

# Électromagnétisme dans le domaine temporel

Brigitte Bidégaray-Fesquet

Cours de DEA — 2003-2004

## Introduction

Lorsque l'on s'intéresse à la modélisation de la propagation d'une onde électromagnétique dans un matériau, les difficultés peuvent être de deux ordres,

- géométrique : l'onde se propage dans un milieu dont la géométrie est complexe (domaine extérieur d'un avion, d'une antenne, ...);
- lié au couplage : il y a interaction entre l'onde et le matériau, ce qui complexifie les équations.

Dans ce cours, on se limite aux problèmes liés au couplage onde-matière. Ces problèmes n'ont d'intérêt que lorsque que l'on considère des champs suffisamment intenses ou des impulsions suffisamment courtes. On s'intéresse alors à des méthodes en temps pour pouvoir décrire les phénomènes transitoires.

Lorsque l'on s'intéresse à des problèmes liés à la géométrie, on a le plus souvent à résoudre des problèmes mathématiques : singularités du champ aux singularités des frontières, conditions aux bords, etc ... Dans les problèmes de couplage, il faut avant de se poser ces problèmes, choisir le modèle adéquat à la situation envisagée. C'est pourquoi nous allons commencer par détailler la dérivation des équations pour le champ et le matériau, afin de mettre en évidence les hypothèses réalisées à chaque étape et d'être à même de choisir le bon modèle dans un contexte précis.

Nous allons commencer par rappeler les équations de Maxwell linéaires ainsi que les différentes simplifications usuelles qui leur sont apportées (chapitre 1). Nous verrons que ces simplifications n'ont pas lieu d'être dans la plupart des couplages non linéaires avec la matière. Différentes lois de matériaux seront proposées (chapitre 2). On donnera quelques résultats mathématiques sur les modèles obtenus (chapitre 3). On parlera ensuite de la discrétisation numérique de ces équations dans le cadre des différences finies (chapitre 4). Outre cette application précise, ce cours se veut une introduction à ces méthodes.

# Chapitre 1

## Modèles de propagation d'ondes

### 1.1 Équations de Maxwell

Le champ électromagnétique est décrit par un couple de vecteurs :

$$\{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)\}.$$

Le milieu matériel est décrit par la distribution de charges et la densité de courant :

$$\rho(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t).$$

Les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent alors

**Équation de flux magnétique**

$$\operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0,$$

**Équation de Maxwell–Faraday**

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{B},$$

**Équation de Maxwell–Gauss**

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}) = \rho/\varepsilon_0,$$

**Équation de Maxwell–Ampère**

$$\operatorname{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 (\mathbf{j} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}).$$

#### 1.1.1 Champ microscopique, champ macroscopique

A l'échelle microscopique, le champ électromagnétique varie sur une échelle de grandeur très petite (quelques dizaines de nanomètres). En physique classique, il convient de définir un champ macroscopique en effectuant la moyenne du champ réel sur un petit élément de volume suffisamment grand devant la distance entre les atomes, et suffisamment petit pour être considéré mathématiquement comme un élément différentiel. Il faut alors distinguer les charges qui restent dans l'élément de volume (charges liées) de celles susceptibles de se déplacer dans la matière (charges libres) ; en effet, les charges liées dont la densité peut être nulle (moyenne sur l'élément de volume de charges positives et négatives) peuvent être à l'origine d'un champ électromagnétique (dipôles électriques, dipôles magnétiques).

On distingue ainsi le champ effectif agissant sur une molécule et le champ observé par moyennisation sur une région contenant un grand nombre de molécules. Les équations de Maxwell deviennent alors

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0, \\ \operatorname{div}(\mathbf{E}) = (\rho_{\text{libre}} + \rho_{\text{liée}})/\varepsilon_0, \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \operatorname{rot}(\mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{B}, \\ \operatorname{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 (\mathbf{j}_{\text{libre}} + \mathbf{j}_{\text{liée}} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \end{array} \right.$$

Dans les milieux diélectriques, les charges liées peuvent se décrire, en première approximation, par une distributions de dipôles électriques (barycentre des charges négatives et positives en des points différents). D'un point de vue macroscopique, cette distribution est caractérisée par un champ vectoriel : la polarisation du milieu. Cette polarisation est définie par

$$\rho_{\text{liée}} = -\operatorname{div}(\mathbf{P}).$$

Les charges liées qui sont à l'origine de cette polarisation sont mis en mouvement en présence d'un champ variable. Cet effet se traduit par un courant de polarisation. Pour satisfaire le principe de conservation de la charge, la densité de courant est donnée par

$$\mathbf{j}_P = \partial_t \mathbf{P}.$$

Si, de plus, le milieu présente des propriétés d'aimantation, il peut en première approximation se décrire par une distribution de dipôles électriques et magnétiques. D'un point de vue macroscopique, la distribution des dipôles magnétiques est décrite par une aimantation. Cette aimantation est à l'origine d'un courant d'aimantation :

$$\mathbf{j}_M = \text{rot } \mathbf{M}.$$

On obtient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\mathbf{B}) = 0, \\ \text{div}(\mathbf{E}) = (\rho_{\text{libre}} - \text{div}(\mathbf{P}))/\varepsilon_0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{B}, \\ \text{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 (\mathbf{j}_{\text{libre}} + \partial_t \mathbf{P} + \text{rot}(\mathbf{M}) + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \end{array} \right.$$

### 1.1.2 Équations constitutives

Il est donc possible d'introduire deux nouveaux champs vectoriels pour décrire le comportement de la matière lorsqu'il y a des charges et des courants liés. Ces champs résultent en fait d'approximations dans la mesure où les charges et les courants liés sont assimilés à une distribution de dipôles électriques et magnétiques. Une expression complète doit faire apparaître une contribution des termes multipolaires qui le plus souvent est négligeable.

Dans le cas général, pour simplifier les équations précédentes, on introduit alors deux nouveaux champs vectoriels auxiliaires :

l'excitation électrique ou induction électrique

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

et l'excitation magnétique

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}.$$

Les équations de Maxwell deviennent alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\mathbf{B}) = 0, \\ \text{div}(\mathbf{D}) = \rho_{\text{libre}}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{B}, \\ \text{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{j}_{\text{libre}} + \partial_t \mathbf{D}. \end{array} \right.$$

Il convient alors de fermer ces équations par des expressions reliant  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{H}$  à  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  : les relations constitutives.

#### Milieux diélectriques

Pour des diélectriques, on considère que le milieu est dépourvu de charges libres et que le milieu est non magnétique. Par ailleurs, on suppose en général que l'induction électrique se développe en puissances du champ électrique. Dans le cadre linéaire, on obtient donc les relations constitutives

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_L, \quad \mathbf{P}_L = \varepsilon_0 \chi^{(1)} * \mathbf{E}.$$

Dans le cadre linéaire isotrope instantané, on a

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E},$$

où  $\varepsilon_r \geq 1$ . Comme on le voit dans la section suivante, ceci assure que la propagation des ondes n'excède pas la vitesse de la lumière dans le vide.

On reviendra sur d'autres formes de la susceptibilité linéaire  $\chi^{(1)}$  dans le chapitre suivant.

#### Milieux dia- et paramagnétique

Pour les milieux magnétiques, on considère généralement que

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \text{ et } \mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H},$$

où  $\mu_r \neq 1$  et où on a toujours  $\varepsilon_r \geq 1$  et constant. Le cas  $\mu_r > 1$  correspond aux milieux diamagnétiques et le cas  $0 < \mu_r < 1$  aux milieux paramagnétiques.

