

## TD 11 – La philanthropie de l’ouvrier charpentier

---

**Exercice 1.***Musique*

1. Montrer que le problème SUBSET-SUM est NP-complet.


SUBSET-SUM

*Instance* : Un ensemble fini  $S$  d’entiers positifs et un entier objectif  $t$ .*Question* : Existe-t-il un sous-ensemble  $S' \subseteq S$  tel que  $\sum_{x \in S'} x = t$  ?

2. Montrer que le problème 2-PARTITION est NP-complet.

2-PARTITION

*Instance* : Un ensemble fini  $S$  d’entiers positifs.*Question* : Existe-t-il un sous-ensemble  $S' \subseteq S$  tel que  $\sum_{x \in S'} x = \sum_{x \in S \setminus S'} x$  ?**Exercice 2.***D’où le titre*

-  Montrer que le problème suivant est NP-complet : étant données  $n$  baguettes rigides de longueurs entières  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , pouvant être reliées dans cet ordre bout-à-bout par des charnières, et étant donné un entier  $k$ , assembler toutes les baguettes de manière qu’en repliant la chaîne obtenue la longueur totale ne dépasse pas  $k$ .

**Exercice 3.***Retour sur le coloriage*

1. Montrer que le problème 2-COLOR est dans P.

2-COLOR

*Instance* : Un graphe  $G = (V, E)$ .*Question* : Existe-t-il une 2-coloration du graphe  $G$  ?

2. Construire un graphe ayant au moins 4 sommets  $x, y, z$  et  $t$  tel que pour toute 3-coloration du graphe,
  - si  $x, y$  et  $z$  ont même couleur, alors  $t$  également ;
  - si  $x, y$  et  $z$  n’ont pas la même couleur,  $t$  peut être colorié arbitrairement.
3. Montrer que le problème 3-COLOR est NP-complet.

3-COLOR

*Instance* : Un graphe  $G = (V, E)$ .*Question* : Existe-t-il une 3-coloration du graphe  $G$  ?

Un graphe est dit *planaire* s’il peut être dessiné dans le plan sans croisement d’arêtes.

4. Construire un graphe planaire ayant au moins 4 sommets  $u_1, u_2, v_1$  et  $v_2$  avec la propriété suivante : si on fixe la couleur  $c_1$  pour  $u_1$  et  $c_2$  pour  $u_2$  (éventuellement identiques), alors
  - il existe une 3-coloration du graphe ;
  - toute 3-coloration donne la couleur  $c_1$  à  $v_1$  et  $c_2$  à  $v_2$ .
5. En déduire que le problème PLANAR-3-COLOR est NP-complet.

PLANAR-3-COLOR

*Instance* : Un graphe planaire  $G = (V, E)$ .*Question* : Existe-t-il une 3-coloration du graphe  $G$  ?