD\&C}(x, n) \textit{ fait au plus } \log n \textit{ appels récursifs} \gg$$

Algo 2 : Diviser pour régner

Algorithme : AlgoD&C(x, n)

si $n = 1$ **: renvoyer** x
sinon :
  $z =$AlgoD&C$(x, \lfloor n/2 \rfloor)$
  si n *est pair* **: renvoyer** $z \times z$
  si n *est impair* **: renvoyer** $x \times z \times z$

Nombre d'appels récursifs (nb de fois qu'on peut diviser n par 2 $\rightsquigarrow$ $\log n$)

$\mathcal{P}_n$: « AlgoD&C(x, n) *fait au plus* $\log n$ *appels récursifs* »

- $n = 1$: aucun appel récursif et $\log(1) = 0$
- Soit $n \geq 2$ et supposons $\mathcal{P}_p$ **pour tout** $\boldsymbol{p < n}$: le nombre d'appels de AlgoD&C$(x, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ est au plus $\log(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \leq \log(\frac{n}{2}) = \log(n) - 1$. Donc le nombre d'appels de AlgoD&C(x, n) est $\leq 1 + (\log(n) - 1) = \log(n)$.

$\rightsquigarrow$ **Complexité au plus proportionnelle à log $\boldsymbol{n}$** (en $O(\log n)$)

Algo 2 : Diviser pour régner

Algorithme : $\textsc{AlgoD\&C}(x, n)$

si $n = 1$ **: renvoyer** x
sinon :

- $z = \textsc{AlgoD\&C}(x, \lfloor n/2 \rfloor)$
- **si** *n est pair* **: renvoyer** $z \times z$
- **si** *n est impair* **: renvoyer** $x \times z \times z$

Correction :

$\mathcal{P}_n$: ≪ $\textsc{AlgoD\&C}(x, n)$ *renvoie* x^n ≫

Algo 2 : Diviser pour régner

Algorithme : ALGOD&C(x, n)

si $n = 1$ **: renvoyer** x

sinon :

- $z =$ ALGOD&C$(x, \lfloor n/2 \rfloor)$
- **si** n *est pair* **: renvoyer** $z \times z$
- **si** n *est impair* **: renvoyer** $x \times z \times z$

Correction : $\mathcal{P}_n$: « ALGOD&C(x, n) *renvoie* x^n »

- $n = 1$: ALGOD&C$(x, 1)$ renvoie $x \rightsquigarrow \mathcal{P}_1$ est vraie
- Soit $n \geq 2$ et supposons $\mathcal{P}_p$ pour tout $p < n$: ALGOD&C$(x, \lfloor n/2 \rfloor)$ renvoie $z = x^{\lfloor n/2 \rfloor}$ (car $\lfloor n/2 \rfloor < n$!).
  - Si n est pair : $n = 2 \times \lfloor n/2 \rfloor$ et ALGOD&C(x, n) renvoie $z \times z = x^{\lfloor n/2 \rfloor} \times x^{\lfloor n/2 \rfloor} = x^n$.
  - Si n est impair, $n = 2 \times \lfloor n/2 \rfloor + 1$ et ALGOD&C(x, n) renvoie $x \times z \times z = x^{2\lfloor n/2 \rfloor + 1} = x^n$.

Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie. ■

Algo 2 : Diviser pour régner

Algorithme : AlgoD&C(x, n)

si $n = 1$ **: renvoyer** x

sinon :

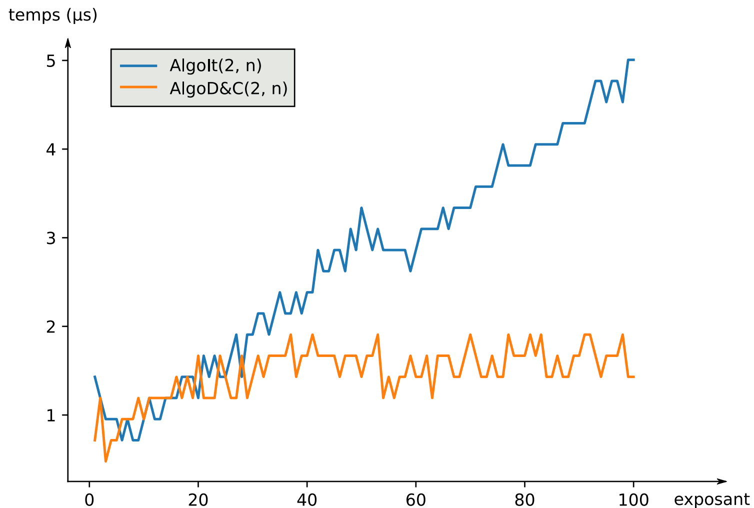
- $z =$ AlgoD&C$(x, \lfloor n/2 \rfloor)$
- **si** *n est pair* **: renvoyer** $z \times z$
- **si** *n est impair* **: renvoyer** $x \times z \times z$

Exemple de code :

```
float AlgoDC(float x, int n)
{
    if (n == 1) return x;
    float z = AlgoDC(x, n/2);
    if (n % 2 == 0) return z*z;
    /* else */ return x*z*z;
}
```

```
int main(int argc, char** argv)
{
    float x = strtod(argv[1], NULL);
    int n = strtol(argv[2], NULL, 0);
    cout << AlgoDC(x, n) << endl;
    return 0;
}
```

Comparaison : AlgoIt *vs.* AlgoD&C



Remarque : $O(n)$ croît plus vite que $O(\log n)$...

