

---

**TD 06 – Carrément impressionnant**

---

**Exercice 1.***Plus grand carré de 1*

1. Donner un algorithme de programmation dynamique pour résoudre le problème suivant :

**Entrée :** une matrice  $A$  de taille  $n \times m$  où les coefficients valent 0 ou 1.

**Sortie :** la largeur maximum  $K$  d'un carré de 1 dans  $A$ , ainsi que les coordonnées  $(I, J)$  du coin en haut à gauche d'un tel carré (autrement dit pour tout  $i, j$ ,  $I \leq i \leq I + K - 1$ ,  $J \leq j \leq J + K - 1$ ,  $A[i, j] = 1$ ).

2. Quelle est sa complexité ?

**Exercice 2.***Impression équilibrée*

Le problème est l'impression équilibrée d'un paragraphe sur une imprimante. Le texte d'entrée est une séquence de  $n$  mots de longueurs  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  (mesurées en caractères). On souhaite imprimer ce paragraphe de manière équilibrée sur un certain nombre de lignes qui contiennent un maximum de  $M$  caractères chacune. Le critère d'équilibre est le suivant. Si une ligne donnée contient les mots  $i$  à  $j$  (avec  $i \leq j$ ) et qu'on laisse exactement une espace<sup>1</sup> entre deux mots, le nombre de caractères d'espacement supplémentaires à la fin de la ligne est  $M - j + i - \sum_{k=i}^j \ell_k$ , qui doit être positif ou nul pour que les mots tiennent sur la ligne. L'objectif est de minimiser la somme, sur toutes les lignes *hormis la dernière*, des cubes des nombres de caractères d'espacement présents à la fin de chaque ligne.

1. Est-ce que l'algorithme glouton consistant à remplir les lignes une à une en mettant à chaque fois le maximum de mots possibles sur la ligne en cours, fournit l'optimum ?
2. Donner un algorithme de programmation dynamique résolvant le problème. Analyser sa complexité en temps et en espace.
3. Supposons que pour la fonction de coût à minimiser, on ait simplement choisi la somme des nombres de caractères d'espacement présents à la fin de chaque ligne. Est-ce que l'on peut faire mieux en complexité que pour la question 2 ?
4. (*Plus informel*) Qu'est-ce qui à votre avis peut justifier le choix de prendre les cubes plutôt que simplement les nombres de caractères d'espacement en fin de ligne ?

---

1. En typographie *espace* est un mot féminin.

**Exercice 3.***Partitionnement d'un carré*

On se donne  $n$  réels positifs  $s_1, \dots, s_n$  de somme 1. On veut partitionner le carré unité en  $n$  rectangles de surfaces  $s_1, \dots, s_n$ . On cherche un partitionnement en colonnes comme illustré sur la figure 1. On veut minimiser la longueur des traits dessinés (donc à une constante près la somme des demi-périmètres des  $n$  rectangles).

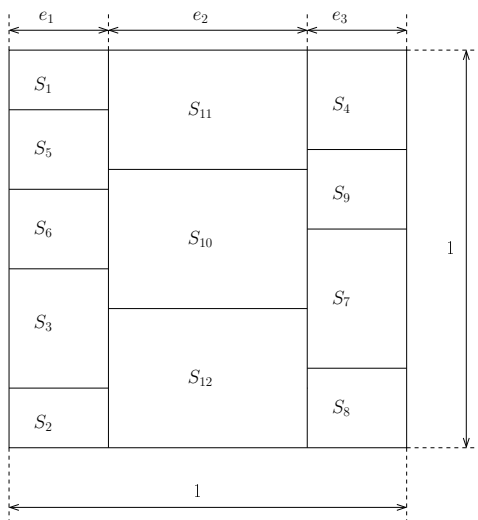


FIGURE 1 – Partitionnement du carré unité en colonnes de rectangles.

1. Résoudre le problème dans le cas  $n = 4$  avec  $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0,25$ .
2. Résoudre le problème dans le cas  $n = 6$  avec  $s_1 = 0,5$  et  $s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = 0,1$ .
3. Dans le cas général, on ne connaît pas le nombre de colonnes qu'on va utiliser. Mais :
  - (a) Montrer que l'on peut se ramener à placer les  $s_i$  dans l'ordre croissant.
  - (b) Résoudre le problème par programmation dynamique.