## 1.2 Équations de propagation

Ce n'est pas le sujet principal du cours, mais comme la plupart des simulations en électromagnétisme portent sur des équations de propagation simplifiées, il est difficile de les passer sous silence.

Pour simplifier nous partons des équations de Maxwell dans le vide :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0, \\ \operatorname{div}(\mathbf{D}) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{rot}(\mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{B}, \\ \operatorname{rot}(\mathbf{H}) = \partial_t \mathbf{D}, \end{cases}$$

avec  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  et  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ . Ainsi

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0, \\ \operatorname{div}(\mathbf{E}) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{rot}(\mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{B}, \\ \operatorname{rot}(\mathbf{B}) = \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E}, \end{cases}$$

avec  $c^2 \varepsilon_0 \mu_0 = 1$ .

### 1.2.1 Équation des ondes

On a immédiatement

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathbf{E})) = -\partial_t(\operatorname{rot}(\mathbf{B})) = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E}.$$

Comme  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \nabla \operatorname{div} - \Delta$ , on a alors

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E}.$$

Le champ électrique est donc régi par l'équation des ondes. Par symétrie évidente des équations dans le vide, le champ magnétique est également régi par l'équation des ondes.

### 1.2.2 Équation de Schrödinger

Souvent l'onde se propage dans une direction précise (approximation paraxiale) et est quasiment monochromatique. On peut alors écrire le champ  $\mathbf{E}$  sous la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \exp(i(kz - \omega t)).$$

La fonction  $A$  est alors appelée l'enveloppe du champ. Elle est régie par l'équation

$$\Delta \mathbf{A} + 2ik \partial_z \mathbf{A} - k^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} (\partial_t^2 \mathbf{A} - 2i\omega \partial_t \mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{A}).$$

L'Ansatz effectué a pour but de séparer l'évolution rapide de l'onde (l'onde plane de l'évolution lente (l'enveloppe)). Ceci se traduit mathématiquement par l'approximation de l'enveloppe lentement variable

$$\partial_t^2 \mathbf{A} \ll \omega \partial_t \mathbf{A} \ll \omega^2 \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \partial_z^2 \mathbf{A} \ll k \partial_z \mathbf{A} \ll k^2 \mathbf{A}.$$

De plus, si l'onde se propage, c'est qu'elle vérifie la relation de dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Ces approximations permettent d'écrire

$$\Delta_{\perp} \mathbf{A} + 2ik \partial_z \mathbf{A} = -\frac{2i\omega}{c^2} \partial_t \mathbf{A},$$

ou encore

$$\left( \partial_z + \frac{1}{c} \partial_t - \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \right) \mathbf{A} = 0.$$

### 1.2.3 Équation d'Helmholtz

Une autre approximation classique correspond à fixer exactement la fréquence, d'où l'Ansatz

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t).$$

On a ainsi

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} (\partial_t^2 \mathbf{A} - 2i\omega \partial_t \mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{A})$$

et on néglige les dérivées temporelles, ce qui donne lieu à l'équation d'Helmholtz

$$\Delta \mathbf{A} = -k^2 \mathbf{A}.$$

## 1.3 Exercices

1. En calculant la variation temporelle de  $\text{div}(\mathbf{D})$ , déduire des équations de Maxwell l'équation de conservation de la charge. Que dire de la variation de  $\text{div}(\mathbf{B})$  ?
2. Refaire la dérivation des modèles simplifiés dans le cadre où  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$ . On introduira l'indice optique  $n$  (indice de réfraction) défini par  $n^2 = \varepsilon_r$ .
3. On suppose que les champs ne dépendent que de la variable d'espace  $z$  (et du temps). Quels champs ont des évolutions triviales ? Quelles équations restent à résoudre ?
4. Mêmes questions si les champs ne dépendent que de deux dimensions d'espace  $x$  et  $y$ .
5. On suppose que le matériau est diélectrique et stratifié, à savoir  $\varepsilon_r = \varepsilon_r(z)$ . Sous quelle condition de polarisation de l'onde peut-on encore dériver l'équation des ondes ?

# Chapitre 2

## Couplages avec la matière

### 2.1 Modèles d'interaction linéaires

Dans le chapitre précédent, on a introduit la notion de susceptibilité linéaire  $\chi^{(1)}$ . Celle-ci peut prendre des formes variées suivant les matériaux. Nous avons déjà vu la forme la plus simple dans le cas isotrope instantané, où le milieu est représenté par un indice optique uniforme. Nous avons également vu en exercice le cas de la superposition de tels milieux en couches uniformes. C'est le cas dans de nombreuses applications en optique intégrée.

#### 2.1.1 Matériaux anisotropes

Certains matériaux sont isotropes, comme les gaz, les verres, etc... mais d'autres sont anisotropes, comme la plupart des cristaux. Cette propriété d'anisotropie permet d'observer certains effets non linéaires impossibles dans des matériaux isotropes (cf. infra). Dans le cas d'anisotropie, le matériau a des axes privilégiés. Si on se place suivant ces axes, le tenseur  $\chi^{(1)}$  correspond à une matrice du type

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} \chi_X^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_Y^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_Z^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Comme en pratique, on n'utilise jamais ces cristaux dans leurs axes principaux (pour des raisons d'accord de phase qui dépassent le sujet de ce cours), la matrice est fait non diagonale et a pour effet de faire tourner les différentes polarisations de l'onde.

Pour simplifier la description des modèles suivants, je ne parlerai plus d'anisotropie, mais cet effet se combine en pratique à d'autres.

#### 2.1.2 Matériaux à retard, à résonances

Certains matériaux ne réagissent pas de manière instantanée à l'onde. Il s'ensuit que l'induction  $\mathbf{D}(t)$  ne dépend pas de  $\mathbf{E}(t)$  mais de  $\mathbf{E}$  à tous les instants précédents. Dans le domaine temporel, on a une relation du type

$$\mathbf{D}(t) = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \mathbf{E}(t) + \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \mathbf{E}(\tau) \chi^{(1)}(t - \tau) d\tau.$$

Les bornes de cette intégrale traduisent la causalité. Pour des raisons pratiques, il est plus commode de redéfinir la polarisation par

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \mathbf{E},$$

et

$$\mathbf{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \mathbf{E}(\tau) \chi^{(1)}(t - \tau) d\tau.$$

Par ailleurs, cette expression cache en fait une dépendance de la permittivité diélectrique en fonction de la fréquence de  $\mathbf{E}$ . Ceci explique la notation  $\varepsilon_\infty$  qui est la permittivité relative à fréquence infinie. A la permittivité relative  $\varepsilon_r(\omega)$  on associe un nombre d'onde  $k(\omega)$  dont la partie réelle définit la vitesse de propagation et la partie imaginaire le coefficient d'amortissement.

Ceci est plus clair dans les exemples qui suivent.