Algo 3 : Arnaque

Algorithme : ALGOARNAQUE(x, n)
renvoyer $pow(x, n)$

Exemple de code :

```
#include <math.h>

float AlgoArnaque(float x, int n)
{
  return pow(x, n);
}

int main(int argc, char** argv)
{
    float x = strtod(argv[1], NULL);
    int n = strtol(argv[2], NULL, 0);
    cout << AlgoArnaque(x, n) << endl;
    return 0;
}
```

Algo 3 : Arnaque

Algorithme : AlgoArnaque(x, n)
renvoyer $pow(x, n)$

- Très pratique... mais qu'y a-t-il dessous ?
- Quelques idées :
  - https://en.cppreference.com/w/cpp/numeric/math/pow
  - https://www.quora.com/What-is-the-time-complexity-of-the-pow-function-in-c++-language-Is-it-log-b-or-O-1

std::pow, std::powf, std::powl

Defined in header <cmath>

Declaration		
`float pow ( float base, float exp );` `float powf( float base, float exp );`	(1)	(since C++11)
`double pow ( double base, double exp );`	(2)	
`long double pow ( long double base, long double exp );` `long double powl( long double base, long double exp );`	(3)	(since C++11)
`float pow ( float base, int iexp );`	(4)	(until C++11)
`double pow ( double base, int iexp );`	(5)	(until C++11)
`long double pow ( long double base, int iexp );`	(6)	(until C++11)
`Promoted pow ( Arithmetic1 base, Arithmetic2 exp );`	(7)	(since C++11)

1-6) Computes the value of base raised to the power exp or iexp.

7) A set of overloads or a function template for all combinations of arguments of arithmetic type not covered by 1-3). If any argument has integral type, it is cast to `double`. If any argument is `long double`, then the return type Promoted is also `long double`, otherwise the return type is always `double`.

Parameters

Algo 3 : Arnaque

Algorithme : ALGOARNAQUE(x, n)
renvoyer $pow(x, n)$

- Très pratique... mais qu'y a-t-il dessous ?
- Quelques idées :
  - `https://en.cppreference.com/w/cpp/numeric/math/pow`
  - `https://www.quora.com/What-is-the-time-complexity-of-the-pow-function-in-c++-language-Is-it-log-b-or-O-1`
- Si on veut vraiment savoir, il faut analyser le code de *pow*...

1. Exemple introductif : calculer x^n

2. Modèle pour la complexité algorithmique

3. Conception et analyse d'un algorithme

4. Outils mathématiques

Pourquoi un modèle ?

Objectif : répondre à la question « *Quel temps va nécessiter la résolution d'un problème algorithmique ?* »

Pourquoi un modèle ?

Objectif : répondre à la question « *Quel temps va nécessiter la résolution d'un problème algorithmique ?* »

- Difficile à estimer : dépend du programme, du langage, de la machine, du système d'exploitation...

Pourquoi un modèle ?

Objectif : répondre à la question « *Quel temps va nécessiter la résolution d'un problème algorithmique ?* »

- Difficile à estimer : dépend du programme, du langage, de la machine, du système d'exploitation...
- Considérer un modèle permet de faire des *prédictions*

Pourquoi un modèle ?

Objectif : répondre à la question « *Quel temps va nécessiter la résolution d'un problème algorithmique ?* »

- Difficile à estimer : dépend du programme, du langage, de la machine, du système d'exploitation...
- Considérer un modèle permet de faire des *prédictions*

L'étude de la complexité est une **modélisation** permettant des prédictions.

Modèle choisi

On va décrire les algorithmes en **pseudo-code** :

- Des **opérations élémentaires** :
  - Déclaration de variable
  - Affectation
  - Lecture, écriture de variables
  - Opération arithmétique : $+, -, \times, \div$
  - Test élémentaire
  - Appel de fonction
- Des **branchements** : *si* ... *alors* ... *sinon* ...
- Des **boucles** : *pour* et *tant que*.

Modèle choisi

On va décrire les algorithmes en **pseudo-code** :

- Des **opérations élémentaires** :
  - Déclaration de variable
  - Affectation
  - Lecture, écriture de variables
  - Opération arithmétique : $+, -, \times, \div$
  - Test élémentaire
  - Appel de fonction
- Des **branchements** : *si* … *alors* … *sinon* …
- Des **boucles** : *pour* et *tant que*.
- Deux modèles :

Word-RAM : chaque **opération élémentaire** prend un **temps constant**

Modèle choisi

On va décrire les algorithmes en **pseudo-code** :

- Des **opérations élémentaires** :
  - Déclaration de variable
  - Affectation
  - Lecture, écriture de variables
  - Opération arithmétique : $+, -, \times, \div$
  - Test élémentaire
  - Appel de fonction
- Des **branchements** : *si* … *alors* … *sinon* …
- Des **boucles** : *pour* et *tant que*.
- Deux modèles :

