
TD 03 – Top 50

Exercice 1.*Suivez le maître*

Appliquer le *Master Theorem* sur les cas suivants :

1. $T(n) = 9T(n/3) + n$;
2. $T(n) = T(2n/3) + 1$;
3. $T(n) = 3T(n/4) + n \log n$;
4. $T(n) = 2T(n/2) + n \log n$;
5. $T(n) = 2T(n/2) + n^3$;
6. $T(n) = T(9n/10) + n$;
7. $T(n) = 7T(n/3) + n^2$;
8. $T(n) = T(n - 1) + n$;
9. $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$.

Exercice 2.*Meetic*

Un site internet cherche à regrouper ses membres en fonction des goûts musicaux de chacun. Pour cela, chaque membre doit classer par ordre de préférence une liste d'artistes¹. On dit que deux membres, Arthur et Béatrice, ont des goûts musicaux proches lorsque qu'il y a peu d'*inversions* dans leurs classements : une inversion est une paire d'artiste $\{L, M\}$ telle qu'Arthur préfère L à M et Béatrice préfère M à L . On cherche donc à compter le nombre d'inversion dans les classements d'Arthur et Béatrice.

1. Compter le nombre d'inversion les classements suivants :

Arthur : Britney Spears, Lady Gaga, Michael Jackson, Madonna, Céline Dion ;

Béatrice : Lady Gaga, Madonna, Britney Spears, Michael Jackson, Céline Dion.

2. Proposer un algorithme naïf qui résout le problème. Quelle est sa complexité ?

On cherche maintenant à améliorer l'algorithme précédent en utilisant le paradigme Diviser-Pour-Régner. Pour cela, on coupe le classement de chaque membre en deux sous-classements de même taille, celui des artistes préférés (classement supérieur) et celui des autres artistes (classement inférieur). On compte alors les inversions (L, M) qui peuvent être de deux types : soit L et M apparaissent dans le même sous-classement de Béatrice, soit L et M apparaissent dans deux différents sous-classements de Béatrice (inversions mixtes).

3. On suppose que les deux sous-classements de Béatrice sont triés en fonction du classement d'Arthur². Montrer qu'on peut alors compter les inversions mixtes en temps linéaire.
4. Donner un algorithme de type Diviser-Pour-Régner qui fonctionne en temps $\mathcal{O}(n \log n)$.

Exercice 3.*Médiane en temps linéaire*

Soit A un ensemble de n éléments distincts totalement ordonné. On cherche à trouver la médiane de l'ensemble, c'est-à-dire l'élément de rang $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.

1. Donner un algorithme naïf. Quelle est sa complexité ?

Pour améliorer la complexité de l'algorithme, on utilise la stratégie suivante : on regroupe les éléments par paquets de 5, on calcule la médiane de chaque paquet, puis la médiane des médianes.

2. Comment terminer cet algorithme ? Quelle est sa complexité ?
3. Que se passe-t-il si on regroupe par paquets de 3 ? Et de 7 ?

1. Le classement est un ordre total.

2. Si L et M apparaissent dans le même sous-classement de Béatrice, alors ils apparaissent dans le même ordre que dans le classement d'Arthur.