Algorithmique — 2. Techniques algorithmiques

5. Diviser pour régner

Bruno Grenet

https://membres-ljk.imag.fr/Bruno.Grenet/Algorithmique.html

Université Grenoble Alpes – IM²AG

L3 Mathématiques et Informatique

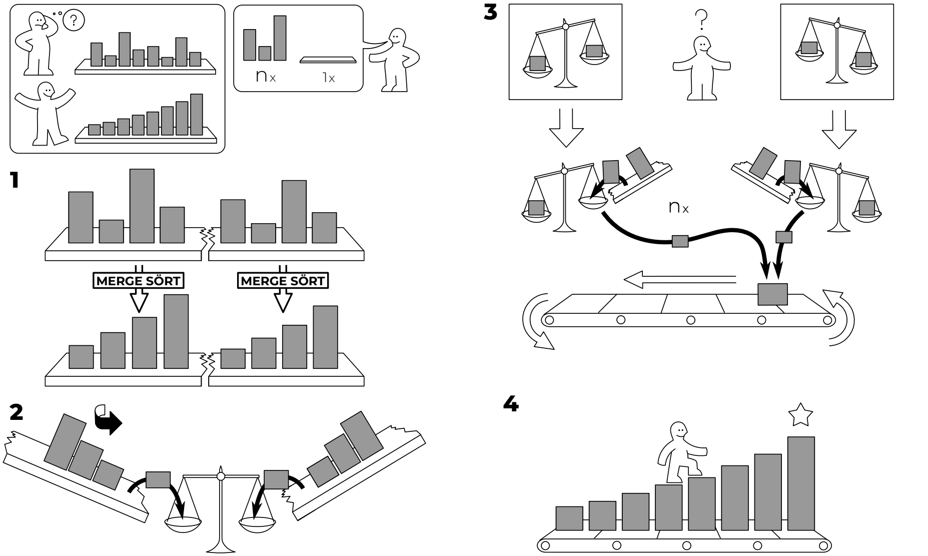
Table des matières

Table des matières

MERGE SÖRT

idea-instructions.com/merge-sort/

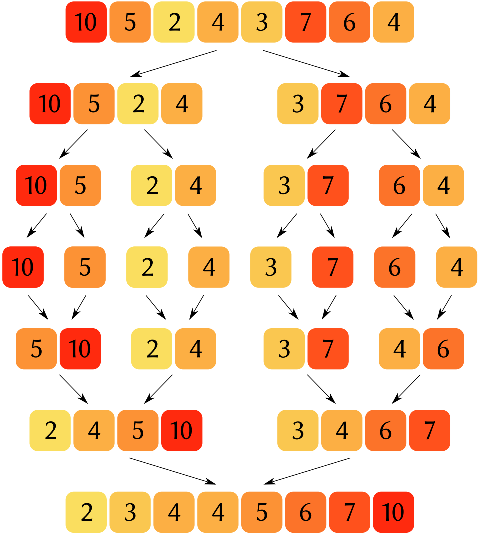
IDEA



Algorithme du TriFusion

TriFusion(T):

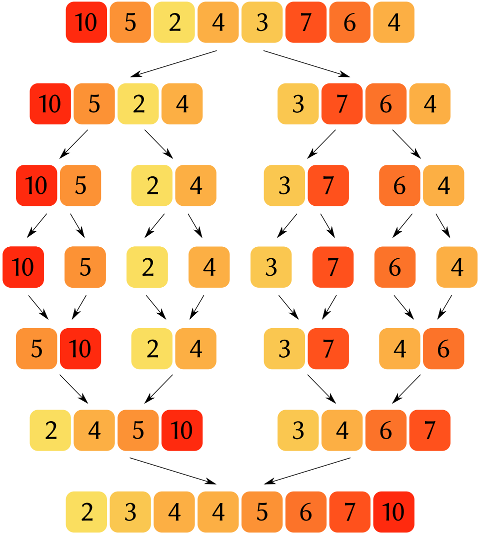
1. $n \leftarrow \#T$
2. Si $n \leq 1$: Renvoyer T
3. Sinon :
4. $\quad T_1 \leftarrow$TriFusion$(T_{[0,\lfloor n/2 \rfloor[})$
5. $\quad T_2 \leftarrow$TriFusion$(T_{[\lfloor n/2 \rfloor, n[})$
6. $\quad$Renvoyer Fusion(T_1, T_2)



Algorithme du TriFusion

TriFusion(T):

1. $n \leftarrow \#T$
2. Si $n \leq 1$: Renvoyer T
3. Sinon :
4. $\quad T_1 \leftarrow$TriFusion($T_{[0,\lfloor n/2 \rfloor[}$)
5. $\quad T_2 \leftarrow$TriFusion($T_{[\lfloor n/2 \rfloor, n[}$)
6. $\quad$ Renvoyer Fusion(T_1, T_2)



Lemme

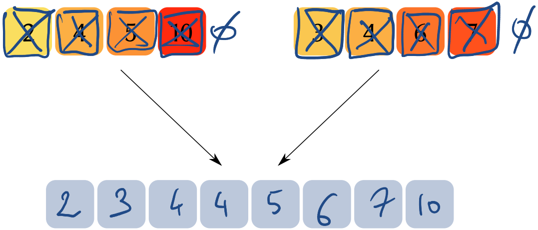
Soit $t(n)$ la complexité de TriFusion et $f(n)$ la complexité de Fusion. Alors

$$t(n) = t(\lfloor n/2 \rfloor) + t(\lceil n/2 \rceil) + f(n) + O(1)$$

pour $n > 1$, et $t(n) = 0$ sinon

(complexité = nombre de comparaisons)

Algorithme de Fusion



Idée de l'algorithme

- T_1 et T_2 vus comme des **piles**
- S vu comme une **file**
- À chaque itération,
  - on dépile la plus petite des deux têtes
    - si une pile est vide, on dépile l'autre
  - on enfile dans S

Algorithme de Fusion

Fusion(T_1, T_2):

$n_1 \leftarrow \#T_1$; $n_2 \leftarrow \#T_2$
$S \leftarrow$ tableau de taille $n = n_1 + n_2$
$i_1 \leftarrow 0$; $i_2 \leftarrow 0$
Pour $i_S = 0$ à $n - 1$:
    Si $i_1 \geq n_1$: *(T_1 vide)*
        $S_{[i_S]} \leftarrow T_{2[i_2]}$; $i_2 \leftarrow i_2 + 1$
    Sinon si $i_2 \geq n_2$: *(T_2 vide)*
        $S_{[i_S]} \leftarrow T_{1[i_1]}$; $i_1 \leftarrow i_1 + 1$
    Sinon si $T_{1[i_1]} \leq T_{2[i_2]}$:
        $S_{[i_S]} \leftarrow T_{1[i_1]}$; $i_1 \leftarrow i_1 + 1$
    Sinon :
        $S_{[i_S]} \leftarrow T_{2[i_2]}$; $i_2 \leftarrow i_2 + 1$
Renvoyer S

Idée de l'algorithme

- T_1 et T_2 vus comme des **piles**
- S vu comme une **file**
- À chaque itération,
  - on dépile la plus petite des deux têtes
    - si une pile est vide, on dépile l'autre
  - on enfile dans S

Algorithme de Fusion

Fusion(T_1, T_2):

1. $n_1 \leftarrow \# T_1$; $n_2 \leftarrow \# T_2$

2. $S \leftarrow$ tableau de taille $n = n_1 + n_2$

3. $i_1 \leftarrow 0$; $i_2 \leftarrow 0$

4. Pour $i_S = 0$ à $n - 1$:

5. Si $i_1 \geq n_1$: *(T_1 vide)*

6. $S_{[i_S]} \leftarrow T_{2[i_2]}$; $i_2 \leftarrow i_2 + 1$

7. Sinon si $i_2 \geq n_2$: *(T_2 vide)*

8. $S_{[i_S]} \leftarrow T_{1[i_1]}$; $i_1 \leftarrow i_1 + 1$

9. Sinon si $T_{1[i_1]} \leq T_{2[i_2]}$:

10. $S_{[i_S]} \leftarrow T_{1[i_1]}$; $i_1 \leftarrow i_1 + 1$

11. Sinon :

12. $S_{[i_S]} \leftarrow T_{2[i_2]}$; $i_2 \leftarrow i_2 + 1$

13. Renvoyer S

Lemme

La complexité $f(n)$ de Fusion est $O(n)$.

Preuve :

- Boucle de taille n
- Corps de la boucle en $\Theta(1)$.

Algorithme de Fusion

Fusion(T_1, T_2):

$n_1 \leftarrow \#T_1$; $n_2 \leftarrow \#T_2$
$S \leftarrow$ tableau de taille $n = n_1 + n_2$
$i_1 \leftarrow 0$; $i_2 \leftarrow 0$
Pour $i_S = 0$ à $n - 1$:
    Si $i_1 \geq n_1$: *(T_1 vide)*
        $S_{[i_S]} \leftarrow T_{2[i_2]}$; $i_2 \leftarrow i_2 + 1$
    Sinon si $i_2 \geq n_2$: *(T_2 vide)*
        $S_{[i_S]} \leftarrow T_{1[i_1]}$; $i_1 \leftarrow i_1 + 1$
    Sinon si $T_{1[i_1]} \leq T_{2[i_2]}$:
        $S_{[i_S]} \leftarrow T_{1[i_1]}$; $i_1 \leftarrow i_1 + 1$
    Sinon :
        $S_{[i_S]} \leftarrow T_{2[i_2]}$; $i_2 \leftarrow i_2 + 1$
Renvoyer S

Lemme
La complexité $f(n)$ de Fusion est $O(n)$.