Word-RAM : chaque **opération élémentaire** prend un **temps constant**

RAM : chaque **opération sur un bit/chiffre** prend un **temps constant**

Modèle choisi

On va décrire les algorithmes en **pseudo-code** :

- Des **opérations élémentaires** :
  - Déclaration de variable
  - Affectation
  - Lecture, écriture de variables
  - Opération arithmétique : $+, -, \times, \div$
  - Test élémentaire
  - Appel de fonction
- Des **branchements** : *si* … *alors* … *sinon* …
- Des **boucles** : *pour* et *tant que*.
- Deux modèles :

  Word-RAM : chaque **opération élémentaire** prend un **temps constant**

  RAM : chaque **opération sur un bit/chiffre** prend un **temps constant**

- Temps pour lire un entier n, dans chaque modèle ?

Définition de la complexité

Sauf cas particulier, modèle Word-RAM.

- **Compter le nombre d'opérations élémentaires** (pour établir la **complexité en temps**)

Définition de la complexité

Sauf cas particulier, modèle Word-RAM.

- **Compter le nombre d'opérations élémentaires** (pour établir la **complexité en temps**)
- Exprimer ces valeurs **en fonction des paramètres d'entrée** de l'algorithme.

Définition de la complexité

Sauf cas particulier, modèle Word-RAM.

- **Compter le nombre d'opérations élémentaires** (pour établir la **complexité en temps**)
- Exprimer ces valeurs **en fonction des paramètres d'entrée** de l'algorithme.
- De manière **asymptotique**

Définition de la complexité

Sauf cas particulier, modèle Word-RAM.

- **Compter le nombre d'opérations élémentaires** (pour établir la **complexité en temps**)
- Exprimer ces valeurs **en fonction des paramètres d'entrée** de l'algorithme.
- De manière **asymptotique**
- Dans le **pire des cas**, et si on n'arrive pas à compter exactement, on établira une borne supérieure sur ces valeurs.

Quelques remarques

Étudier la complexité en temps dans le pire cas de manière asymptotique dans le modèle Word-RAM : la seule façon de faire ?

Quelques remarques

Étudier la complexité en temps dans le pire cas de manière asymptotique dans le modèle Word-RAM : la seule façon de faire ? **Non :**

- **Temps :** autres mesures (espace mémoire, temps parallèle, ...)
- **Pire cas :** raffinements possibles (en moyenne, analyses amortie et lissée, cas pratiques, ...)
- **Asymptotique :** constantes « cachées » dans les $O(\cdot)$ mais en pratique, elles peuvent avoir leur importance...
- **Modèle Word-RAM :** autres modèles, par ex. RAM

Quelques remarques

Étudier la complexité en temps dans le pire cas de manière asymptotique dans le modèle Word-RAM : la seule façon de faire ? **Non :**

- **Temps :** autres mesures (espace mémoire, temps parallèle, ...)
- **Pire cas :** raffinements possibles (en moyenne, analyses amortie et lissée, cas pratiques, ...)
- **Asymptotique :** constantes « cachées » dans les $O(\cdot)$ mais en pratique, elles peuvent avoir leur importance...
- **Modèle Word-RAM :** autres modèles, par ex. RAM

Modèle choisi dans le cours car **le plus simple** et :

- souvent suffisant
- on commence toujours par ça
- si on comprend ce modèle, on comprendra (plus tard !) les autres

1. Exemple introductif : calculer x^n

2. Modèle pour la complexité algorithmique

3. Conception et analyse d'un algorithme

4. Outils mathématiques

Conception et analyse d'un algorithme

« Recette » :

1. Écrire le **pseudo-code** de l'algorithme
2. Choisir les **structures de données** à utiliser pour les variables (influence la complexité de l'algo !)
   On va peu s'en préoccuper dans ce cours.
3. **Analyser l'algorithme** :

Conception et analyse d'un algorithme

« Recette » :

1. Écrire le **pseudo-code** de l'algorithme
2. Choisir les **structures de données** à utiliser pour les variables (influence la complexité de l'algo !)
   On va peu s'en préoccuper dans ce cours.
3. **Analyser l'algorithme** :
   3.1 **Terminaison**
   3.2 **Complexité** en temps
   3.3 **Correction** de l'algorithme

Conception et analyse d'un algorithme

« Recette » :

1. Écrire le **pseudo-code** de l'algorithme
2. Choisir les **structures de données** à utiliser pour les variables (influence la complexité de l'algo !)
   On va peu s'en préoccuper dans ce cours.
3. **Analyser l'algorithme** :
   3.1 **Terminaison**
   - **Variant** d'algorithme = quantité entière positive qui décroît strictement au cours de l'algo.

