TD 08 – Boucherie

Exercice 1.
On considère une variante de la méthode de la division dans laquelle $h(k) = k \mod m$, où $m = 2^p - 1$ et k sont des chaînes de caractères interprétées en base 2^p.

1. Montrer que si la chaîne x peut être déduite de la chaîne y par permutation de ses caractères, alors x et y ont la même valeur de hachage.
2. Donner un exemple d'application pour laquelle cette propriété de la fonction de hachage serait indésirable.

Exercice 2.
Supposons que l'on doive rechercher une clé k dans une table de hachage comportant les emplacements $0, 1, \dots, m-1$ et que l'on dispose d'une fonction de hachage h établissant une correspondance entre l'espace des clés et l'ensemble $0, 1, \dots, m-1$. Le schéma de la recherche est le suivant :
1) Calcul de la valeur $i \leftarrow h(k)$ et initialisation de $j \leftarrow 0$.
2) Sondage de la position i pour la clé k désirée. En cas de succès, ou si la position est vide, stopper la recherche.
3) Initialisation de $j \leftarrow (j+1) \mod m$ et $i \leftarrow (i+j) \mod m$, et retourner à l'étape 2.
On suppose que m est une puissance de 2.

1. Montrer que ce schéma est un cas particulier du schéma général du « sondage quadratique ».
2. Démontrer que dans le cas le plus dévorable, cet algorithme examine chaque position de la table.

Exercice 3.
On suppose qu'on a une table de hachage avec n alvéoles et que les collisions sont résolues par chaînage, et on suppose que n clés sont insérées dans la table. Chaque clé a des chances égales d'être hachée vers chaque alvéole. Soit M le nombre maximal de clés dans une alvéole quelconque, après que toutes les clés ont été insérées. Votre mission est de prouver un majorant $\mathcal{O}(\log n / \log\log n)$ sur $\mathbb{E}[M]$, espérance de M.

1. Montrer que la probabilité Q_k pour que k clés exactement soit hachées vers une alvéole particulière est donnée par la formule :
$$Q_k = \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} \binom{n}{k}.$$
2. Soit P_k la probabilité pour que $M = k$, c'est-à-dire pour que l'alvéole contenant le plus de clés en contienne k. Montrer que $P_k \leq nQ_k$.
3. Si l'on définit $k_0 = c \log n / \log\log n$, montrer qu'il existe une constante $c > 1$ telle que $Q_{k_0} < 1/n^3$. En déduire que $P_k < 1/n^2$ pour $k \geq k_0 = c \log n / \log\log n$.
4. Montrer que
$$\mathbb{E}[M] \leq \mathbb{P}\left\{M > \frac{c \log n}{\log\log n}\right\} \times n + \mathbb{P}\left\{M \leq \frac{c \log n}{\log\log n}\right\} \times \frac{c \log n}{\log\log n}.$$
En déduire que $\mathbb{E}[M] = \mathcal{O}(\log n / \log\log n)$.