### Modèle de Debye

Le modèle de Debye traduit un retard pur. Outre la permittivité relative à fréquence infinie, les paramètres liés au matériau sont la permittivité relative à fréquence nulle  $\varepsilon_s$  ( $s$  comme statique) et le temps de retard  $t_r$ . On a alors la susceptibilité

$$\chi^{(1)}(t) = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{t_r} e^{-t/t_r} h(t),$$

où  $h(t)$  est la fonction de Heaviside (une autre façon d'assurer la causalité). La permittivité relative associée est

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + i\omega t_r}.$$

Si maintenant on dérive la formule intégrale en temps, on obtient

$$t_r \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{D} = t_r \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \partial_t \mathbf{E} + \varepsilon_0 \varepsilon_s \mathbf{E}$$

et

$$t_r \partial_t \mathbf{P} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \mathbf{E}.$$

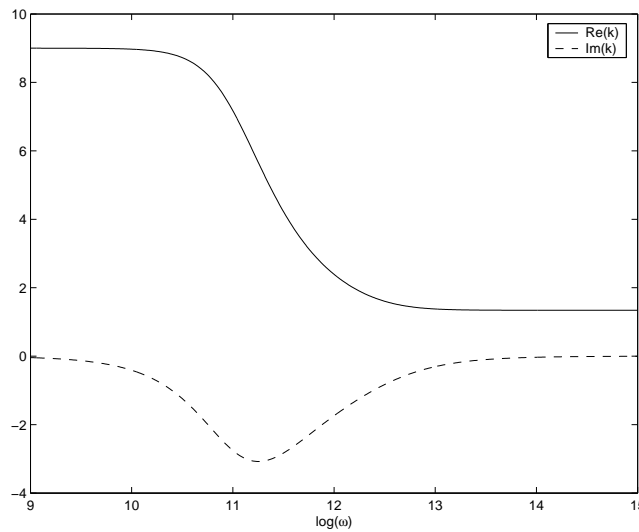


FIG. 2.1 – Nombre d'onde pour un modèle de Debye. On a choisi de l'eau :  $\varepsilon_\infty = 1,8$ ,  $\varepsilon_s = 81$ , et  $t_r = 9.410^{-12}$ .

### Modèle de Lorentz

Le modèle de Lorentz traduit la présence d'une fréquence de résonance  $\omega_1$  ainsi qu'un taux d'amortissement  $\nu$ . La susceptibilité vaut

$$\chi^{(1)}(t) = \frac{\omega_1^2 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{\sqrt{\omega_1^2 - \nu^2/4}} e^{-\nu t/2} \sin(\sqrt{\omega_1^2 - \nu^2/4} t) h(t).$$

La permittivité relative associée est

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\omega_1^2 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{\omega_1^2 + i\omega\nu - \omega^2}.$$

Les équations différentielles associées sont

$$\partial_t^2 \mathbf{D} + \nu \partial_t \mathbf{D} + \omega_1^2 \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \partial_t^2 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \nu \partial_t \mathbf{E} + \varepsilon_0 \varepsilon_s \omega_1^2 \mathbf{E}$$

et

$$\partial_t^2 \mathbf{P} + \nu \partial_t \mathbf{P} + \omega_1^2 \mathbf{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \omega_1^2 \mathbf{E}.$$

Loin de la fréquence de résonance, le matériau se comporte de matière linéaire et instantanée. Le coefficient d'amortissement de l'onde qui est maximal à la résonance.



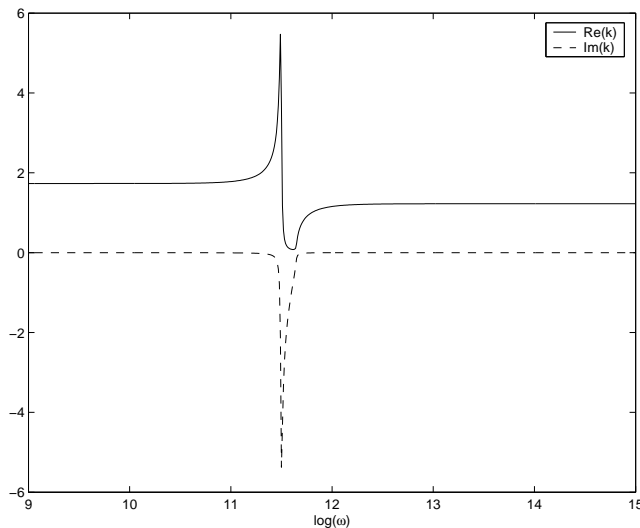


FIG. 2.2 – Nombre d’onde pour un modèle de Lorentz. On a choisi  $\varepsilon_\infty = 1,5$ ,  $\varepsilon_s = 3$ ,  $\omega_1 = 10\pi 10^{10}$  et  $\nu = 10^{10}$ .

## 2.2 Modèles d’interaction non linéaires

### 2.2.1 Pourquoi le non linéaire ?

#### En optique

Jusqu’à l’invention du laser en 1960, l’optique supposait une polarisation induite proportionnelle à l’amplitude du champ électromagnétique appliqué au système matériel.

L’ordre de grandeur des champs électriques produits par les lasers s’approche de celui du champ électrique assurant la cohésion des électrons au noyau des atomes ou des molécules. Avec les sources femtosecondes ultra-intenses, ce champ peut même atteindre l’ordre de grandeur de celui qui règne à l’intérieur du noyau ! L’approximation linéaire n’est alors plus valable.

Pour les champs relativement faibles, nous avons recours à un développement suivant des puissances du champ électrique de l’onde lumineuse.

Pour des champs plus élevés, il faut faire appel à des modèles quantiques qui sont hors sujet dans ce cours.

#### En micro-magnétisme

Les milieux ferri- et ferromagnétiques sont des aimants permanents. En absence de champ extérieur, une aimantation rémanente existe. Celle-ci est de module  $M_s$  (qui ne dépend que de la température si celle-ci est suffisamment basse) et d’une direction qui dépend de l’historique. On a donc à faire un matériau à mémoire. Un tel phénomène n’est explicable que par des phénomènes non linéaires et contrairement à l’optique ne nécessite pas d’hypothèse de champ fort.

### 2.2.2 Susceptibilités non linéaires

On a vu que l’on pouvait exprimer les susceptibilités linéaires (ou de manière équivalente les permittivités) soit dans le domaine temporel, soit dans le domaine fréquentiel. Il est de même pour les susceptibilités non linéaires.

#### Analyse des susceptibilités linéaires

Pour les susceptibilités linéaires, on avait

$$\mathbf{P}^{(1)}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(t - \tau) \chi^{(1)}(\tau) d\tau.$$

La fonction  $\chi^{(1)}$  est alors réelle car  $\mathbf{P}^{(1)}$  et  $\mathbf{E}$  le sont et la causalité se traduit par  $\chi^{(1)}(t) = 0$  si  $t < 0$ . On a calculé  $\varepsilon_r(\omega) = 1 + \hat{\chi}^{(1)}(\omega)$  avec

$$\hat{\chi}^{(1)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(1)}(t) \exp(-i\omega t) dt.$$

Alors  $\mathbf{P}^{(1)}(\omega) = \varepsilon_0 \hat{\chi}^{(1)}(\omega) \mathbf{E}(\omega)$ . Le fait que  $\chi^{(1)}$  est réel se traduit alors par  $\hat{\chi}^{(1)*}(\omega) = \hat{\chi}^{(1)}(-\omega)$ . Pour exprimer la relation de causalité, on note de manière classique  $\hat{\chi}^{(1)}(\omega) = \hat{\chi}'(\omega) + i\hat{\chi}''(\omega)$  et on a les relations de Kramers-Kronig :

$$\hat{\chi}'(\omega) = \frac{1}{\pi} p.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\chi}''(\varpi)}{\varpi - \omega} d\varpi, \quad \hat{\chi}''(\omega) = \frac{1}{\pi} p.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\chi}'(\varpi)}{\varpi - \omega} d\varpi.$$

Cette forme n'est pas particulièrement pratique et devient carrément impraticable pour les ordres supérieurs.