   3.2 **Complexité** en temps

   3.3 **Correction** de l'algorithme

Conception et analyse d'un algorithme

« **Recette** » :

1. Écrire le **pseudo-code** de l'algorithme
2. Choisir les **structures de données** à utiliser pour les variables (influence la complexité de l'algo !)
   On va peu s'en préoccuper dans ce cours.
3. **Analyser l'algorithme** :
   3.1 **Terminaison**
   - **Variant** d'algorithme = quantité entière positive qui décroît strictement au cours de l'algo.
   - Souvent omise $\rightsquigarrow$ clair avec complexité et correction

   3.2 **Complexité** en temps

   3.3 **Correction** de l'algorithme

Conception et analyse d'un algorithme

« **Recette** » :

1. Écrire le **pseudo-code** de l'algorithme
2. Choisir les **structures de données** à utiliser pour les variables (influence la complexité de l'algo !)
   On va peu s'en préoccuper dans ce cours.
3. **Analyser l'algorithme** :
   3.1 **Terminaison**
   - **Variant** d'algorithme = quantité entière positive qui décroît strictement au cours de l'algo.
   - Souvent omise $\rightsquigarrow$ clair avec complexité et correction

   3.2 **Complexité** en temps
   - **Borne supérieure** dans le **pire cas** : « Je suis sûr que mon algo ne prendra pas plus de ... »

   3.3 **Correction** de l'algorithme

Conception et analyse d'un algorithme

« Recette » :

1. Écrire le **pseudo-code** de l'algorithme
2. Choisir les **structures de données** à utiliser pour les variables (influence la complexité de l'algo !)
   On va peu s'en préoccuper dans ce cours.
3. **Analyser l'algorithme** :
   3.1 **Terminaison**
   - **Variant** d'algorithme = quantité entière positive qui décroît strictement au cours de l'algo.
   - Souvent omise $\rightsquigarrow$ clair avec complexité et correction

   3.2 **Complexité** en temps
   - **Borne supérieure** dans le **pire cas** : « Je suis sûr que mon algo ne prendra pas plus de ... »

   3.3 **Correction** de l'algorithme
   - **Invariant** d'algorithme = propriété $\mathcal{P}_i$ valable après i tours de boucles / i appels récursifs.
   - Preuve par **récurrence**

Correction d'un algorithme

- C'est souvent le plus technique à faire
- Mais c'est nécessaire !

Correction d'un algorithme

- C'est souvent le plus technique à faire
- Mais c'est nécessaire !

Exemple (popularisé par G. Berry) : dans l'appli *Zune* (lancée en 2006 sur les lecteurs MP3 Microsoft), une fonction donnait le numéro du jour de l'année à partir du nombre de jours écoulés depuis le 1er janvier 2004. Les lecteurs se sont déchargés entièrement le 31 décembre 2008 (jour 1827). Pourquoi ?

Correction d'un algorithme

Version simplifiée :

```
int JourDeLAnnee(int jour, int annee = 2004) {
  while (jour > 365) {
    if (estBissextile(annee)) {
      if (jour > 366) {
        jour -= 366;
        annee += 1;
      }
    }
    else {
      jour -= 365;
      annee += 1;
    }
  }
  return jour;
}
```

$1827 = 366 + 365 + 365 + 365 + 366$

Correction d'un algorithme

- C'est souvent le plus technique à faire
- Mais c'est nécessaire !

  Exemple (popularisé par G. Berry) : dans l'appli *Zune* (lancée en 2006 sur les lecteurs MP3 Microsoft), une fonction donnait le numéro du jour de l'année à partir du nombre de jours écoulés depuis le 1er janvier 2004. Les lecteurs se sont déchargés entièrement le 31 décembre 2008 (jour 1827). Pourquoi ?

- D'autres exemples : `https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_software_bugs`

1. Exemple introductif : calculer x^n

2. Modèle pour la complexité algorithmique

3. Conception et analyse d'un algorithme

4. Outils mathématiques

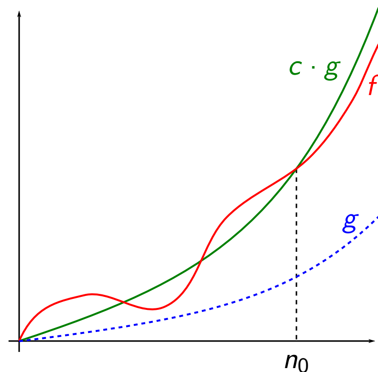
Notations de Landau

« Grand O »

Soit $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$. Alors $\boldsymbol{f = O(g)}$ si

$$\exists c > 0, n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, f(n) \leq c \cdot g(n).$$

« f est un grand O de g s'il existe une constante c et un entier n_0 tels que pour toute valeur n plus grande que n_0, $f(n)$ est inférieur ou égal à $c \cdot g(n)$ »



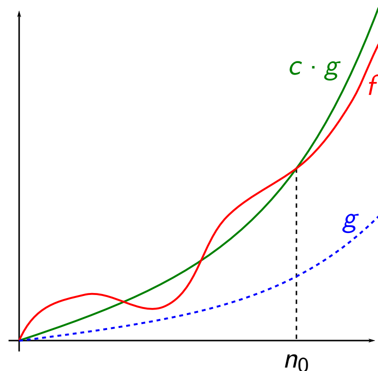
Notations de Landau

« Grand O »

Soit $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$. Alors $\boldsymbol{f = O(g)}$ si

$$\exists c > 0, n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, f(n) \leq c \cdot g(n).$$

« f est un grand O de g s'il existe une constante c et un entier n_0 tels que pour toute valeur n plus grande que n_0, $f(n)$ est inférieur ou égal à $c \cdot g(n)$ »



$f = O(g)$ si pour n suffisamment grand, f est plus petite que g, à une constante multiplicative près.