Lemme
Si T_1 et T_2 sont deux tableaux triés (par ordre croissant), Fusion(T_1, T_2) renvoie un tableau trié contenant l'union des éléments de T_1 et T_2.

Preuve : Invariant :

$S[0, i_S[$ est trié et contient les i_S plus petits éléments de "$T_1 \cup T_2$"

Retour sur le TriFusion

Théorème

L'algorithme TriFusion trie tout tableau de taille n en temps $O(n \log n)$.

Preuve de correction par récurrence

- $n < 2$: le tableau est trié sans rien faire
- $n \geq 2$: . par hyp. de récurrence, T_1 et T_2 sont triés avant l'appel à fusion.
  . Conclusion d'après la correction de Fusion.

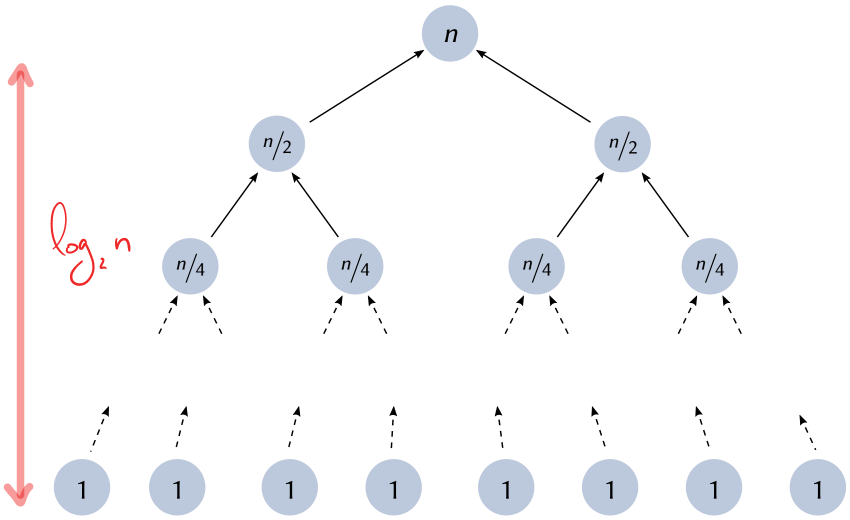
car $\lfloor n/2 \rfloor \leq \lceil n/2 \rceil < n$ pour $n \geq 2$

Preuve de complexité

$$t(n) \leq t(\lfloor n/2 \rfloor) + t(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n)$$

$$\Longrightarrow t(n) = \Theta(n \log n)$$ à démontrer !!!

Intuition de la complexité de TriFusion



$(f(n) \leq cn)$

$cn = cn$

$+$

$2 \times c\frac{n}{2} = cn$

$+$

$4 \times c\frac{n}{4} = cn$

$+$

$\vdots$

$+$

$\frac{n}{2} \times c \cdot 2 = cn$

$c \cdot n \cdot \log n$

$= \Theta(n \log n)$

Table des matières

La stratégie « diviser pour régner »

1. Diviser le problème en sous-problèmes
2. Résoudre récursivement ces sous-problèmes
3. Combiner les solutions pour reconstruire la solution du problème original.

- Stratégie principalement utilisée pour obtenir de meilleures complexités que celles données par un algorithme moins évolué.
- Exemple : la recherche dichotomique

Exemple du tri fusion

1. Diviser le tableau en 2 sous-tableaux de tailles environ égales
2. Trier récursivement chaque sous-tableau
3. Fusionner les sous-tableaux triés

Analyse d'un algorithme « diviser pour régner »

Récurrence(s) sur la taille du problème

Correction

- Hypothèse de récurrence : les appels récursifs sont corrects
- Preuve d'hérédité : *diviser* et/ou *combiner* sont correctes
- Preuve de correction

Complexité

1. Établir l'équation de récurrence
2. Résoudre la récurrence :
   - soit estimation (arbre de récursion, ...) puis preuve par récurrence
   - soit utilisation du *master theorem*

Une version du « *master theorem* »

Théorème

Soit $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $n \geq n_0$, et T croissante,

$$T(n) \leq aT(\lceil n/b \rceil) + O(n^d)$$

où a, $d \geq 0$ et $b > 1$. Alors

$$\boxed{T(n) = \begin{cases} O(n^d) & \text{si } b^d > a \quad (d > \log_b a) \\ O(n^d \log n) & \text{si } b^d = a \quad (d = \log_b a) \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } b^d < a \quad (d < \log_b a) \end{cases}}$$

Exemple du tri fusion

$$t(n) \leq t(\lceil n/2 \rceil\ ) + t(\lfloor n/2 \rfloor) + O(n)$$

$$\leq 2t(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

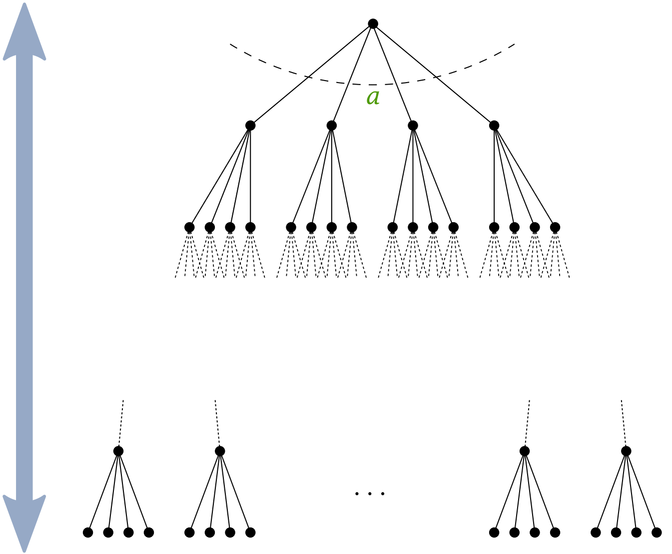
$a = 2$

$b = 2$

$d = 1$

Intuition graphique

$\boxed{\Theta(n^d) \rightsquigarrow \leq c\,n^d}$



$\ell = \log_b n$

modifié d'après *Algorithms* de Dasgupta, Papadimitriou, Vazirani
inspiré aussi de *Algorithms* de J. Erickson

$$c\,n^d$$
$$+$$
$$a \cdot c\left(\frac{n}{b}\right)^d$$
$$+$$
$$a^2 \cdot c\left(\frac{n}{b^2}\right)^d$$
$$+ \vdots +$$
$$a^\ell \cdot c\left(\frac{n}{b^\ell}\right)^d$$

$$\sum_{i=0}^{\ell} a^i c\left(\frac{n}{b^i}\right)^d = c\,n^d \sum_{i=0}^{\ell} \left(\frac{a}{b^d}\right)^i$$

Cœur de la preuve

Résoudre $T(n) \leq aT(\lceil n/b \rceil) + c \cdot n^d$ avec $n = b^\ell$

Lemme

Pour $\ell \geq 0$, $\boxed{T(b^\ell) \leq a^\ell T(1) + cb^{d\ell} \sum_{i=0}^{\ell-1} (a/b^d)^i}$

Preuve

$\ell = 0$: $T(b^0) \leq a^0 T(1) \rightarrow T(1) \leq T(1)$!

$\ell \geq 0$: $T(b^{\ell+1}) \leq a \cdot T(b^\ell) + c\, b^{(\ell+1)d}$

$\leq a\left(a^\ell T(1) + cb^{d\ell} \sum_{i=0}^{\ell-1} \left(a/b^d\right)^i\right) + c\, b^{(\ell+1)d}$

$= a^{\ell+1} T(1) + a \cdot c \cdot b^{d\ell} \sum_{i=0}^{\ell-1} \left(a/b^d\right)^i + c\, b^{(\ell+1)d}$

$= a^{\ell+1} T(1) + c\, b^{d\ell} \cdot b^d \sum_{i=0}^{\ell-1} \left(a/b^d\right)^{i+1} + c\, b^{(\ell+1)d} = a^{\ell} T(1) + cb^{d(\ell+1)} \sum_{i=0}^{\ell} \left(a/b^d\right)^i$

Cœur de la preuve

Résoudre $T(n) \leq aT(\lceil n/b \rceil) + c \cdot n^d$ avec $n = b^\ell$

Lemme

Pour $\ell \geq 0$, $T(b^\ell) \leq a^\ell T(1) + cb^{d\ell} \sum_{i=0}^{\ell-1} (a/b^d)^i$

Lemme

$$\sum_{i=0}^{\ell-1} \left(\frac{a}{b^d}\right)^i = \begin{cases} O(1) & \text{si } b^d > a \quad (1) \\ O(\ell) & \text{si } b^d = a \quad (2) \\ O((a/b^d)^\ell) & \text{si } b^d < a \quad (3) \end{cases}$$

Preuve (1) et (3)

$$\sum_{i=0}^{\ell-1} (a/b^d)^i = \frac{1 - (a/b^d)^\ell}{1 - a/b^d} \quad (*)$$

(1) $(*) \leq \dfrac{1}{1 - a/b^d} = \Theta(1)$

(3) $(*) \leq \dfrac{(a/b^d)^\ell}{a/b^d - 1} = \Theta\left((a/b^d)^\ell\right)$

(2) $\sum_{i=0}^{\ell-1} (a/b^d)^i = \sum_{i=0}^{\ell-1} 1 = \ell$

Cœur de la preuve

Résoudre $T(n) \leq aT(\lceil n/b \rceil) + c \cdot n^d$ avec $n = b^\ell$

Lemme

Pour $\ell \geq 0$, $T(b^\ell) \leq a^\ell T(1) + cb^{d\ell} \sum_{i=0}^{\ell-1} (a/b^d)^i$

