M2R MA : Résolution numérique des EDP 2

Examen — 1ère session 2006–2007

12 mars 2007 — 2 heures

Tous les documents sont autorisés. Il est conseillé de consacrer environ 15 minutes à chacun des exercices ainsi qu'aux questions préliminaires du problème. Pour avoir suffisamment de temps à consacrer au problème, les résultats de ces questions préliminaires peuvent en outre être admis dans un premier temps, principalement si vous n'êtes pas très familiers avec les propriétés de la convolution.

Exercice 1 : splitting à trois opérateurs

On veut décrire des méthodes de splitting pour le problème à trois opérateurs linéaires (en dimension finie) non raides :

$$\dot{x} = Ax + Bx + Cx.$$

Questions

1. Donner une méthode de type Lie.
   Sans refaire les développements limités, et en utilisant les résultats pour deux opérateurs, calculer le reste au premier ordre non nul en fonction des commutateurs $[A, B]$, $[A, C]$ et $[B, C]$.
2. De même, donner une méthode de type Strang et expliquer pourquoi elle est formellement d'ordre 2.
3. Déduire une méthode au moins d'ordre 3 à partir de cette méthode de Strang.

Exercice 2 : équations linéaires non autonomes

Le but de cet exercice est de donner un avant-goût des calculs dans le cas non autonome.

Soit a une fonction $W^{1,\infty}$, on considère l'équation scalaire non autonome

$$\dot{x} = a(t)x.$$

Questions

1. Quelle est la solution exacte de cette équation ?
2. Si on résout à la place l'équation $\dot{x} = a(0)x$ de manière exacte, quel est l'ordre de l'erreur locale commise ?
3. On résout l'équation initiale par une méthode d'Euler. Quel est l'ordre de l'erreur locale commise ?

Problème : équation de réaction–diffusion

On veut étudier la convergence d'un schéma de Lie pour l'équation de réaction–diffusion

$$\left| \begin{array}{ll} \partial_t u - \partial_x^2 u + f(u) = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = u^0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{array} \right.$$

où $u(x,t) \in \mathbb{R}$. La fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^0 \cap W^{1,\infty}$ et on note $M' = \|f'\|_{L^\infty}$. On suppose que la donnée initiale est dans $\mathcal{C}^0 \cap L^\infty$.

On notera $\mathcal{S}(t)$ le flot total de l'équation de réaction–diffusion, $\mathcal{X}(t)$ le flot de l'équation de diffusion seule $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ et $\mathcal{Y}(t)$ le flot de l'équation de réaction seule $\partial_t u + f(u) = 0$. On considère le schéma de Lie $\mathcal{L}(t) = \mathcal{X}(t)\mathcal{Y}(t)$.

On rappelle que pour tout $w \in L^\infty$, $\mathcal{X}(t)w = E(\cdot,t) \star w$ où est E est la solution élémentaire de l'équation de diffusion

$$E(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{4t}).$$

On admettra que pour tout $T > 0$, $\mathcal{S}(t)u^0 \in \mathcal{C}([0,T]; L^\infty)$ et est indéfiniment différentiable sur $[0,T] \times \mathbb{R}$. En particulier, pour tout $0 \leq t \leq T$, $\|u(t)\|_{L^\infty} \leq m$ et on note $M = \sup_{x \in [-m,m]} f(x)$. On admettra également qu'il existe une constante K telle que

$$\|\partial_x \mathcal{S}(t) u^0\|_{L^\infty} \leq \frac{K \exp(Kt)}{\sqrt{t}} \|u^0\|_{L^\infty}.$$

Questions préliminaires

1. Montrer que pour tout $w \in L^\infty$, $\|\mathcal{X}(t)w\|_{L^\infty} \leq \|w\|_{L^\infty}$.
2. Montrer que pour tout $w \in W^{1,\infty}$, il existe une constante $C > 0$ telle que $\|\mathcal{X}(t)w - w\|_{L^\infty} \leq C\sqrt{t}\|\partial_x w\|_{L^\infty}$
3. Montrer que pour tout $w \in W^{1,\infty}$, $\|\partial_x \mathcal{Y}(t)w\|_{L^\infty} \leq \exp(M't)\|\partial_x w\|_{L^\infty}$.

Questions

4. Montrer que pour tout $w_1, w_2 \in W^{1,\infty}$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $0 \leq t \leq 1$
$$\|\mathcal{L}(t)w_1 - \mathcal{L}(t)w_2\|_{L^\infty} \leq (1 + Ct)\|w_1 - w_2\|_{L^\infty}.$$
5. Notons $g(t) = f(\mathcal{X}(t)\mathcal{Y}(t)w) - \mathcal{X}(t)f(\mathcal{Y}(t)w)$. Montrer que si $w \in L^\infty$, alors $\|g(t)\|_{L^\infty} \leq 2M\exp(M't)\|w\|_{L^\infty}$.
6. Montrer que si $w \in W^{1,\infty}$, alors $\|g(t)\|_{L^\infty} \leq C\sqrt{t}\|\partial_x w\|_{L^\infty}$.
7. Regrouper tous les résultats pour donner l'ordre (en norme L^∞) de la méthode associée à $\mathcal{L}$.

   Indication : $\sum_{j=1}^{n-1} 1/\sqrt{j} \leq C\sqrt{n}$.