### Susceptibilités du deuxième ordre

Le deuxième ordre du développement de la polarisation en puissances de  $\mathbf{E}$  s'écrit

$$\mathbf{P}^{(2)}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(t - \tau_1) \mathbf{E}(t - \tau_2) \chi^{(2)}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

La fonction  $\chi^{(2)}$  est alors réelle, la causalité se traduit par  $\chi^{(2)}(t_1, t_2) = 0$  si  $t_1 < 0$  ou  $t_2 < 0$ . Par ailleurs, il y a une propriété de symétrisation

$$\chi_{abc}^{(2)}(t_1, t_2) = \chi_{acb}^{(2)}(t_2, t_1).$$

Dans le domaine fréquentiel, ceci s'écrit

$$\hat{\mathbf{P}}^{(2)}(\omega = \omega_1 + \omega_2) = \varepsilon_0 \hat{\chi}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \hat{\mathbf{E}}(\omega_1) \hat{\mathbf{E}}(\omega_2).$$

Cette forme est particulièrement parlante pour analyser les effets en terme de mélange de fréquences. Le caractère réel se traduit par  $\hat{\chi}^{(2)*}(\omega_1, \omega_2) = \hat{\chi}^{(1)}(-\omega_1, -\omega_2)$ . Pour exprimer la propriété de symétrisation, on a

$$\hat{\chi}_{abc}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \hat{\chi}_{acb}^{(2)}(\omega_2, \omega_1).$$

Ceci permet de réduire les 27 éléments du tenseur en "uniquement" 18 éléments. Loin des résonances, c'est-à-dire quand le milieu est sans perte, on peut permuter toutes les fréquences deux-à-deux ce qui introduit de nouvelles simplification appelées symétrie de Kleinman et réduit à 10 le nombre d'éléments. L'analyse des groupes de symétrie permet ensuite de réduire encore de manière importante le nombre de coefficients indépendants. Dans les matériaux à symétrie centrale, tous les coefficients s'avèrent être nuls. C'est un des cas particuliers où il peut être intéressant de regarder ce qui se passe à l'ordre supérieur.

### Susceptibilités du troisième ordre

On traite de même manière l'ordre trois.

$$\mathbf{P}^{(3)}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(t - \tau_1) \mathbf{E}(t - \tau_2) \mathbf{E}(t - \tau_3) \chi^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3.$$

Il est inutile de préciser toutes les propriétés. On a cette fois-ci 81 coefficients et la symétrie par permutation des derniers indices (tous sauf le premier) est toujours vraie. Pour un milieu isotrope, il n'y a que trois éléments indépendants. On peut prouver que

$$\chi_{abcd} = \chi_{1122} \delta_{ab} \delta_{cd} + \chi_{1212} \delta_{ac} \delta_{bd} + \chi_{1221} \delta_{ad} \delta_{bc}.$$

Si on ne regarde que la génération de troisième harmonique, on a des symétries supplémentaires et

$$\hat{\chi}_{abcd}(3\omega = \omega + \omega + \omega) = \hat{\chi}_{1122}(3\omega = \omega + \omega + \omega) (\delta_{ab} \delta_{cd} + \delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}).$$

Si on ne regarde que l'indice de réfraction non linéaire, on a

$$\hat{\chi}_{abcd}(\omega = \omega + \omega - \omega) = \hat{\chi}_{1122}(\omega = \omega + \omega - \omega) (\delta_{ab} \delta_{cd} + \delta_{ac} \delta_{bd}) + \hat{\chi}_{1221}(\omega = \omega + \omega - \omega) \delta_{ad} \delta_{bc}.$$

### Un cas particulier : la non linéarité Kerr

Plaçons nous dans le cas traité précédemment de l'indice de réfraction non linéaire dans un matériau isotrope. La polarisation non linéaire est donnée par

$$\hat{P}_a^{(3)}(\omega) = 3\varepsilon_0 \sum_{bcd} \hat{\chi}_{abcd}(\omega = \omega + \omega - \omega) \hat{E}_b(\omega) \hat{E}_c(\omega) \hat{E}_d(-\omega).$$

Avec les symétries, cela donne

$$P_a^{(3)} = 6\varepsilon_0 \chi_{1122} E_a(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) + 3\varepsilon_0 \chi_{1221} E_a^*(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}),$$

ou encore

$$\mathbf{P}^{(3)} = 6\varepsilon_0 \chi_{1122} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) \mathbf{E} + 3\varepsilon_0 \chi_{1221} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}^*.$$

Si l'onde initiale est polarisée de manière linéaire ou circulaire, la polarisation reste inchangée au cours de la propagation. Par contre, si la polarisation de départ est elliptique, celle-ci va tourner. On se place en général dans un cas simple où il n'y a pas de rotation de la polarisation et les effets d'ordre trois à la fréquence  $\omega$  se résument à une modification de l'indice de réfraction proportionnelle à  $|\mathbf{E}|^2$ . C'est le modèle usuellement choisi pour les matériaux de type Kerr.

## 2.3 Modèle de Landau–Lifschitz en micro-magnétisme

Les matériaux ferromagnétiques sont conducteurs. Il n'y a pas accumulation de charge, par conséquent la densité de charge est nulle. En revanche, le courant électrique est pris égal à  $\sigma \mathbf{E}$ . La permittivité relative est constante et égale à 1. On a donc les équations de Maxwell

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0, & \operatorname{rot}(\mathbf{E}) = -\mu_0 \partial_t (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \\ \operatorname{div}(\mathbf{E}) = 0, & \operatorname{rot}(\mathbf{H}) = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}. \end{cases}$$

L'aimantation est régie par l'équation de Landau–Lifschitz

$$\partial_t \mathbf{M} = -\gamma \mu_0 \{ \mathbf{M} \wedge \mathbf{H} + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}|} \mathbf{M} \wedge (\mathbf{M} \wedge \mathbf{H}) \},$$

où  $\gamma$  est le facteur de précession de Larmor et  $\alpha$  est un facteur adimensionné de dissipation.

## 2.4 Exercices

1. En supposant que le champ  $\mathbf{E}$  est de la forme  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \exp(i\omega t)$ , déduire les permittivités des susceptibilités pour les modèles de Debye et de Lorentz.
2. Pour un modèle linéaire, soit  $k(\omega)$  le nombre d'onde associé à la propagation par  $k^2(\omega) = n^2(\omega)\omega^2/c^2 = \varepsilon_r(\omega)\omega^2/c^2$ . Montrer que sa partie imaginaire est liée au coefficient d'amortissement de l'intensité  $I = n\varepsilon_\infty c \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle_t$  (moyenne temporelle).
3. Montrer que le modèle de Landau–Lifschitz assure que  $|\mathbf{M}|$  est constant.
4. Montrer que le modèle de Landau–Lifschitz peut également s'écrire

$$\partial_t \mathbf{M} - \frac{\alpha}{|\mathbf{M}|} \mathbf{M} \wedge \partial_t \mathbf{M} + \gamma \mu_0 (1 + \alpha^2) \mathbf{M} \wedge \mathbf{H} = 0.$$



# Chapitre 3

## Analyse mathématique

### 3.1 Choix de l'espace fonctionnel

#### 3.1.1 Avec ou sans bords

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux résultats mathématiques du type problème de Cauchy, à savoir existence et unicité de solutions. Il convient tout d'abord de choisir convenablement les espaces fonctionnels intéressants pour une telle étude. *A priori* le matériau occupe une partie  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ , il faudrait donc en toute rigueur ne regarder que des problèmes avec des données au bord. Cependant on peut distinguer deux cas.