Lemme

$$\sum_{i=0}^{\ell-1} \left(\frac{a}{b^d}\right)^i = \begin{cases} O(1) & \text{si } b^d > a \\ O(\ell) & \text{si } b^d = a \\ O((a/b^d)^\ell) & \text{si } b^d < a \end{cases}$$

Corollaire

$$T(b^\ell) = \begin{cases} O(\cancel{a^\ell} + b^{d\ell}) & \text{si } b^d > a \\ O(\cancel{a^\ell} + b^{d\ell} \cdot \ell) & \text{si } b^d = a \\ O(a^\ell + \cancel{b^{d\ell}(a/b^d)^\ell}) & \text{si } b^d < a \end{cases}$$

Fin de la preuve

$$x^{\log_x y} = y$$

Cas $n = b^\ell$ $\quad$ $(\ell = \log_b n)$

$$T(b^\ell) = \begin{cases} O(b^{d\ell}) & \text{si } b^d > a \\ O(b^{d\ell} \cdot \ell) & \text{si } b^d = a \\ O(a^\ell) & \text{si } b^d < a \end{cases}$$

$$= O(b^{\log_b n \cdot d}) = O(n^d)$$
$$= O(n^d \log n)$$
$$= O(a^{\log_b n}) = O(b^{\log_b(a) \log_b(n)}) = O(n^{\log_b a})$$

Cas général

- Hypothèse : T est croissante.
- Soit ℓ minimal tq $n \leq b^\ell$ (donc $n > b^{\ell-1}$ donc $b^\ell < b \cdot n$)

$$\hookrightarrow T(n) \leq T(b^\ell) = \begin{cases} \Theta((bn)^d) = \Theta(n^d) & \text{si } b^d > a \\ \Theta((bn)^d \log(bn)) = \Theta(n^d \log n) & \text{si } b^d = a \\ \Theta((bn)^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_b a}) & \text{si } b^d < a. \end{cases}$$

Conclusion

« Diviser pour régner »

1. Diviser ; 2. Résoudre récursivement ; 3. Combiner

Conception : seuls 1. et 3. demandent de la réflexion

Correction : preuve par récurrence

Complexité : *master theorem* (en général) *à apprendre !*

Autres versions du *master theorem*

- Récurrences plus générales *ex.:* $T(n) = aT(\lceil n/b \rceil) + O(n^d \log^c n)$
- Résultats plus précis
  - Constantes dans le « grand O »
  - Termes de plus bas degré

Objectifs du chapitre

- Reconnaître un algo. « diviser pour régner »
- Prouver sa correction et analyser sa complexité
- Tenter une stratégie « diviser pour régner » sur un nouveau problème

Table des matières

Retour à l'école primaire

Multiplication d'entiers

de n chiffres

Entrée Deux entiers A et B écrits en base 10

Sortie L'entier $C = A \times B$, en base 10

$$
\begin{array}{r}
1\,3\,8\,2 \\
\times \quad 7\,6\,3\,4 \\
\hline
5\,5\,2\,8 \\
4\,1\,4\,6 \\
8\,2\,9\,2 \\
9\,6\,7\,4 \\
\hline
1\,0\,5\,5\,0\,1\,8\,8
\end{array}
$$

Complexité

- Combien de *multiplications chiffre à chiffre* sont effectuées ?
- Combien d'*additions chiffre à chiffre* sont effectuées ?

↳ $\Theta(n^2)$

Première tentative

$$
\begin{array}{r}
1\ 3\ 8\ 2 \\
\times\ 7\ 6\ 3\ 4 \\
\hline
\end{array}
$$

Première tentative

$$
\begin{array}{r}
\boxed{1\ \ 3}\boxed{8\ \ 2} \\
\times\ \boxed{7\ \ 6}\boxed{3\ \ 4} \\
\hline
\end{array}
$$

Première tentative

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 3 & 8 & 2 \\ \times & 7 & 6 & 3 & 4 \\ \hline & 2 & 7 & 8 & 8 \end{array} \qquad (82 \times 34)$$

Première tentative

$$
\begin{array}{rcccccl}
 & & & 1\;3 & 8\;2 & & \\
 & & \times & 7\;6 & 3\;4 & & \\
\hline
 & & & 2\;7 & 8\;8 & & (82 \times 34) \\
+ & & 6\;2 & 3\;2 & & & (82 \times 76)
\end{array}
$$

Première tentative

$$
\begin{array}{rccccccl}
 & & & 1 & 3 & 8 & 2 & \\
\times & & & 7 & 6 & 3 & 4 & \\
\hline
 & & & 2 & 7 & 8 & 8 & (82 \times 34) \\
+ & 6 & 2 & 3 & 2 & & & (82 \times 76) \\
+ & 0 & 4 & 4 & 2 & & & (13 \times 34)
\end{array}
$$

Première tentative

$$
\begin{array}{r|cccccc|l}
 & & & 1 & 3 & 8 & 2 & \\
\times & & & 7 & 6 & 3 & 4 & \\
\hline
 & & & 2 & 7 & 8 & 8 & (82 \times 34) \\
+ & & 6 & 2 & 3 & 2 & & (82 \times 76) \\
+ & & 0 & 4 & 4 & 2 & & (13 \times 34) \\
+ & 0 & 9 & 8 & 8 & & & (13 \times 76)
\end{array}
$$

Première tentative

$$
\begin{array}{c|cccccccc|l}
 & & & & & 1 & 3 & 8 & 2 & \\
\times & & & & & 7 & 6 & 3 & 4 & \\
\hline
 & & & & & 2 & 7 & 8 & 8 & (82 \times 34) \\
+ & & & 6 & 2 & 3 & 2 & & & (82 \times 76) \\
+ & & & 0 & 4 & 4 & 2 & & & (13 \times 34) \\
+ & 0 & 9 & 8 & 8 & & & & & (13 \times 76) \\
\hline
 & 1 & 0 & 5 & 5 & 0 & 1 & 8 & 8 &
\end{array}
$$

Première tentative

$$
\begin{array}{rcccccccc}
 & & & & & 1 & 3 & 8 & 2 \\
 & & & & \times & 7 & 6 & 3 & 4 \\
\hline
 & & & & & 2 & 7 & 8 & 8 & (82 \times 34) \\
+ & & & 6 & 2 & 3 & 2 & & & (82 \times 76) \\
+ & & & 0 & 4 & 4 & 2 & & & (13 \times 34) \\
+ & 0 & 9 & 8 & 8 & & & & & (13 \times 76) \\
\hline
 & 1 & 0 & 5 & 5 & 0 & 1 & 8 & 8
\end{array}
$$

Complexité

$T(n) \leq 4T(\lceil n/2 \rceil) + O(n)$

$b^d = 2 < a$

$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^2)$ super...

Première tentative

$$
\begin{array}{c cccccccc c}
 & & & & & 1 & 3 & 8 & 2 & \\
 & & & & \times & 7 & 6 & 3 & 4 & \\
\hline
 & & & & & 2 & 7 & 8 & 8 & (82 \times 34) \\
+ & & & 6 & 2 & 3 & 2 & & & (82 \times 76) \\
+ & & & 0 & 4 & 4 & 2 & & & (13 \times 34) \\
+ & 0 & 9 & 8 & 8 & & & & & (13 \times 76) \\
\hline
 & 1 & 0 & 5 & 5 & 0 & 1 & 8 & 8 &
\end{array}
$$

Complexité

$$T(n) \leq 4T(\lceil n/2 \rceil) + O(n)$$

Idée de Karatsuba (version Knuth)

$$
\begin{array}{rc}
 & (\,\boxed{1\quad 3} - \boxed{8\quad 2}\,) \\
\times & (\,\boxed{7\quad 6} - \boxed{3\quad 4}\,) \\
\hline
\end{array}
$$

Idée de Karatsuba (version Knuth)

$$
\begin{array}{rccccc}
 & (& \boxed{1\ \ 3} & - & \boxed{8\ \ 2} &) \\
\times & (& \boxed{7\ \ 6} & - & \boxed{3\ \ 4} &) \\
\hline
 & & \boxed{0\ \ 9\ \ 8\ \ 8} & & & (13 \times 76)
\end{array}
$$

Idée de Karatsuba (version Knuth)

$$
\begin{array}{rcccccl}
 & (& \boxed{1\ 3} & - & \boxed{8\ 2} &) & \\
\times & (& \boxed{7\ 6} & - & \boxed{3\ 4} &) & \\
\hline
 & & \boxed{0\ 9\ 8\ 8} & & & & (13 \times 76) \\
- & & \boxed{0\ 4\ 4\ 2} & & & & (13 \times 34)
\end{array}
$$

Idée de Karatsuba (version Knuth)

$$
\begin{array}{rcl}
 & (\,13 - 82\,) & \\
\times & (\,76 - 34\,) & \\
\hline
 & 0988 & (13 \times 76) \\
- & 0442 & (13 \times 34) \\
- & 6232 & (82 \times 76)
\end{array}
$$

Idée de Karatsuba (version Knuth)

$$
\begin{array}{rcl}
 & (\boxed{1\ 3} - \boxed{8\ 2}) & \\
\times & (\boxed{7\ 6} - \boxed{3\ 4}) & \\
\hline
 & \boxed{0\ 9\ 8\ 8} & (13 \times 76) \\
- & \boxed{0\ 4\ 4\ 2} & (13 \times 34) \\
- & \boxed{6\ 2\ 3\ 2} & (82 \times 76) \\
+ & \boxed{2\ 7\ 8\ 8} & (82 \times 34)
\end{array}
$$

Idée de Karatsuba (version Knuth)

$$
\begin{array}{rcl}
 & (13 - 82) & \\
\times & (76 - 34) & \\
\hline
 & 0988 & (13 \times 76) \\
- & 0442 & (13 \times 34) \\
- & 6232 & (82 \times 76) \\
+ & 2788 & (82 \times 34) \\
\hline
- & 2898 &
\end{array}
$$