Utilisation en complexité

« Mon algo. a une complexité $O(n^2)$ (où $n =$ taille de l'entrée) »

$\rightsquigarrow$ si n est assez grand, le nb. d'opérations est $\leq$ constante$\times n^2$

Utilisation en complexité

« Mon algo. a une complexité $O(n^2)$ (où $n =$ taille de l'entrée) »

$\rightsquigarrow$ si n est assez grand, le nb. d'opérations est $\leq$ constante$\times n^2$

- Avantages pour la théorie :
  - Négliger les cas de bases
  - Pas besoin de compter chaque opération en détail
  - Flexibilité sur les opérations élémentaires

Utilisation en complexité

« Mon algo. a une complexité $O(n^2)$ (où $n =$ taille de l'entrée) »

$\rightsquigarrow$ si n est assez grand, le nb. d'opérations est $\leq$ constante$\times n^2$

- Avantages pour la théorie :
  - Négliger les cas de bases
  - Pas besoin de compter chaque opération en détail
  - Flexibilité sur les opérations élémentaires
- Avantages pour la pratique :
  - Indépendant des détails de programmation (nb. de variables intermédiaires, ...)
  - Indépendant de l'environnement d'exécution : système d'exploitation, vitesse de la machine, compilateur, ...

Utilisation en complexité

« Mon algo. a une complexité $O(n^2)$ (où n = taille de l'entrée) »

$\rightsquigarrow$ si n est assez grand, le nb. d'opérations est $\leq$ constante$\times n^2$

- Avantages pour la théorie :
  - Négliger les cas de bases
  - Pas besoin de compter chaque opération en détail
  - Flexibilité sur les opérations élémentaires
- Avantages pour la pratique :
  - Indépendant des détails de programmation (nb. de variables intermédiaires, ...)
  - Indépendant de l'environnement d'exécution : système d'exploitation, vitesse de la machine, compilateur, ...

Un temps de calcul dépend du moment et de l'endroit.
Un résultat de complexité reste vrai **pour toujours !**

Exemples

$5n + 15 = O(n^2)$

- Car pour $n \geq 8$, $5n + 15 \leq n^2$ $\rightsquigarrow c = 1$ et $n_0 = 8$
- Ou alors pour $n \geq 3$, $5n + 15 \leq 5n^2$ $\rightsquigarrow c = 5$ et $n_0 = 3$

Exemples

$5n + 15 = O(n^2)$

- Car pour $n \geq 8$, $5n + 15 \leq n^2$ $\rightsquigarrow c = 1$ et $n_0 = 8$
- Ou alors pour $n \geq 3$, $5n + 15 \leq 5n^2$ $\rightsquigarrow c = 5$ et $n_0 = 3$

```
1 <inst. 1>
2 pour i = 1 à n :
3 |  <inst. 2>
4 pour i = 1 à n :
5 |  pour j = 1 à n :
6 |  |  <inst. 3>
7 renvoyer var
```

- `<inst. N>` : opérations élémentaires

Exemples

$5n + 15 = O(n^2)$

- Car pour $n \geq 8$, $5n + 15 \leq n^2$ $\leadsto c = 1$ et $n_0 = 8$
- Ou alors pour $n \geq 3$, $5n + 15 \leq 5n^2$ $\leadsto c = 5$ et $n_0 = 3$

```
1 <inst. 1>
2 pour i = 1 à n :
3     <inst. 2>
4 pour i = 1 à n :
5     pour j = 1 à n :
6         <inst. 3>
7 renvoyer var
```

- `<inst. N>` : opérations élémentaires
- L1 et L7 : $O(1)$
- L2 exécute n fois L3 : $O(n)$
- L5 exécute n fois L6 : $O(n)$
- L4 exécute n fois L5 : $O(n^2)$

Total

$2 \times O(1) + O(n) + O(n^2) = O(n^2)$

Calcul avec les « grand O »

Lemme

- $O(f) + O(g) = O(f + g)$
- $O(f) \times O(g) = O(f \times g)$
- Si $f = O(g)$, alors $O(f + g) = O(g)$
- Si $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $O(\lambda f) = O(f)$

Calcul avec les « grand O »

Lemme

- $O(f) + O(g) = O(f + g)$
- $O(f) \times O(g) = O(f \times g)$
- Si $f = O(g)$, alors $O(f + g) = O(g)$
- Si $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $O(\lambda f) = O(f)$

Preuve du premier

- Soit $h_1 = O(f)$: $\exists c_1, n_1, \forall n \geq n_1, h_1(n) \leq c_1 f(n)$
- Soit $h_2 = O(g)$: $\exists c_2, n_2, \forall n \geq n_2, h_2(n) \leq c_2 g(n)$

Calcul avec les « grand O »

Lemme

- $O(f) + O(g) = O(f + g)$
- $O(f) \times O(g) = O(f \times g)$
- Si $f = O(g)$, alors $O(f + g) = O(g)$
- Si $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $O(\lambda f) = O(f)$