#### En optique

Le matériau ne réagit qu'en présence d'une onde extérieure. De plus, un laser est une onde localisée en espace. Si on vise bien dans le matériau, on peut supposer que les bords sont suffisamment loin pour les considérer à l'infini et avec des conditions nulles au bord. Ceci serait faux pour certains matériaux que l'on a pas présentés ici comme les matériaux photoréfractifs.

#### En micro-magnétisme

À l'instar des photoréfractifs, les ferro-magnétiques sont des matériaux à mémoire. La solution n'est pas nulle en l'absence d'excitation. Par ailleurs, l'expérience met en évidence des structures en zones d'aimantation constantes, qui sont très fortement dépendantes de la géométrie du domaine. Remplacer artificiellement  $\Omega$  par  $\mathbb{R}^3$  relèverait donc de l'hérésie pure et dure.

#### 3.1.2 Régularité

#### En optique

Représenter de très fortes singularités dans la solution ne présente pas particulièrement d'intérêt. Les discontinuités sont impossibles et les focalisations excessives enjoignent de changer de modèle pour tenir compte d'effets d'interaction plus forts ou de l'ionisation. Une régularité  $H^s$  avec  $s > d/2$  est donc largement suffisante dans  $\mathbb{R}^d$ .

#### En micro-magnétisme

A nouveau, on est susceptible d'obtenir des domaines d'aimantation constante ce qui suppose qu'entre deux domaines il y ait une ligne de singularité. Seules des solutions faibles peuvent décrire correctement la physique.

Cela étant dit, il est extrêmement difficile d'avoir des résultats d'existence et d'unicité globaux en temps, principalement en dimension 3. C'est pourquoi nous nous bornons ici à exposer une théorie sur  $\mathbb{R}^d$ .

## 3.2 Outils mathématiques

Nous commençons par lister une série de résultats mathématiques classiques qui sont au cœur des démonstrations mathématiques. Ces résultats sont énoncés sans justification.

### 3.2.1 Semi-groupe d'évolution

**Théorème 1** Soient  $X$  un espace de Banach et  $A \in \mathcal{L}(X)$ . Pour tout  $T > 0$  et tout  $x \in X$  il existe une unique solution  $u \in \mathcal{C}^1([0, T], X)$  du problème

$$u'(t) = Au(t), \forall t \in [0, T], \quad u(0) = x.$$

Cette solution est  $u(t) = e^{tA}x$ .

Pour noter cette solution, on utilise une notation de semi-groupe. On note  $S_A(t) = e^{tA}$ . On a alors les propriétés suivantes :

#### Élément neutre

$$S_A(0) = I$$

#### Associativité

$$S_A(t_1 + t_2) = S_A(t_1) \circ S_A(t_2) = S_A(t_2) \circ S_A(t_1), \quad \forall t_1, t_2 \geq 0.$$

#### Continuité

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S_A(t)x - x\|_X = 0, \quad \forall x \in X.$$

En général, ce semi-groupe n'est pas un groupe. Pour cela, il faudrait être capable de définir un inverse, c'est-à-dire des solutions au problème rétrograde en temps. Cela est possible pour des opérateurs comme celui de Schrödinger, mais impossible pour celui de l'équation de la chaleur, par exemple.

### 3.2.2 Propriété d'algèbre

**Théorème 2** L'espace  $H^s(\mathbb{R}^d)$  est une algèbre si et seulement si  $s > d/2$ .

Rappelons ce qu'est l'espace  $H^s$ . Lorsque  $s = n$  est entier alors  $H^n$  est l'espace dont les  $n$  premières dérivées sont de carré intégrable. La dérivation revient à la multiplication par  $i\xi$  dans l'espace de Fourier. Par Parseval, il est équivalent de dire

$$\int |f(x)|^2 dx < +\infty \text{ et } \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < +\infty.$$

De même,

$$\int (|f(x)|^2 + |\nabla f(x)|^2) dx < +\infty \text{ et } \int (1 + |\xi|^2)|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < +\infty$$

sont équivalents, et correspondent à la norme  $H^1$ . On en déduit la définition de  $H^s$  pour  $s$  quelconque

$$f \in H^s \Leftrightarrow \int (1 + |\xi|^{2s})|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < +\infty$$

### 3.2.3 Lemme de Gronwall

**Théorème 3** Soit  $T > 0$ ,  $\lambda \in L^1(0, T)$  et  $\lambda \geq 0$  p.p. et  $C_1, C_2 \geq 0$ . Soit  $\varphi \in L^1(0, T)$   $\varphi \geq 0$  p.p. tel que  $\lambda\varphi \in L^1(0, t)$  et

$$\varphi(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \lambda(\tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad \text{p.p. } t \in ]0, T[.$$

Alors on a

$$\varphi(t) \leq C_1 \exp\left(\int_0^t C_2 \lambda(\tau)d\tau\right), \quad \text{p.p. } t \in ]0, T[.$$

### 3.2.4 Théorème du point fixe de Banach

**Théorème 4** Soit  $(\mathcal{E}, d)$  un espace métrique complet et  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  une application telle qu'il existe  $k \in [0, 1[$  vérifiant  $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$  pour tout  $(x, y) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ . Alors il existe un unique point  $x_0$  de  $\mathcal{E}$  tel que  $f(x_0) = x_0$ .

## 3.3 Principe général pour le problème local

Souvent dans les articles, on indique seulement que le problème de Cauchy local en temps découle de considérations classiques de la théorie hyperbolique semi-linéaire. Nous en décrivons ici les grandes étapes.

### 3.3.1 Forme générale des équations

On suppose que  $U(\mathbf{x}, t)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^{d_U}$  qui vérifie l'équation

$$\partial_t U = \sum_{\mu=1}^d A_\mu \partial_\mu U + F(U), \quad U(0) = U_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}, \quad (3.1)$$

où les matrices  $A_\mu$  sont symétriques. On précisera les propriétés de  $F(U)$  au fur et à mesure.

### 3.3.2 Opérateur linéaire unitaire

Associés à l'équation hyperbolique (3.1) l'équation linéaire

$$\partial_t U = \sum_{\mu=1}^d A_\mu \partial_\mu U. \quad (3.2)$$

Si on multiplie formellement l'équation (3.2) par  $U$  et que l'on intègre sur  $\mathbb{R}^{d_U}$ , on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_t U \cdot U = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\mu=1}^d A_\mu \partial_\mu U \cdot U.$$

Comme l'opérateur  $\sum_{\mu=1}^d A_\mu \partial_\mu$  est anti-adjoint sur l'espace  $L^2(\mathbb{R}^d)^{d_U}$  (les valeurs aux bords sont nulles)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\mu=1}^d A_\mu \partial_\mu U \cdot U = 0.$$

Ainsi

$$\frac{1}{2} \partial_t \|U\|_{L^2(\mathbb{R}^d)^{d_U}}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t U \cdot U = 0,$$

et le semi-groupe  $\mathcal{S}(t)$  associé à l'équation d'évolution (3.2) est unitaire dans  $L^2(\mathbb{R}^d)^{d_U}$  :

$$\|\mathcal{S}(t)U_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)^{d_U}}^2 = \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)^{d_U}}^2.$$

De même, en multipliant  $(-\Delta)^{s/2}(3.2)$  par  $(-\Delta)^{s/2}U$ , et en utilisant que l'opérateur  $\sum_{\mu=1}^d A_\mu \partial_\mu$  est anti-adjoint sur tout espace de Sobolev, le semi-groupe  $\mathcal{S}(t)$  associé à l'équation d'évolution (3.2) est unitaire dans  $H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}$  :

$$\|\mathcal{S}(t)U_0\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}}^2 = \|U_0\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}}^2.$$