Idée de Karatsuba (version Knuth)

$$
\begin{array}{rcll}
 & (\,13 - 82\,) & & \\
\times & (\,76 - 34\,) & & \\
\hline
 & 0988 & & (13 \times 76) \\
- & 0442 & & (13 \times 34) \\
- & 6232 & & (82 \times 76) \\
+ & 2788 & & (82 \times 34) \\
\hline
- & 2898 & &
\end{array}
$$

Idée de Karatsuba (version Knuth)

$$
\begin{array}{rrl}
 & (13 - 82) & \\
\times & (76 - 34) & \\
\hline
 & 0988 & (13 \times 76) \\
- & 0442 & (13 \times 34) \\
- & 6232 & (82 \times 76) \\
+ & 2788 & (82 \times 34) \\
\hline
- & 2898 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
 & 1382 \\
\times & 7634 \\
\hline
 & 2788 \\
+ & 2898 \\
+ & 2788 \\
+ & 0988 \\
+ & 0988 \\
\hline
 & 10550188
\end{array}
$$

Idée de Karatsuba (version Knuth)

$$
\begin{array}{rrl}
 & (\,13 - 82\,) & \\
\times & (\,76 - 34\,) & \\
\hline
 & 0988 & (13 \times 76) \\
- & \boxed{0442} & (13 \times 34) \\
- & \boxed{6232} & (82 \times 76) \\
+ & 2788 & (82 \times 34) \\
\hline
- & 2898 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
 & 13\,82 \\
\times & 76\,34 \\
\hline
 & 2788 \\
+ & 2898 \\
+ & 2788 \\
+ & 0988 \\
+ & 0988 \\
\hline
 & 10550188
\end{array}
$$

Complexité

$T(n) \leq 3T(\lceil n/2 \rceil) + O(n)$ $\rightarrow$ $\Theta(n^{\log_2 3}) = \Theta(n^{1,58..})$

Algorithme de Karatsuba : en deux dessins

$$
\begin{array}{rc}
 & (\; A_1 \; - \; A_0 \;) \\
\times & (\; B_1 \; - \; B_0 \;) \\
\hline
 & A_1 \times B_1 \\
- & A_1 \times B_0 \\
- & A_0 \times B_1 \\
+ & A_0 \times B_0 \\
\hline
 & (A_1 - A_0)(B_1 - B_0)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrr}
 & & & A_1 \cdot 10^{n/2} + A_0 \\
 & & \times & B_1 \cdot 10^{n/2} + B_0 \\
\hline
 & & & A_0 \times B_0 \\
 & - & (A_1 - A_0)(B_1 - B_0) & \\
 & + & A_0 \times B_0 & \\
 & + & A_1 \times B_1 & \\
+ & A_1 \times B_1 & & \\
\hline
 & \multicolumn{3}{r}{(A_1 10^{\frac{n}{2}} + A_0) \times (B_1 10^{\frac{n}{2}} + B_0)}
\end{array}
$$

Algorithme de Karatsuba (1962)

$\textsc{Karatsuba}(A, B)$:

1. Si A et B n'ont qu'un chiffre : Renvoyer $a_0 b_0$
2. Écrire A sous la forme $A_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot A_1$
3. Écrire B sous la forme $B_0 + 10^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot B_1$
4. $C_{00} \leftarrow \textsc{Karatsuba}(A_0, B_0)$
5. $C_{11} \leftarrow \textsc{Karatsuba}(A_1, B_1)$
6. $D \leftarrow \textsc{Karatsuba}(|A_0 - A_1|, |B_0 - B_1|)$
7. $s \leftarrow \text{signe}(A_0 - A_1) \times \text{signe}(B_0 - B_1)$
8. Renvoyer $C_{00} + 10^{\lfloor n/2 \rfloor}(C_{00} + C_{11} - s \cdot D) + 10^{2\lfloor n/2 \rfloor} C_{11}$

Correction

$$A \times B = C_{00} + 10^{\lfloor n/2 \rfloor}(C_{00} + C_{11} - sD) + 10^{2\lfloor n/2 \rfloor} C_{11}$$

Complexité

L'algorithme $\textsc{Karatsuba}$ a une complexité $O(n^{\log_2 3}) = O(n^{1,585})$

Dans la *vraie vie*

Base 10 $\rightsquigarrow$ bases 2^{32}, 2^{64}, …

- Grands entiers : tableaux d'entiers de w bits $\iff$ entiers en base 2^w
- Exemples : `gmp` (C/C++), `BigInteger` (Java), `int` (Python), …
- Autre utilisation : polynômes

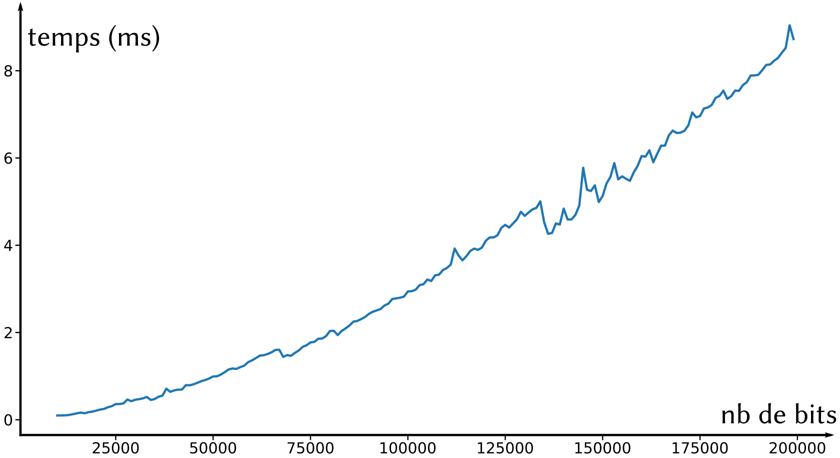
Quel TAD utiliser ?

- TAD entier : opérations en temps $O(1)$ — dont multiplication
  - Réaliste pour des entiers raisonnables — indices de tableau, …
  - Irréaliste pour de grands entiers — cryptographie, …
- TAD entier borné : opérations en temps $O(1)$ pour des entiers $< 2^w$

Algorithmes plus rapides

- Toom-3 (1963) : découpe en 3 morceaux — $O(n^{1,465})$
- Toom-Cook (1966): découpe en r morceaux — $O(n^{1+\epsilon})$
- Schönhage-Strassen (1971) : basé sur la FFT — $O(n \log n \log \log n)$
- …
- Harvey-Hoeven (2021) : utilise aussi la FFT — $\mathbf{O(n \log n)}$

Pour finir : multiplication d'entiers en Python



Pour finir : multiplication d'entiers en Python

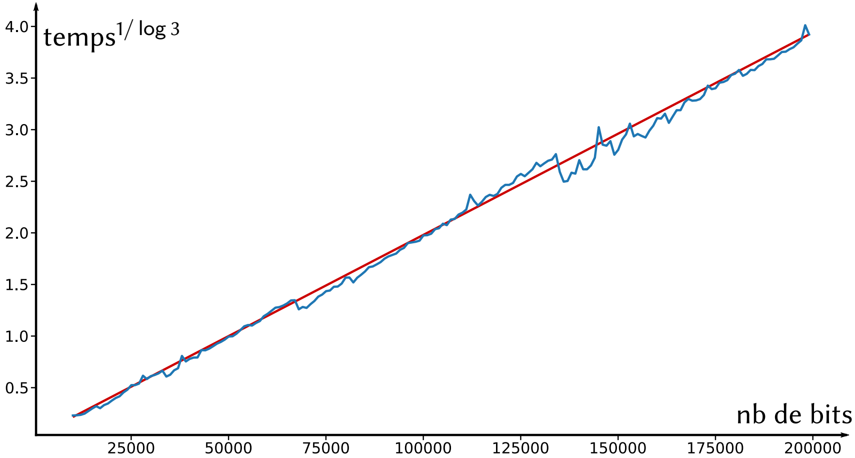
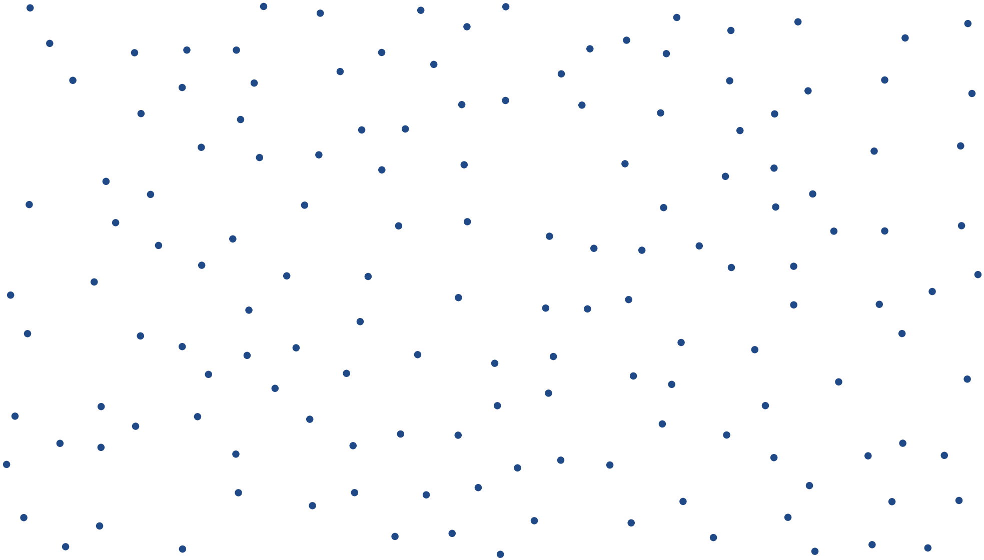
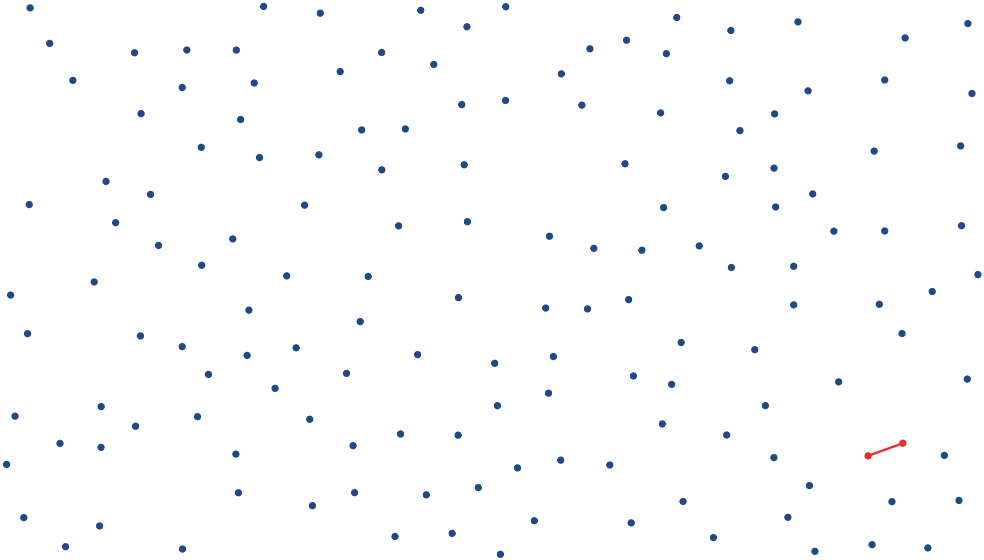