Preuve du premier

- Soit $h_1 = O(f)$: $\exists c_1, n_1, \forall n \geq n_1, h_1(n) \leq c_1 f(n)$
- Soit $h_2 = O(g)$: $\exists c_2, n_2, \forall n \geq n_2, h_2(n) \leq c_2 g(n)$
- Donc $\forall n \geq \max(n_1, n_2)$,

$$\begin{aligned} h_1(n) + h_2(n) &\leq c_1 f(n) + c_2 g(n) \\ &\leq \max(c_1, c_2) f(n) + \max(c_1, c_2) g(n) \\ &\leq \max(c_1, c_2)(f(n) + g(n)) \end{aligned}$$

Calcul avec les « grand O »

Lemme

- $O(f) + O(g) = O(f+g)$
- $O(f) \times O(g) = O(f \times g)$
- Si $f = O(g)$, alors $O(f+g) = O(g)$
- Si $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $O(\lambda f) = O(f)$

Preuve du premier

- Soit $h_1 = O(f)$: $\exists c_1, n_1, \forall n \geq n_1, h_1(n) \leq c_1 f(n)$
- Soit $h_2 = O(g)$: $\exists c_2, n_2, \forall n \geq n_2, h_2(n) \leq c_2 g(n)$
- Donc $\forall n \geq \max(n_1, n_2)$,

$$\begin{aligned} h_1(n) + h_2(n) &\leq c_1 f(n) + c_2 g(n) \\ &\leq \max(c_1, c_2) f(n) + \max(c_1, c_2) g(n) \\ &\leq \max(c_1, c_2)(f(n) + g(n)) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow h_1 + h_2 = O(f+g)$

« Grand O » et limites

Lemme

Soit $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, *et* $c = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{f(n)}{g(n)} \right)$. *Alors*

- *si* $c = 0$: $f = O(g)$ *mais* $g \neq O(f)$
- *si* $0 < c < +\infty$: $f = O(g)$ *et* $g = O(f)$
- *si* $c = +\infty$: $f \neq O(g)$ *mais* $g = O(f)$

« Grand O » et limites

Lemme

Soit $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, *et* $c = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{f(n)}{g(n)}\right)$. *Alors*

- *si* $c = 0$: $f = O(g)$ *mais* $g \neq O(f)$
- *si* $0 < c < +\infty$: $f = O(g)$ *et* $g = O(f)$
- *si* $c = +\infty$: $f \neq O(g)$ *mais* $g = O(f)$

Preuve

- Si $f(n)/g(n) \longrightarrow_\infty c < +\infty$, alors $f(n)/g(n) \leq c + 1$ à partir d'un certain rang. Donc $f(n) \leq (c+1)g(n)$, et $f = O(g)$.
- Si $f(n)/g(n) \longrightarrow_\infty +\infty$, alors pour tout c, $f(n)/g(n) \geq c$ à partir d'un certain rang. Donc $f \neq O(g)$.

Inverse de limites

Lemme

Soit $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, strictement positives pour n assez grand. Alors

- si $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \frac{1}{c}$
- si $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$
- si $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = +\infty$

Preuve

Continuité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

Inverse de limites

Lemme

Soit $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, strictement positives pour n assez grand. Alors

- si $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \frac{1}{c}$
- si $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$
- si $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = +\infty$

Preuve

Continuité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

À retenir !

$0 < c < +\infty$

$\lim_{+\infty} f/g$	0	c	$+\infty$
$f = O(g)$	✓	✓	✗
$g = O(f)$	✗	✓	✓
$\lim_{+\infty} g/f$	$+\infty$	$1/c$	0

« Omega »

Définition

$f = \Omega(g)$ si (au choix !)

- $g = O(f)$
- $\exists c > 0, n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, f(n) \geq cg(n)$
- « pour n suffisamment grand, f est **supérieure** à g, à une constante multiplicative près »

« Omega »

Définition

$f = \Omega(g)$ si (au choix !)

- $g = O(f)$
- $\exists c > 0, n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, f(n) \underline{\geq} cg(n)$
- « pour n suffisamment grand, f est **supérieure** à g, à une constante multiplicative près »

Remarque. Utilisé une seule fois dans le cours !

Les fonctions du cours

$$\log n, \quad \sqrt{n} = n^{1/2}, \quad n, \quad n^2, \quad n^k, \quad 2^n, \quad n!$$

Les fonctions du cours

$$\log n, \quad \sqrt{n} = n^{1/2}, \quad n, \quad n^2, \quad n^k, \quad 2^n, \quad n!$$

Lemme de croissance comparée

Pour toutes **constantes** $\alpha, \beta > 0$,

$$\lim_{+\infty} \frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} = 0 \qquad \lim_{+\infty} \frac{n^\alpha}{(2^n)^\beta} = 0 \qquad \lim_{+\infty} \frac{(2^n)^\beta}{n!} = 0$$

(logarithmes $\ll$ polynômes $\ll$ exponentielles $\ll$ factorielle)