### 3.3.3 Estimation de la partie non linéaire

Pour  $s > d/2$ , l'espace de Sobolev  $H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}$  est une algèbre. Dans les exemples qui nous intéressent  $F$  est en général un polynôme sans terme constant. On en déduit la propriété qui nous est utile, à savoir  $F(U)$  est localement lipschitzienne sur  $H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}$ . Ainsi, il existe une constante  $L_R$  telle que si  $U$  appartient à la boule de rayon  $R$  de l'espace  $H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}$  ( $\|U\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}} \leq R$ ) alors

$$\|F(U)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}} \leq L_R \|U\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}}.$$

### 3.3.4 Formulation de Duhamel

La formulation intégrale de l'équation (3.1) est donnée par

$$U(t) = \mathcal{S}(t)U_0 + \int_0^t \mathcal{S}(t-\tau)F(U(\tau)) d\tau. \quad (3.3)$$

On vérifie en effet que

$$U(0) = \mathcal{S}(0)U_0 + 0 = IU_0 = U_0.$$

En dérivant par rapport au temps, on a

$$\partial_t U(t) = \mathcal{S}'(t)U(0) + \mathcal{S}(0)F(U(t)) + \int_0^t \mathcal{S}'(t-\tau)F(U(\tau))d\tau.$$

Or  $\mathcal{S}'(t) = \sum_{\mu=1}^d A_\mu \partial_\mu \mathcal{S}(t)$  par définition, d'où

$$\begin{aligned} \partial_t U(t) &= \sum_{\mu=1}^d A_\mu \partial_\mu \left( \mathcal{S}(t)U(0) + \int_0^t \mathcal{S}(t-\tau)F(U(\tau))d\tau \right) + F(U(t)) \\ &= \sum_{\mu=1}^d A_\mu \partial_\mu U(t) + F(U(t)). \end{aligned}$$

### 3.3.5 Méthode de point fixe

#### Position du problème

On suppose que la donnée initiale  $U_0 = U(t=0)$  appartient à l'espace de Sobolev  $H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}$ , on note  $R = \|U_0\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}}^2$ . Par ailleurs, on définit l'application  $\mathcal{T}$  par

$$\mathcal{T}(U)(t) = \mathcal{S}(t)U_0 + \int_0^t \mathcal{S}(t-\tau)F(U(\tau)) d\tau.$$

Cette application envoie clairement  $H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}$  dans lui-même. Nous allons montrer que  $\mathcal{T}$  est une contraction dans la boule de rayon  $2R$ .

#### $\mathcal{T}$ envoie une boule de $H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}$ dans elle-même

On suppose donc que  $U(t) \in H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}$  et  $\|U(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}} \leq 2R$ .

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(U)(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}} &\leq \|\mathcal{S}(t)U_0\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}} + \int_0^t \|\mathcal{S}(t-\tau)F(U(\tau))\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}} d\tau \\ &= \|U_0\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}} + \int_0^t \|F(U(\tau))\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}} d\tau \\ &= R + L_{2R} \int_0^t \|U(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}} d\tau \\ &\leq R + 2RL_{2R}t = R(1 + 2L_{2R}t). \end{aligned}$$

Il existe  $t_1(R) = 1/2L_{2R} > 0$  tel que  $(1 + 2L_{2R}t) \leq 2$  pour tout temps  $t \leq t_1(R)$ . Alors

$$\|\mathcal{T}(U)(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}} \leq 2R \text{ pour tout } t \leq t_1(R).$$

#### $\mathcal{T}$ est une contraction

On considère deux solutions  $U_1$  et  $U_2$  du problème de Cauchy, qui ont donc la même donnée initiale  $U_0$ . Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(U_1)(t) &= \mathcal{S}(t)U_0 + \int_0^t \mathcal{S}(t-\tau)F(U_1(\tau)) d\tau, \\ \mathcal{T}(U_2)(t) &= \mathcal{S}(t)U_0 + \int_0^t \mathcal{S}(t-\tau)F(U_2(\tau)) d\tau, \end{aligned}$$



d'où, de même que précédemment, si  $t < t_1(R)$ ,

$$\|\mathcal{T}(U_1)(t) - \mathcal{T}(U_2)(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}} \leq L_{2R} \int_0^t \|U_1(\tau) - U_2(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}} d\tau.$$

Prenons le suprémum en temps sur un intervalle  $[0, t] \subset [0, t_1(R)]$ ,

$$\|\mathcal{T}(U_1) - \mathcal{T}(U_2)\|_{L^\infty(0, t; H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U})} \leq L_{2R} t \|U_1(\tau) - U_2(\tau)\|_{L^\infty(0, t; H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U})}.$$

Pour  $t \leq t_*(R)$  suffisamment petit,  $\mathcal{T}$  est une contraction de la boule de rayon  $2R$  de l'espace  $L^\infty(0, t; H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U})$ .

### 3.3.6 Existence et unicité locales

Le lemme du point fixe de Banach permet alors d'assurer que  $\mathcal{T}$  admet un unique point fixe, qui est alors solution de la formulation intégrale (3.3) et donc de l'équation (3.1).

**Théorème 5** *Le problème (3.1) admet une unique solution dans  $L^\infty(0, t_*(R); H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U})$ . Le temps  $t_*(R)$  dépend de la taille  $R$  de la donnée initiale dans  $H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}$ .*

### 3.3.7 Continuité par rapport aux données initiales

On se donne deux données initiales  $U_0$  et  $V_0$  dans la boule de rayon  $R$  de  $H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}$ . Sur l'intervalle de temps d'existence commune des solutions de (3.1) associées à ces deux données initiales, on a

$$\begin{aligned} U(t) &= \mathcal{S}(t)U_0 + \int_0^t \mathcal{S}(t-\tau)F(U(\tau)) d\tau, \\ V(t) &= \mathcal{S}(t)V_0 + \int_0^t \mathcal{S}(t-\tau)F(V(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

De même que précédemment, on obtient

$$\|U(t) - V(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}} \leq \|U_0 - V_0\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}} + L_{2R} \int_0^t \|U(\tau) - V(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}} d\tau.$$

On utilise alors le lemme de Gronwall et

$$\|U(t) - V(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}} \leq \|U_0 - V_0\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}} \exp(L_{2R}t).$$

On en déduit la continuité par rapport aux données initiales sur l'intervalle de temps  $[0, t_*(R)]$ .

## 3.4 Exemples

### 3.4.1 Maxwell 1-D dans le vide

Deux polarisations se découpent dont celle qui fait intervenir  $(B_y, E_x)$ . On a le système

$$\begin{aligned} \partial_t B_y &= -\partial_z E_x, \\ \varepsilon_0 \partial_t E_x &= -\frac{1}{\mu_0} \partial_z B_y, \end{aligned}$$

à savoir

$$\partial_t \begin{pmatrix} B_y \\ E_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix} \partial_z \begin{pmatrix} B_y \\ E_x \end{pmatrix},$$

forme qui ne semble pas auto-adjointe. Mais on peut l'écrire

$$\partial_t \begin{pmatrix} cB_y \\ E_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ -c & 0 \end{pmatrix} \partial_z \begin{pmatrix} cB_y \\ E_x \end{pmatrix},$$

et on a bien une forme auto-adjointe.

On peut donc appliquer le raisonnement précédent. On a donc une solution locale au problème de Cauchy. Dans ce cas-ci, on a même beaucoup mieux.