Table des matières

Quels sont les deux points les plus proches?



Quels sont les deux points les plus proches?



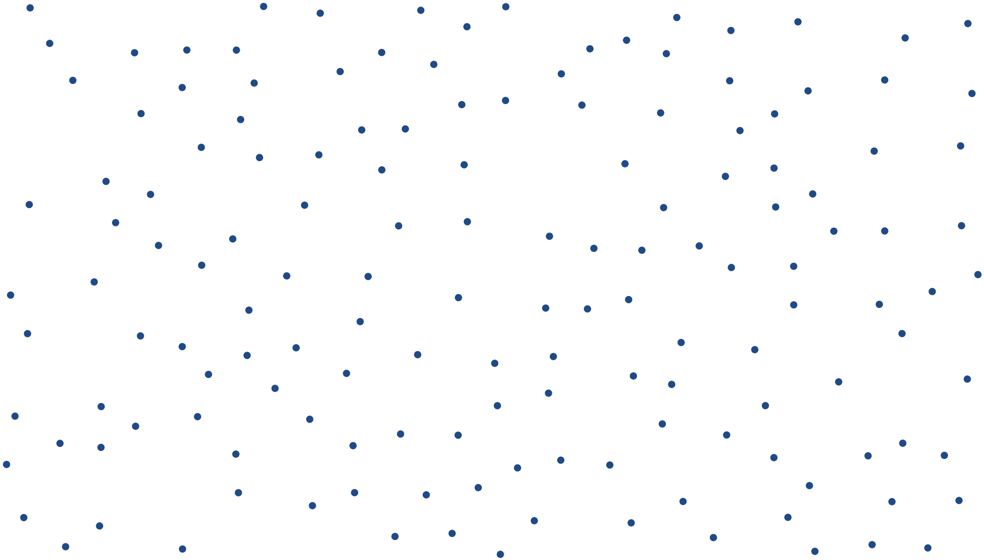
L'approche *naïve* : tester tous les couples de points

DISTANCENAÏVE(T) : $n = \#T$

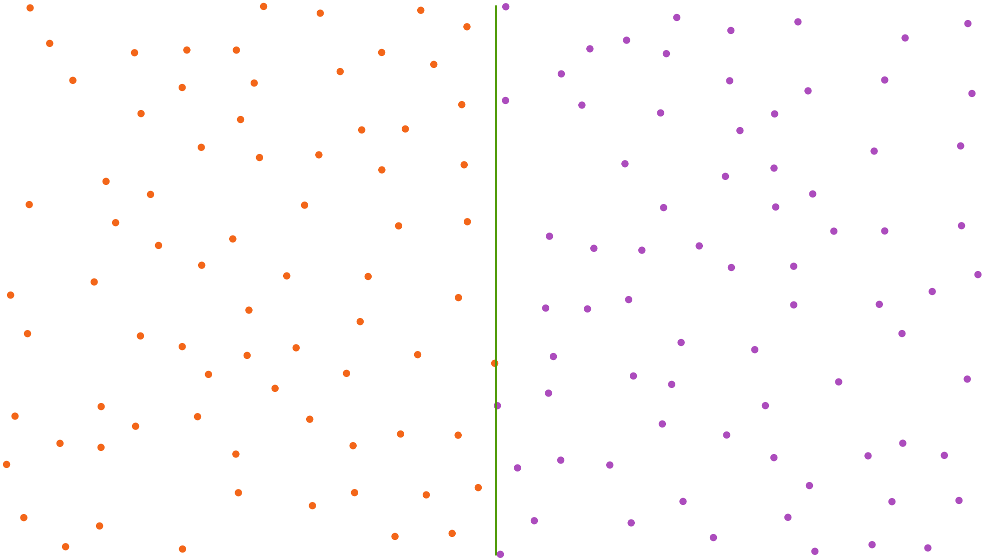
1. $d \leftarrow +\infty$
2. Pour $i = 0$ à $n-1$:
3. Pour $j = i+1$ à $n-1$:
4. $(x_i, y_i) \leftarrow T_{[i]}$
5. $(x_j, y_j) \leftarrow T_{[j]}$
6. $d_{ij} \leftarrow \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ DISTANCE$(T_{[i]}, T_{[j]})$
7. Si $d_{ij} < d$: $d \leftarrow d_{ij}$
8. Renvoyer d

~~Correction~~ et complexité $\Theta(n^2)$

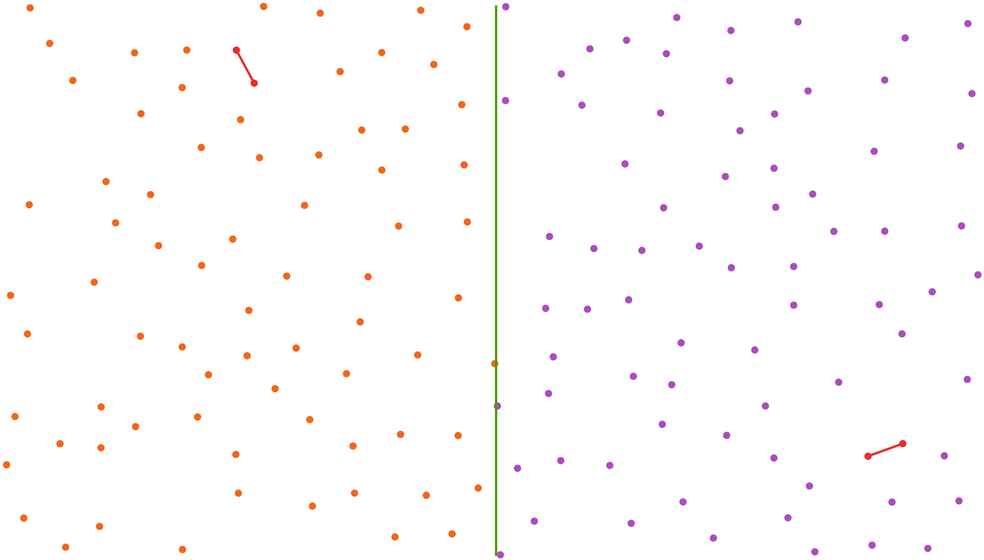
Une approche « diviser-pour-régner » — exemple 1



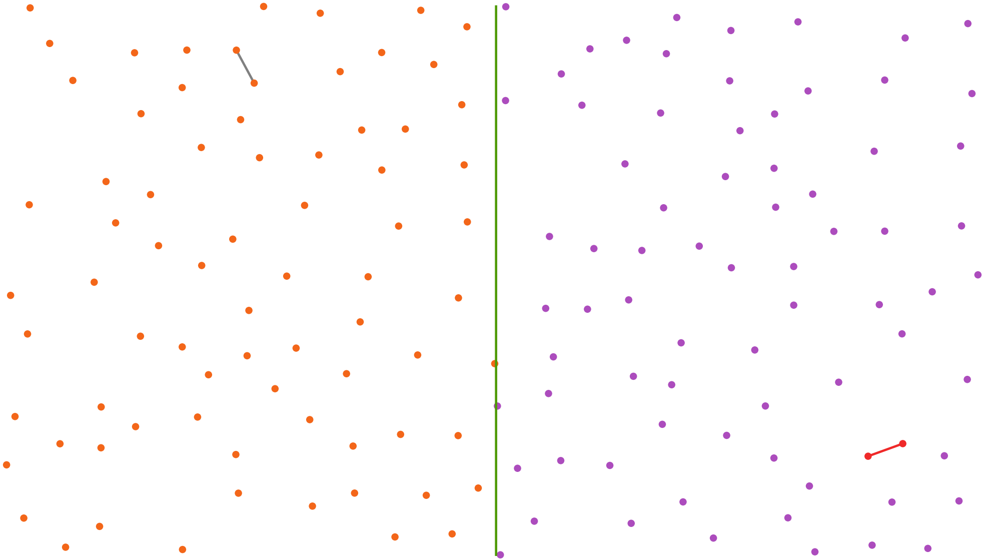
Une approche « diviser-pour-régner » — exemple 1