Les fonctions du cours

$$\log n, \quad \sqrt{n} = n^{1/2}, \quad n, \quad n^2, \quad n^k, \quad 2^n, \quad n!$$

Lemme de croissance comparée

Pour toutes **constantes** $\alpha, \beta > 0$,

$$\lim_{+\infty} \frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} = 0 \qquad \lim_{+\infty} \frac{n^\alpha}{(2^n)^\beta} = 0 \qquad \lim_{+\infty} \frac{(2^n)^\beta}{n!} = 0$$

(logarithmes $\ll$ polynômes $\ll$ exponentielles $\ll$ factorielle)

Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ tend vers $+\infty$ et $\alpha < \beta$:

$$\lim_{+\infty} \frac{f(n)^\alpha}{f(n)^\beta} = \lim_{+\infty} f(n)^{\alpha - \beta} = 0$$

Les fonctions du cours

$$\log n, \quad \sqrt{n} = n^{1/2}, \quad n, \quad n^2, \quad n^k, \quad 2^n, \quad n!$$

Lemme de croissance comparée

Pour toutes **constantes** $\alpha, \beta > 0$,

$$\lim_{+\infty} \frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} = 0 \qquad \lim_{+\infty} \frac{n^\alpha}{(2^n)^\beta} = 0 \qquad \lim_{+\infty} \frac{(2^n)^\beta}{n!} = 0$$

(logarithmes $\ll$ polynômes $\ll$ exponentielles $\ll$ factorielle)

Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ tend vers $+\infty$ et $\alpha < \beta$:

$$\lim_{+\infty} \frac{f(n)^\alpha}{f(n)^\beta} = \lim_{+\infty} f(n)^{\alpha-\beta} = 0$$

Exemples

- $\log^2 n = O(\sqrt{n})$, $n^2 = O(n^3)$, ...
- Mais $\sqrt{n} \neq O(\log^2 n)$, $n^3 \neq O(n^2)$, ...

Calcul avec exponentielles et logarithmes

Sauf mention contraire : log est le logarithme **en base 2**
$\rightsquigarrow$ $\log n$ est environ le nombre de bits de n (exact : $\lfloor \log n \rfloor + 1$)

Calcul avec exponentielles et logarithmes

Sauf mention contraire : log est le logarithme **en base 2**
$\rightsquigarrow$ $\log n$ est environ le nombre de bits de n (exact : $\lfloor \log n \rfloor + 1$)

Règles du log

- $\log 0$ non défini
- $\log 1 = 0$; $\log 2 = 1$
- $\log(a \times b) = \log a + \log b$
- $\log(a/b) = \log a - \log b$
- $\log(a^k) = k \log a$

Calcul avec exponentielles et logarithmes

Sauf mention contraire : log est le logarithme **en base 2**
$\rightsquigarrow$ $\log n$ est environ le nombre de bits de n (exact : $\lfloor \log n \rfloor + 1$)

Règles du log

- $\log 0$ non défini
- $\log 1 = 0$; $\log 2 = 1$
- $\log(a \times b) = \log a + \log b$
- $\log(a/b) = \log a - \log b$
- $\log(a^k) = k \log a$

Règles de l'exponentielle

- $2^0 = 1$; $2^1 = 2$
- $2^{a+b} = 2^a \times 2^b$
- $2^{a-b} = 2^a / 2^b$
- $2^{a \times b} = (2^a)^b = \left(2^b\right)^a$
- $2^{\log a} = a = \log(2^a)$

Calcul avec exponentielles et logarithmes

Sauf mention contraire : log est le logarithme **en base 2**
$\rightsquigarrow$ $\log n$ est environ le nombre de bits de n (exact : $\lfloor \log n \rfloor + 1$)

Règles du log

- $\log 0$ non défini
- $\log 1 = 0$; $\log 2 = 1$
- $\log(a \times b) = \log a + \log b$
- $\log(a/b) = \log a - \log b$
- $\log(a^k) = k \log a$

Règles de l'exponentielle

- $2^0 = 1$; $2^1 = 2$
- $2^{a+b} = 2^a \times 2^b$
- $2^{a-b} = 2^a / 2^b$
- $2^{a \times b} = (2^a)^b = (2^b)^a$
- $2^{\log a} = a = \log(2^a)$

« le log. transforme les $\times$ en $+$; l'exp. transforme les $+$ en $\times$ »

Calcul avec exponentielles et logarithmes

Sauf mention contraire : log est le logarithme **en base 2**
$\rightsquigarrow$ $\log n$ est environ le nombre de bits de n (exact : $\lfloor \log n \rfloor + 1$)

Règles du log

- $\log 0$ non défini
- $\log 1 = 0$; $\log 2 = 1$
- $\log(a \times b) = \log a + \log b$
- $\log(a/b) = \log a - \log b$
- $\log(a^k) = k \log a$

Règles de l'exponentielle

- $2^0 = 1$; $2^1 = 2$
- $2^{a+b} = 2^a \times 2^b$
- $2^{a-b} = 2^a / 2^b$
- $2^{a \times b} = (2^a)^b = (2^b)^a$
- $2^{\log a} = a = \log(2^a)$

« le log. transforme les $\times$ en $+$; l'exp. transforme les $+$ en $\times$ »