- Le temps donné par la démonstration est  $t_*(R) = +\infty$ . L'existence et l'unicité sont donc globales.
- Comme il n'y a pas de non linéarité, il n'y a pas besoin d'invoquer la structure d'algèbre. Le théorème est donc vrai dès que l'on a la conservation de la norme. En particulier, il est vrai pour des solutions dans  $L^2$ , i.e. des solutions faibles.
- Un changement de variable permet également de conclure dans un milieu linéaire isotrope uniquement déterminé par son indice optique.

Pour se convaincre que ces solutions ont bien un sens, on voit directement dans ce cas simple, que

$$\begin{aligned}\partial_t(cB_y + E_x) &= -c\partial_z(cB_y + E_x), \\ \partial_t(cB_y - E_x) &= c\partial_z(cB_y - E_x).\end{aligned}$$

On a donc deux équations d'advection avec les vitesses de propagation  $c$  et  $-c$ . Les ondes  $cB_y \pm E_x$  se propagent donc au cours du temps sans voir leur forme déformée. Ceci justifie dans ce cas particulier différents points que l'on a étudiés auparavant :

- Cela a un sens de résoudre le problème dans  $L^2$ . Une donnée initiale dans  $L^2$  donne lieu pour tout temps à une solution dans  $L^2$ .
- On peut définir un semi-groupe d'évolution.

### 3.4.2 Maxwell 3-D dans un milieu isotrope

On se place dans un milieu isotrope d'indice optique  $n$ . Les équations de Maxwell s'écrivent

$$\partial_t \begin{pmatrix} c\mathbf{B}/n \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c/n \\ c/n & 0 \end{pmatrix} \text{rot} \begin{pmatrix} c\mathbf{B}/n \\ \mathbf{E} \end{pmatrix}.$$

On a à nouveau une matrice auto-adjointe et les conclusions précédentes sont valables. Il faut travailler légèrement plus pour calculer les valeurs propres et les vecteurs propres. On trouve néanmoins  $\pm c/n$  et 0 comme valeurs propres.

On ne regarde que ces deux équations et non les deux autres pour la raison suivante :

$$\begin{aligned}\partial_t(\text{div}(\mathbf{E})) &= \text{div}(\partial_t\mathbf{E}) = c^2 \text{div}(\text{rot}(\mathbf{B})) = 0, \\ \partial_t(\text{div}(\mathbf{B})) &= 0.\end{aligned}$$

Si on prend des données initiales vérifiant les propriétés de nullité des divergences, ces propriétés sont conservées au cours du temps.

### 3.4.3 Exemples d'anisotropie

Prenons un matériau linéaire anisotrope instantané :

$$\mathbf{P}(t) = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E}(t).$$

On alors

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{B} &= -\text{rot}(\mathbf{E}), \\ \partial_t A_0 \mathbf{E} &= c^2 \text{rot}(\mathbf{B}),\end{aligned}$$

où  $A_0 = \varepsilon_\infty I + \chi^{(1)}$ . Cette matrice  $A_0$  a pour valeurs propres les indices du matériau selon les axes propres. Ces indices sont bien entendu positifs. La matrice  $A_0$  admet un inverse et une racine. On a donc

$$\begin{aligned}\partial_t(A_0^{-1/2}c)\mathbf{B} &= -(A_0^{-1/2}c)\text{rot}(\mathbf{E}), \\ \partial_t\mathbf{E} &= (A_0^{-1/2}c)\text{rot}((A_0^{-1/2}c)\mathbf{B}),\end{aligned}$$

et on est ramenés au cas précédent.

À noter que l'on n'est pas nécessairement obligé de faire cette manipulation. En effet, on a

$$\partial_t \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\mathbf{B} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} \text{rot} \begin{pmatrix} c\mathbf{B} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}$  est définie positive et coercive. On peut faire toute l'analyse du système hyperbolique en la gardant de ce côté de l'égalité. Elle intervient alors comme poids dans les normes utilisées et la coercivité assure que les normes ainsi définies sont équivalentes aux normes usuelles. Ceci n'est pas intéressant dans le cas où la matrice est constante, mais s'avère utile dans le cas contraire (cf. plus loin) car alors on évite un procédé de symétrisation, parfois difficile à expliciter.

### 3.4.4 Exemple de non instantanéité

Sans même avoir de vraies non linéarités, il est des cas où le comportement du milieu ne permet pas d'effectuer le changement de variables permettant de rendre la matrice anti-adjointe. Il faut alors inclure certains termes linéaires dans la partie non linéaire. Ce cas là permet naturellement d'assurer le caractère lipschitzien de la fonction  $F$ .

Prenons comme exemple le modèle de Debye. On rappelle que

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{B} &= -\operatorname{rot}(\mathbf{E}), \\ \partial_t \mathbf{D} &= \operatorname{rot}(\mathbf{B})/\mu_0, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \mathbf{E} + \mathbf{P}, \\ t_r \partial_t \mathbf{P} &= -\mathbf{P} + \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \mathbf{E}. \end{aligned}$$

En notant  $c_\infty^2 = 1/\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_\infty$ , on a

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{B} &= -\operatorname{rot}(\mathbf{E}), \\ \partial_t \mathbf{E} &= c_\infty^2 \operatorname{rot}(\mathbf{B}) + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_\infty} \mathbf{P} - \left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_\infty} - 1\right) \mathbf{E}, \\ \partial_t \mathbf{P} &= -\frac{1}{t_r} \mathbf{P} + \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{t_r} \mathbf{E}. \end{aligned}$$

On note  $\varepsilon'_s = \varepsilon_s/\varepsilon_\infty$  et on a le système

$$\partial_t \begin{pmatrix} c_\infty \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{P}/\varepsilon_0 \varepsilon_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c_\infty & 0 \\ c_\infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \operatorname{rot} \begin{pmatrix} c_\infty \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{P}/\varepsilon_0 \varepsilon_\infty \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{P}/\varepsilon_0 \varepsilon_\infty - (\varepsilon'_s - 1) \mathbf{E} \\ -\mathbf{P}/\varepsilon_0 \varepsilon_\infty t_r + (\varepsilon'_s - 1) \mathbf{E}/t_r \end{pmatrix}.$$

On a bien un opérateur anti-adjoint et une "non-linéarité" lipschitzienne.

### 3.4.5 Exemple de non-linéarité

#### Non-linéarité instantanée

Prenons maintenant une non-linéarité Kerr instantanée :

$$\mathbf{P}(t) = \varepsilon_0 \left( \chi^{(1)} \mathbf{E}(t) + \chi^{(3)} |\mathbf{E}(t)|^2 \mathbf{E}(t) \right).$$

En dérivant par rapport au temps, on a

$$\partial_t \mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \partial_t \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi^{(3)} [2(\partial_t \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + |\mathbf{E}|^2 \partial_t \mathbf{E}].$$

On voit qu'il ne va pas être facile de se ramener au cas précédent. On triche en introduisant un retard en temps epsilonesque (auquel on peut certainement trouver un fondement physique).