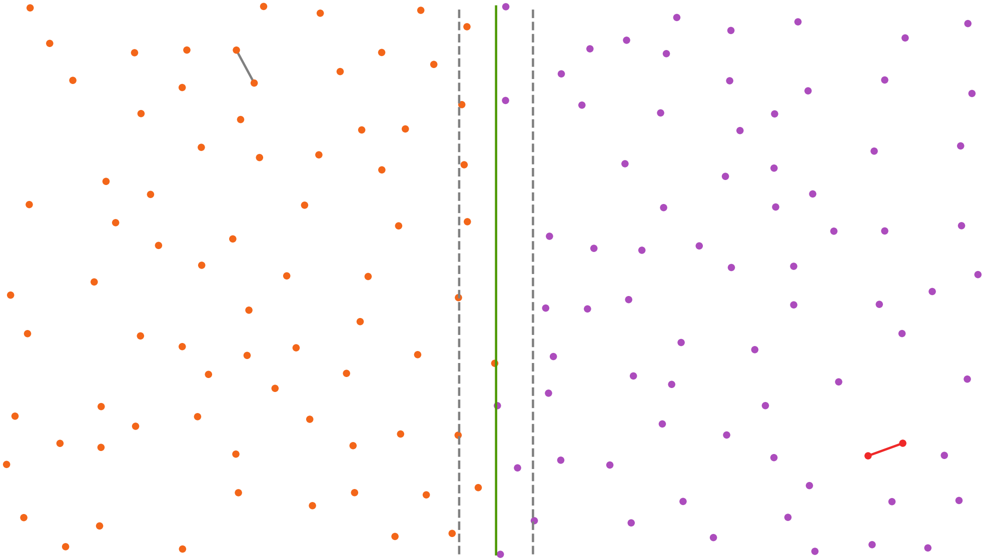
Une approche « diviser-pour-régner » — exemple 1



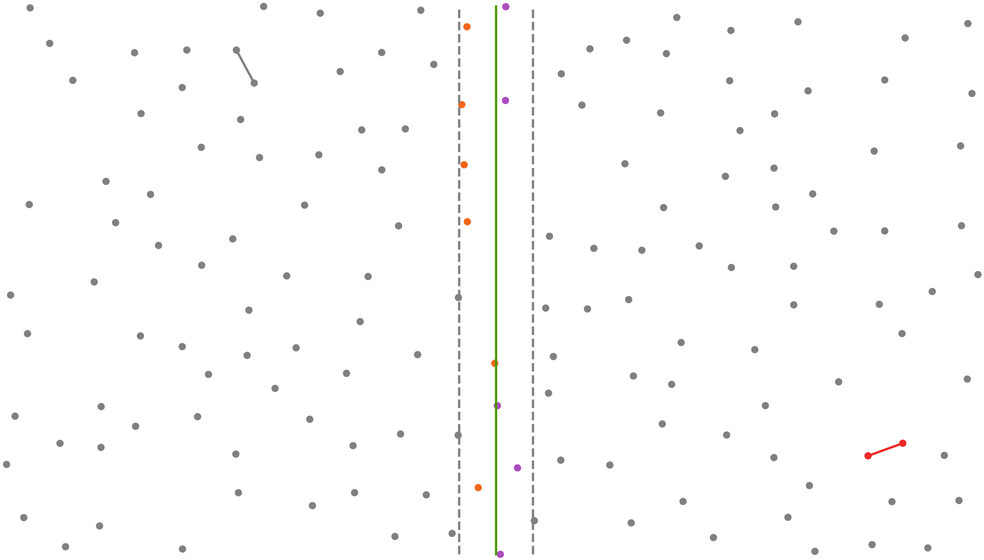
Une approche « diviser-pour-régner » — exemple 1



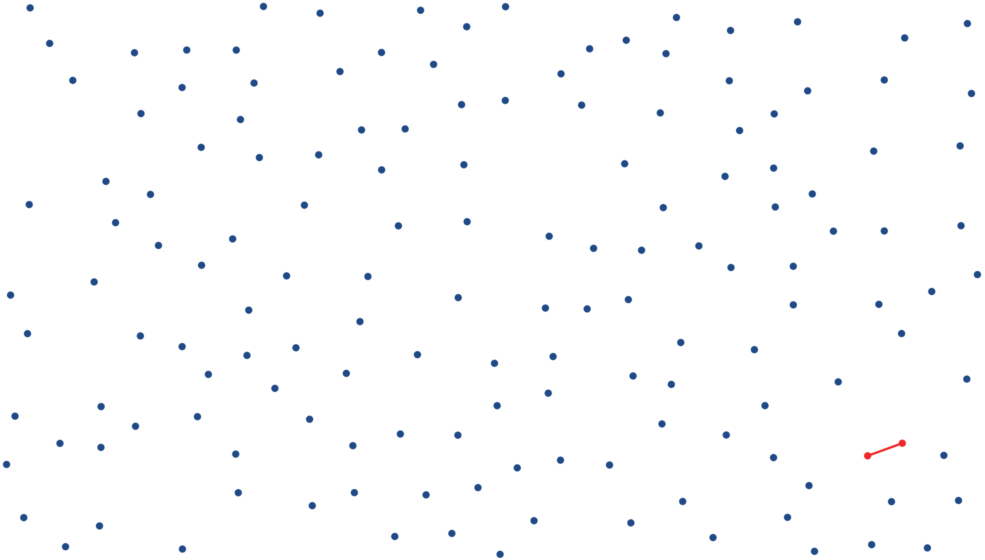
Une approche « diviser-pour-régner » — exemple 1



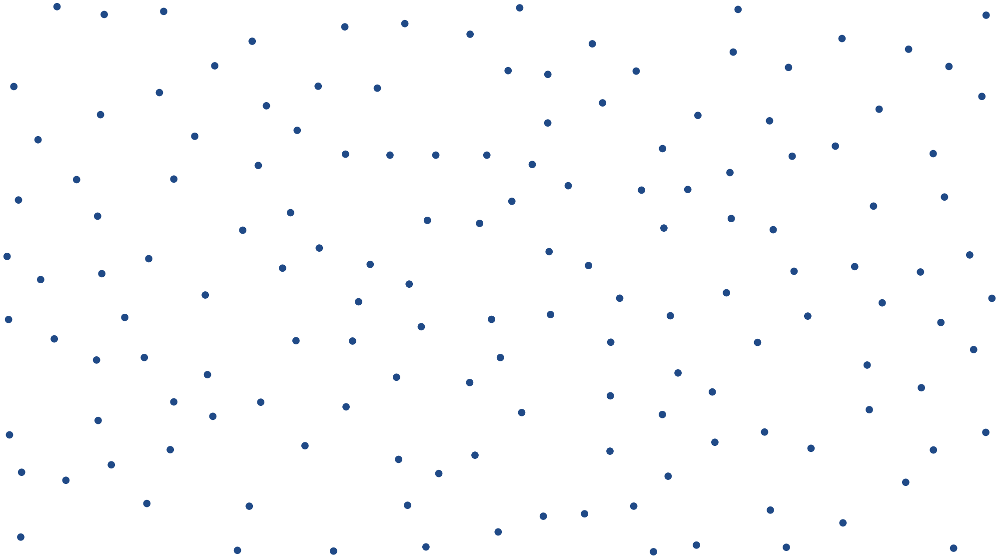
Une approche « diviser-pour-régner » — exemple 1



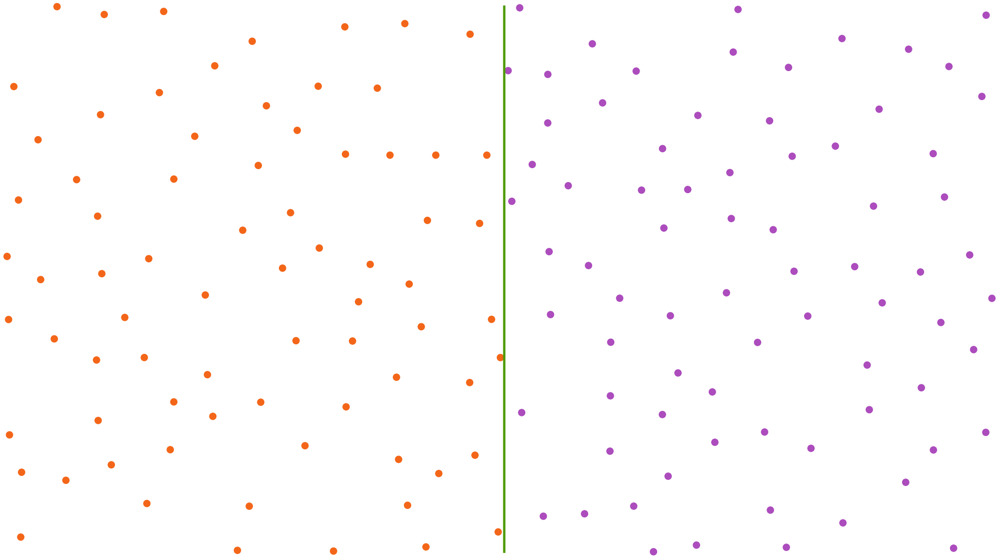
Une approche « diviser-pour-régner » — exemple 1