Exemples

$2^{3n} = (2^3)^n = 8^n$; $n^n = (2^{\log n})^n = 2^{n \log n}$

Détermination d'un « grand O »

Objectif (souvent) : exprimer sous la forme $O\left(2^{cn^{\alpha}} n^{\beta} (\log n)^{\gamma}\right)$

Détermination d'un « grand O »

Objectif (souvent) : exprimer sous la forme $O\left(2^{cn^\alpha} n^\beta (\log n)^\gamma\right)$

Techniques usuelles

- Simplifier les constantes additives : $f(n+b) = O(f(n))$
- Supprimer les termes négligeables : $f + g = O(g)$ si $f = O(g)$
- Se ramener à des écritures *standard*. Exemples :
  - $\sqrt{n^3}/\sqrt[3]{n} = (n^3)^{1/2}/n^{1/3} = n^{3/2-1/3} = n^{7/6}$
  - $4^{\log n} = (2^{\log 4})^{\log n} = 2^{2\log n} = (2^{\log n})^2 = n^2$
- Calculer des limites pour comparer des termes

Exemples de complexités de problèmes algorithmiques

Complexité	Notation O	Exemple d'algorithme
Constante	$O(1)$	Initialisation d'une variable
Logarithmique	$O(\log n)$	Recherche dichotomique dans un tableau trié
Linéaire	$O(n)$	Parcours d'un tableau (ou d'une liste)
Quasi-lineaire	$O(n \log n)$	Tri (fusion) d'un tableau
Quadratique	$O(n^2)$	Double boucle imbriquée
Cubique	$O(n^3)$	Triple boucle imbriquée
Exponentielle	$O(2^n)$	Énumération de tous les sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$
Factorielle	$O(n!)$	Énumération de toutes les permutations de $\{1, \ldots, n\}$

Autres outils mathématiques

Factorielle et formule de Stirling

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 \sim_{n \to +\infty} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$\rightsquigarrow$ $n! = O(\sqrt{n}(n/e)^n)$ par exemple

Autres outils mathématiques

Factorielle et formule de Stirling

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 \sim_{n \to +\infty} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$\rightsquigarrow n! = O(\sqrt{n}(n/e)^n)$ par exemple

Parties entières

- $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier k tel que $k \leq x$
  (et l'unique entier k tel que $k \leq x < k+1$)
- $\lceil x \rceil$ est le plus petit entier k tel que $x \leq k$
  (et l'unique entier k tel que $k-1 < x \leq k$)
- $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil = n$ (exercice !)

Sommes arithmétique et géométrique

$$\sum_{i=a}^{b} i = (b - a + 1) \cdot \frac{b + a}{2} \qquad = \text{nb de termes} \times \text{moyenne(min, max)}$$

$$\sum_{i=a}^{b} x^i = x^a \cdot \frac{x^{b-a+1} - 1}{x - 1} \qquad = \frac{x^{b+1} - x^a}{x - 1}$$

Sommes arithmétique et géométrique

$$\sum_{i=a}^{b} i = (b-a+1)\cdot\frac{b+a}{2} \qquad = \text{nb de termes} \times \text{moyenne}(\min, \max)$$

$$\sum_{i=a}^{b} x^i = x^a \cdot \frac{x^{b-a+1}-1}{x-1} \qquad = \frac{x^{b+1}-x^a}{x-1}$$

Exemple :

$S \leftarrow 0$
pour $i = 1$ à n **:**
    $y \leftarrow 1$
    pour $j = 1$ à $\boldsymbol{i}$ **:**
        $y \leftarrow x \times y$
    $S \leftarrow S + y$
renvoyer S

Sommes arithmétique et géométrique

$$\sum_{i=a}^{b} i = (b-a+1)\cdot\frac{b+a}{2} \qquad = \text{nb de termes} \times \text{moyenne(min, max)}$$

$$\sum_{i=a}^{b} x^i = x^a \cdot \frac{x^{b-a+1}-1}{x-1} \qquad = \frac{x^{b+1}-x^a}{x-1}$$

Exemple :

$S \leftarrow 0$
pour $i = 1$ à n **:**
    $y \leftarrow 1$
    pour $j = 1$ à $\boldsymbol{i}$ **:**
        $y \leftarrow x \times y$
    $S \leftarrow S + y$
renvoyer S

Complexité : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$

Sommes arithmétique et géométrique

$$\sum_{i=a}^{b} i = (b-a+1)\cdot\frac{b+a}{2} \qquad = \text{nb de termes} \times \text{moyenne}(\min, \max)$$

$$\sum_{i=a}^{b} x^i = x^a \cdot \frac{x^{b-a+1}-1}{x-1} \qquad = \frac{x^{b+1}-x^a}{x-1}$$

Exemple :

$S \leftarrow 0$
pour $i = 1$ à n **:**
  $y \leftarrow 1$
  pour $j = 1$ à $\boldsymbol{i}$ **:**
    $y \leftarrow x \times y$
  $S \leftarrow S + y$
renvoyer S

Complexité : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$

Valeur : $y = x^i \rightsquigarrow S = \sum_{i=1}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-x}{x-1}$