M2R MA
Des modèles quantiques à la matière condensée – Partie I

Examen — 1ère session 2010–2011
16 décembre 2010 — 1 heure 30

Les notes de cours manuscrites et tapuscrites sont autorisées.
On peut faire référence sans démonstration à des résultats obtenus en cours.

Spectre du laplacien

On admettra ici que les opérateurs dont il est question sont bien auto-adjoints.

Questions

1. Soit V une fonction réelle continue définie sur $\mathbb{R}$. On note aussi V l'opérateur de multiplication par cette fonction dans $L^2(\mathbb{R})$. Montrer que $\overline{\mathrm{Im}(V)}$, la fermeture de l'image de la fonction V, est incluse dans $\sigma(V)$, le spectre de V.

2. Soit maintenant V une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}^d$. On admet que le résultat précédent reste vrai. Montrer que $\overline{\mathrm{Im}(V)} = \sigma(V)$.

3. En déduire que le spectre du laplacien sur $\mathbb{R}^d$ est $[0, +\infty[$.

Question subsidiaire Montrer que pour V définie sur $\mathbb{R}^d$, $\overline{\mathrm{Im}(V)} \subset \sigma(V)$

Démonstration et corollaire du théorème 2

On considère ici un opérateur auto-adjoint A sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On justifiera bien que les quantités manipulées ont un sens.

Questions

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ de partie imaginaire non nulle et $\psi \in \mathrm{D}(A)$. En développant la quantité $\|(A - z\mathbb{1})\phi\|^2$, montrer la relation de coercivité : $\|(A - z\mathbb{1})\phi\| \geq |\Im(z)|\|\phi\|$.

2. Montrer que pour tout $\phi \in \mathrm{Im}(A - z\mathbb{1})$, $\|(A - z\mathbb{1})^{-1}\phi\| \leq |\Im(z)|^{-1}\|\phi\|$.

3. Montrer que si $\phi \in \mathrm{D}(A - z\mathbb{1})^{\perp}$ et $\psi \in \mathrm{D}(A)$, alors $\langle (A - \bar{z}\mathbb{1})\phi, \psi \rangle = 0$.

4. En déduire que tout $\phi \in \mathrm{Im}(A - z\mathbb{1})$ est nul.

5. En déduire que pour tout $\psi \in \mathcal{H}$, $\|(A - z\mathbb{1})^{-1}\psi\| \leq |\Im(z)|^{-1}\|\psi\|$.

6. Pour $\psi \in D(A)$ tel que $\|\psi\| = 1$, on définit $E(\psi) = \langle \psi, A\psi \rangle$. Soit un réel $r < \inf(E)$, adapter le raisonnement précédent pour montrer que $r \notin \sigma(A)$.