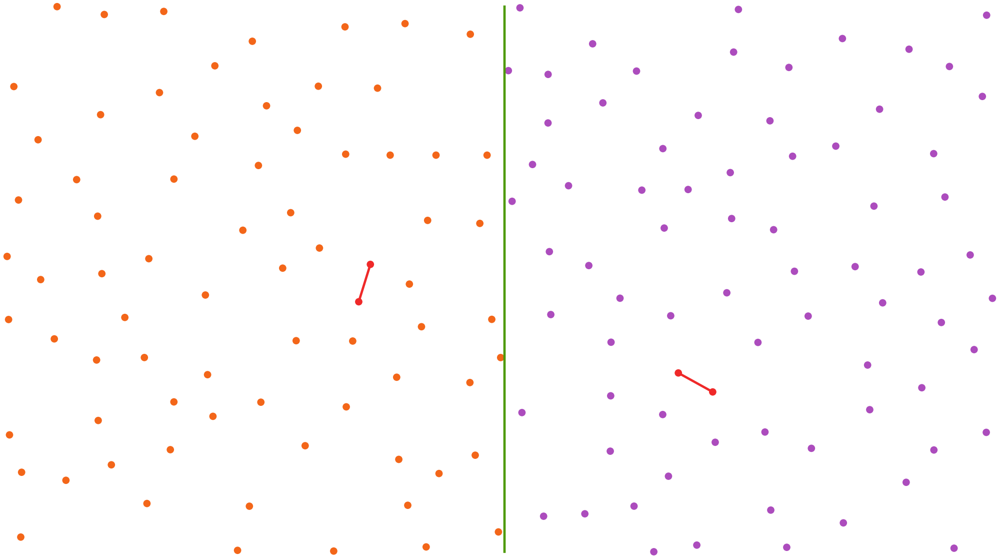
Une approche « diviser-pour-régner » — exemple 2



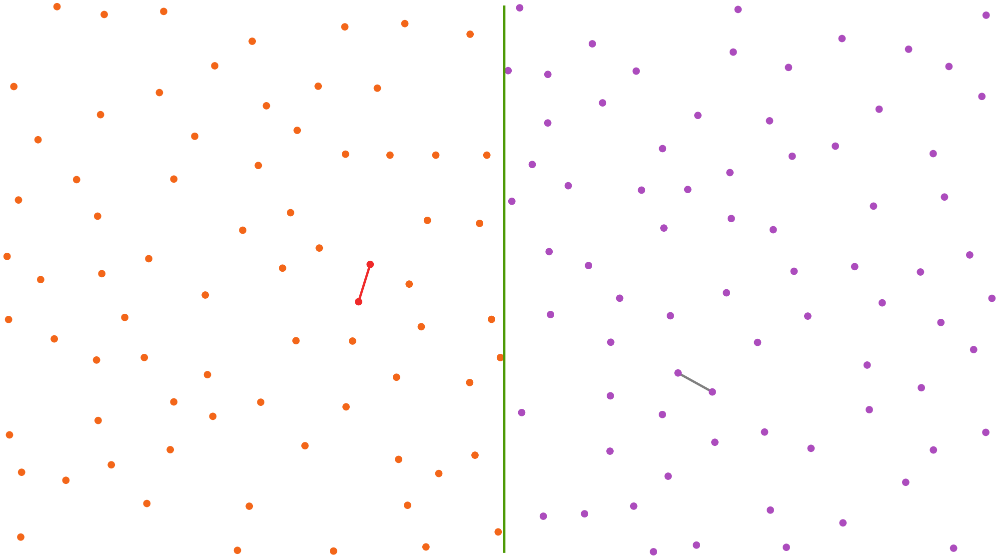
Une approche « diviser-pour-régner » — exemple 2



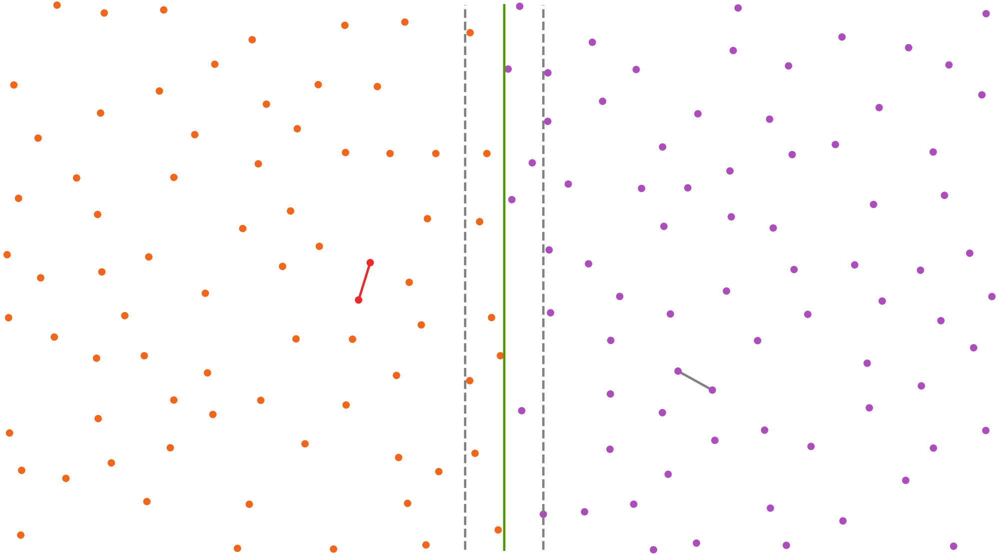
Une approche « diviser-pour-régner » — exemple 2



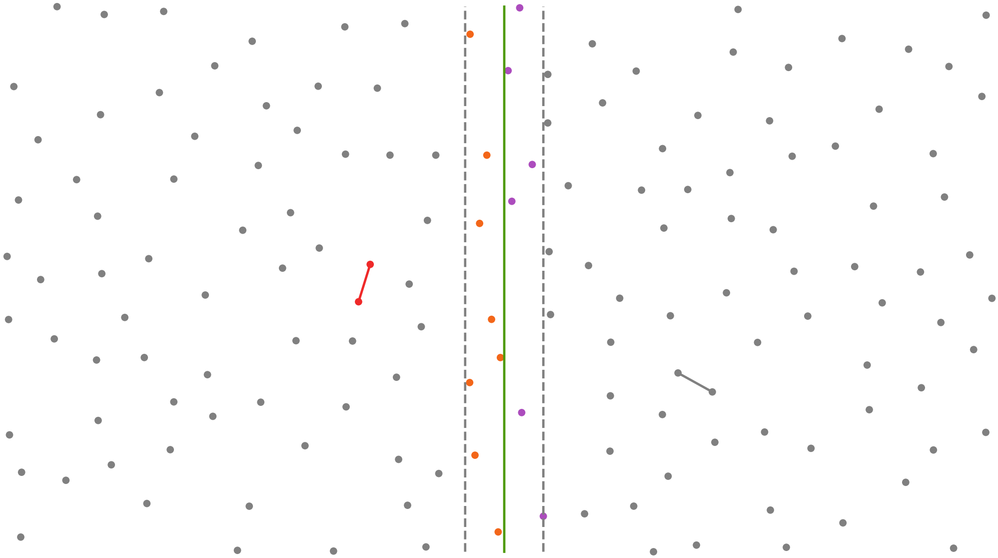
Une approche « diviser-pour-régner » — exemple 2



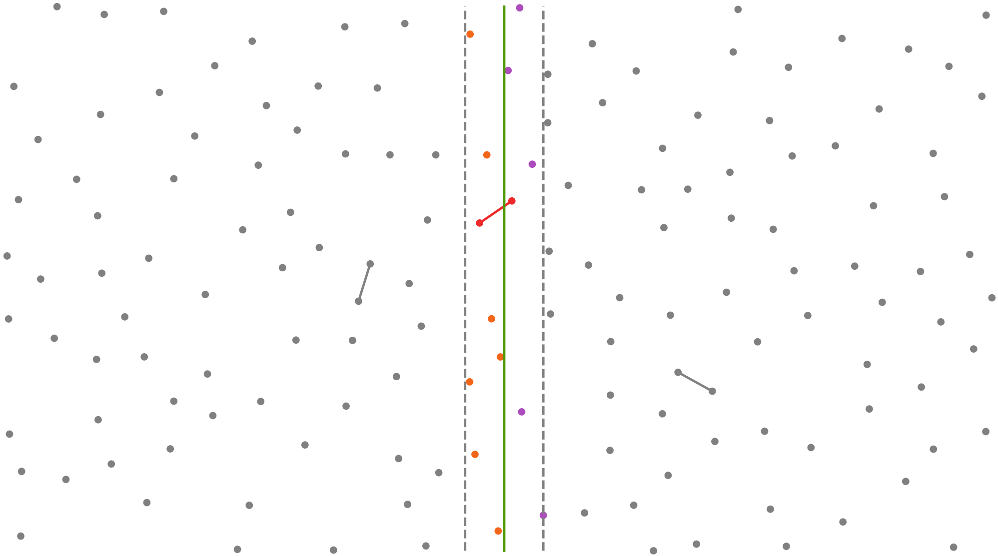
Une approche « diviser-pour-régner » — exemple 2



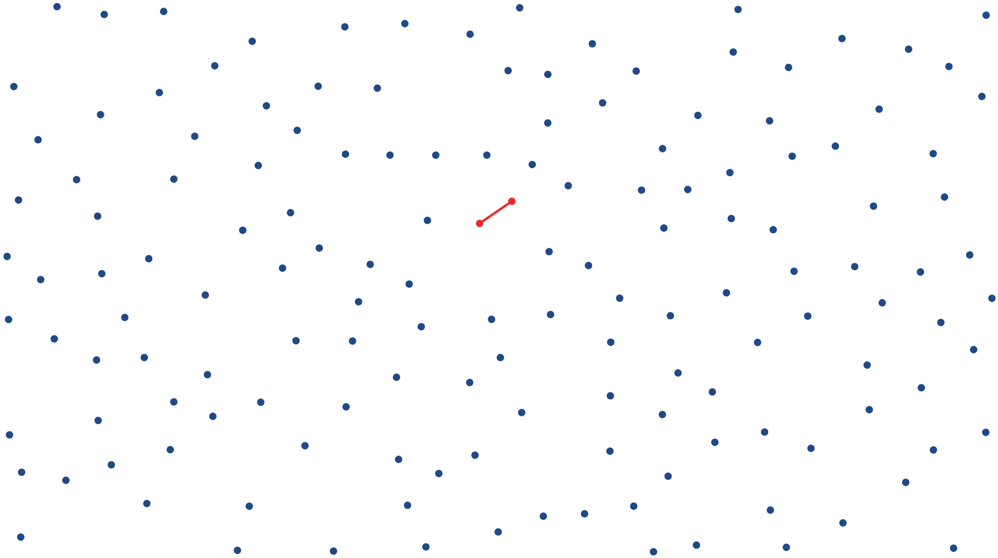
Une approche « diviser-pour-régner » — exemple 2



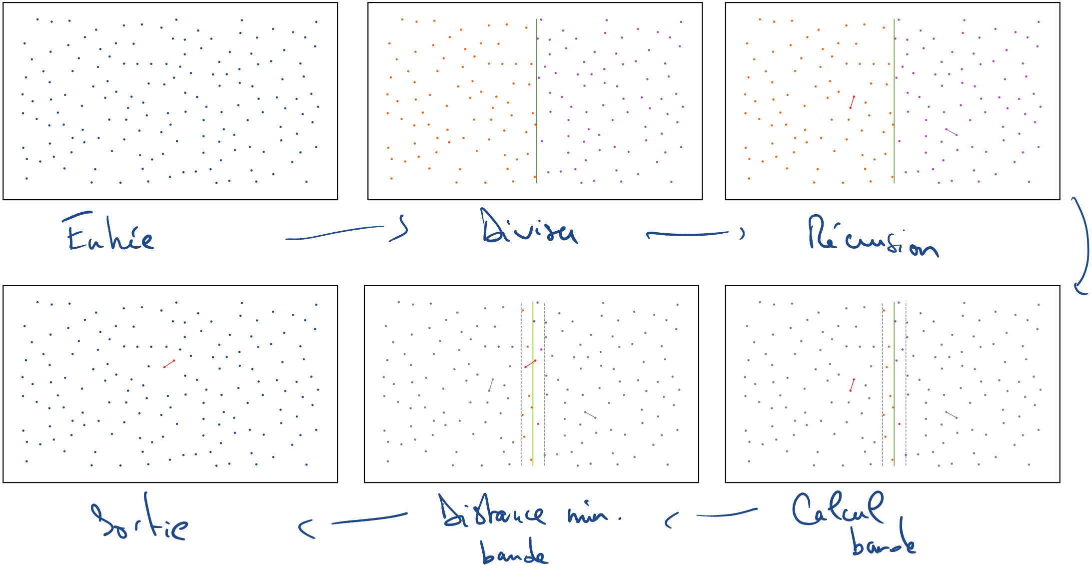
Une approche « diviser-pour-régner » — exemple 2



Une approche « diviser-pour-régner » — exemple 2



Idée de l'algorithme



Algorithme : première version

DistanceMinimale(T) : $\qquad n = \#T$

0. Si $n \leq 4$: renvoyer DistanceNaïve(T)
1. Trier T par abscisses croissantes
   $(G, D) \leftarrow (T_{[0,\lceil n/2\rceil[}, T_{[\lceil n/2\rceil,n[})$
2. $(d_G, d_D) \leftarrow$ (DistanceMinimale(G), DistanceMinimale(D))
   $d \leftarrow \min(d_G, d_D)$
3. $m \leftarrow (T_{[\lceil n/2\rceil-1]} + T_{[\lceil n/2\rceil]})/2$
   $B \leftarrow [(x, y) \in T : m - d \leq x \leq m + d]$
4. $d_B \leftarrow$ DistanceMinimale(B)
5. Renvoyer $\min(d, d_B)$

Complexité

$$T(n) \leq 2T(\lceil n/2 \rceil) + T(\underset{\substack{\uparrow \\ \leq n}}{\#B}) + \Theta(n) \longrightarrow \text{l'algo ne termine pas !}$$

Distance minimale dans la bande

Lemme

Soit $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in B$ à distance $< d$, $y_0 \leq y_1$
Alors il existe ≤ 8 points $(x_i, y_i) \in B$ tels que $y_0 \leq y_i \leq y_1$

Distance minimale dans la bande

Lemme

Soit $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in B$ ~~à distance $< d$, $y_0 \leq y_1$~~ vérifiant $y_0 \leq y_1 \leq y_0 + d$

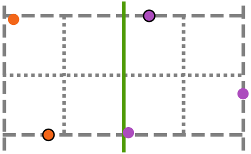
Alors il existe ≤ 8 points $(x_i, y_i) \in B$ tels que $y_0 \leq y_i \leq y_1$

Distance minimale dans la bande

Lemme

Soit $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in B$ ~~à distance~~ $\cancel{< d, y_0 \leq y_1}$ vérifiant $y_0 \leq y_1 \leq y_0 + d$
Alors il existe ≤ 8 points $(x_i, y_i) \in B$ tels que $y_0 \leq y_i \leq y_1$

Preuve



Distance minimale dans la bande

Lemme

Soit $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in B$ ~~à distance $< d$, $y_0 \leq y_1$~~ vérifiant $y_0 \leq y_1 \leq y_0 + d$
Alors il existe ≤ 8 points $(x_i, y_i) \in B$ tels que $y_0 \leq y_i \leq y_1$

DistanceBande(B, d) : $\qquad n = \#B$

1. Trier B par ordonnées croissantes
2. Pour $i = 0$ à $n - 1$:
3. Pour $j = i + 1$ à $i + 7$:
4. $d_{ij} \leftarrow$ DISTANCE$(B_{[i]}, B_{[j]})$
5. Si $d_{ij} < d$: $d \leftarrow d_{ij}$
6. Renvoyer d

Complexité

$\Theta(n \log n)$

Algorithme : deuxième version

DistanceMinimale(T) : $\qquad n = \#T$

0. Si $n \leq 4$: renvoyer DistanceNaïve(T)
1. Trier T par abscisses croissantes
   $(G, D) \leftarrow (T_{[0,\lceil n/2\rceil[}, T_{[\lceil n/2\rceil,n[})$
2. $(d_G, d_D) \leftarrow (\text{DistanceMinimale}(G), \text{DistanceMinimale}(D))$
   $d \leftarrow \min(d_G, d_D)$
3. $m \leftarrow (T_{[\lceil n/2\rceil-1]} + T_{[\lceil n/2\rceil]})/2$
   $B \leftarrow [(x, y) \in T : m - d \leq x \leq m + d]$
4. $d_B \leftarrow$ DistanceBande(B, d)
5. Renvoyer $\min(d, d_B)$

Complexité

$$T(n) \leq 2T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n \log n)$$

$$\hookrightarrow \Theta(n \log^2 n)$$

Algorithme : version finale

$\textsc{DistanceRec}(X, Y)$: $\quad n = \#X\ (= \#Y)$

0. Si $n \leq 4$: renvoyer $\textsc{DistanceNaïve}(X)$
1. $(X_G, X_D) \leftarrow (X_{[0,\lceil n/2\rceil[}, X_{[\lceil n/2\rceil,n[})$
   $(Y_G, Y_D) \leftarrow ([(x,y) \in Y : (x,y) < X_{\lceil n/2\rceil}], [(x,y) \in Y : (x,y) \geq X_{\lceil n/2\rceil}])$
2. $(d_G, d_D) \leftarrow (\textsc{DistanceRec}(X_G, Y_G), \textsc{DistanceRec}(X_D, Y_D))$
   $d \leftarrow \min(d_G, d_D)$
3. $m \leftarrow (X_{[\lceil n/2\rceil-1]} + X_{[\lceil n/2\rceil]})/2$
   $B \leftarrow [(x,y) \in Y : m - d \leq x \leq m + d]$
4. $d_B \leftarrow \textsc{DistanceBande}(B, d)$
5. Renvoyer $\min(d, d_B)$

$\textsc{DistanceMinimale}(T)$: $\quad n = \#T$

0. Si $n \leq 4$: renvoyer $\textsc{DistanceNaïve}(T)$
1. $X \leftarrow$ tableau T trié par abscisses croissantes
   $Y \leftarrow$ tableau T trié par ordonnées croissantes
2. Renvoyer $\textsc{DistanceRec}(X, Y)$

Bilan sur la distance minimale

Théorème

DistanceMinimale(T) renvoie la distance minimale entre deux points de T en temps $O(n \log n)$, où $n = \#T$

Remarque

- Modification simple pour aussi renvoyer les points minimisant la distance

Preuve du théorème

- Correction : toujours OK
- Complexité : DistanceRec : $T(n) \leq 2T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n) \rightsquigarrow \Theta(n \log n)$

DistanceMinimale : $\underbrace{\Theta(n \log n)}_{\text{tri } X} + \underbrace{\Theta(n \log n)}_{\text{tri } Y} + \underbrace{\Theta(n \log n)}_{\text{DistanceRec}} = \Theta(n \log n)$

Conclusion sur « diviser-pour-régner »

Conception d'algorithme : trois étapes

1. Diviser
2. Résoudre
3. Combiner

Analyse de complexité

1. Équation de récurrence
2. *Master theorem*

Domaines d'application

- Tableaux, arbres, graphes, …
- Géométrie algorithmique
- Calcul formel et numérique (entiers, polynômes, matrices)