#### Non-linéarité retardée

On peut penser à différentes lois. La première qui vient à l'esprit est

$$t_r \partial_t \mathbf{P} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \left( \chi^{(1)} \mathbf{E} + \chi^{(3)} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E} \right),$$

pour laquelle on se retrouve clairement dans le cas précédent avec cette fois une vraie non-linéarité. Cependant cette non linéarité ne permet pas d'écrire des lois de conservation. Regardons le cas plus physique où l'indice non linéaire dépend avec un retard de l'intensité de l'onde, à savoir

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \varepsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E} + \varepsilon_0 X(|\mathbf{E}|^2) \mathbf{E}, \\ t_r \partial_t X + X &= \chi^{(3)} |\mathbf{E}|^2.\end{aligned}$$

Le système s'écrit alors

$$\partial_t \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & A_0(X) & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\mathbf{B} \\ \mathbf{E} \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{rot} \begin{pmatrix} c\mathbf{B} \\ \mathbf{E} \\ X \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ (-X + \chi^{(3)} |\mathbf{E}|^2)/t_r \\ -X + \chi^{(3)} |\mathbf{E}|^2 \end{pmatrix},$$

avec  $A_0(X) = Id(1 + \chi^{(1)} + X)$ . Or, l'équation régissant  $X$  se résout facilement en

$$X(t) = e^{-t/t_r} X(0) + \frac{\chi^{(3)}}{t_r} \int_0^t e^{-(t-\tau)/t_r} |\mathbf{E}(\tau)|^2 d\tau.$$

En se plaçant dans une boule de  $H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}$ , si la quantité  $A_0(X)(t=0)$  est strictement positive, elle le reste sur un intervalle de temps suffisamment petit. On peut donc appliquer la méthode générale.

## 3.5 Estimations *a priori*

### 3.5.1 Principe

Le temps  $t_*$  construit dans la démonstration d'existence locale n'est en aucune façon un temps d'existence maximal. À l'instar des équations différentielles ordinaires, on peut alors se demander que dire du temps d'existence maximal  $T(U_0)$ . Deux éventualités se présentent :

- $T(U_0) = +\infty$ ,
- $T(U_0) < +\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow T(U_0)^-} \|U(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}} = +\infty$ .

En effet, si cette limite n'était pas infinie, on pourrait à partir de  $R = \|U(T(U_0))\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}}$  prolonger la solution sur un temps  $t_*(R)$  supplémentaire, ce qui contredit la définition de  $T(U_0)$ .

Pour pouvoir conclure à l'existence globale d'une solution, il faut donc être en mesure d'estimer la quantité  $\|U(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)^{d_U}}$  sur son intervalle d'existence.

### 3.5.2 Non-linéarité Kerr instantanée

Nous n'avons pas été capables de donner l'existence d'une solution pour une non-linéarité Kerr instantanée. Mais nous sommes capables de dire des choses *a priori* sur la solution en admettant qu'elle existe. On refait moralement le calcul de norme utilisé pour le point fixe. On obtient formellement

$$\frac{1}{2} \partial_t |c\mathbf{B}|^2 + \frac{1}{2} \partial_t |\mathbf{E}|^2 = c^2 (-\text{rot}(\mathbf{E}) \cdot \mathbf{B} + \text{rot} \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{\varepsilon_0} \partial_t \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}$$

Or  $\partial_t (|\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}) = 2(\partial_t \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + |\mathbf{E}|^2 \partial_t \mathbf{E}$ , donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \partial_t |c\mathbf{B}|^2 + \frac{1}{2} \partial_t |\mathbf{E}|^2 &= c^2 (-\text{rot}(\mathbf{E}) \cdot \mathbf{B} + \text{rot} \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) - \chi^{(3)} [2(\partial_t \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + |\mathbf{E}|^2 \partial_t \mathbf{E}] \cdot \mathbf{E} \\ &= c^2 (-\text{rot}(\mathbf{E}) \cdot \mathbf{B} + \text{rot} \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) - 3\chi^{(3)} [(\partial_t \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) |\mathbf{E}|^2]\end{aligned}$$

Enfin  $\partial_t (|\mathbf{E}|^4) = 2\partial_t (|\mathbf{E}|^2) |\mathbf{E}|^2 = 4\partial_t \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} |\mathbf{E}|^2$ , d'où

$$\frac{1}{2} \partial_t |c\mathbf{B}|^2 + \frac{1}{2} \partial_t |\mathbf{E}|^2 = c^2 (-\text{rot}(\mathbf{E}) \cdot \mathbf{B} + \text{rot} \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) - \frac{3}{4} \chi^{(3)} \partial_t |\mathbf{E}|^4.$$

En intégrant ceci en espace, il reste

$$\frac{c^2}{2} \partial_t \|c\mathbf{B}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \partial_t \|\mathbf{E}\|_{L^2}^2 = -\frac{3}{4} \chi^{(3)} \partial_t \|\mathbf{E}\|_{L^4}^4.$$

On a ainsi une loi de conservation (hamiltonien)

$$\partial_t \left( c^2 \|\mathbf{B}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{E}\|_{L^2}^2 + \frac{3}{2} \chi^{(3)} \|\mathbf{E}\|_{L^4}^4 \right) = 0.$$

Tout cela suppose que l'on soit capable de définir les normes *ad-hoc*. La régularité  $H^1$  assure que la norme  $L^4$  existe. Ceci type d'estimation permet de choisir le cadre fonctionnel qui permet de réaliser les démonstrations rigoureuses.

### 3.5.3 Non-linéarité Kerr retardée

Nous avons vu que la non-linéarité Kerr retardée permet de rentrer dans le cadre fonctionnel que l'on s'est donné. Si on reprend les calculs précédents, on a

$$\frac{1}{2} \partial_t |c\mathbf{B}|^2 + \frac{1}{2} \partial_t |\mathbf{E}|^2 = c^2 (-\operatorname{rot}(\mathbf{E}) \cdot \mathbf{B} + \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{\varepsilon_0} \partial_t \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \varepsilon_0 (\chi^{(1)} \mathbf{E} + X \mathbf{E}), \\ t_r \partial_t X + X &= \chi^{(3)} |\mathbf{E}|^2. \end{aligned}$$

donnent

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} &= \varepsilon_0 \partial_t (\chi^{(1)} + X) \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \\ &= \varepsilon_0 (\chi^{(1)} \partial_t \mathbf{E} + \partial_t (X) \mathbf{E} + X \partial_t \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} \\ &= \varepsilon_0 (\chi^{(1)} + X) \frac{1}{2} \partial_t (|\mathbf{E}|^2) + \varepsilon_0 \partial_t (X) |\mathbf{E}|^2, \\ &= \varepsilon_0 \frac{1}{2} \partial_t ((\chi^{(1)} + X) |\mathbf{E}|^2) - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \partial_t (X) |\mathbf{E}|^2 + \varepsilon_0 \partial_t (X) |\mathbf{E}|^2 \\ &= \varepsilon_0 \frac{1}{2} \partial_t ((\chi^{(1)} + X) |\mathbf{E}|^2) + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0}{t_r} (-X + \chi^{(3)} |\mathbf{E}|^2) |\mathbf{E}|^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{2} \partial_t \left( |c\mathbf{B}|^2 + (1 + \chi^{(1)} + X) |\mathbf{E}|^2 \right) = c^2 (-\operatorname{rot}(\mathbf{E}) \cdot \mathbf{B} + \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{2t_r} (X |\mathbf{E}|^2 - \chi^{(3)} |\mathbf{E}|^4).$$

En outre

$$t_r \frac{1}{2} \partial_t X^2 + X^2 = \chi^{(3)} |\mathbf{E}|^2 X.$$

On écrit donc la combinaison linéaire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t \left( |c\mathbf{B}|^2 + (1 + \chi^{(1)} + X) |\mathbf{E}|^2 + \alpha X^2 \right) &= c^2 (-\operatorname{rot}(\mathbf{E}) \cdot \mathbf{B} + \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) \\ &\quad + \frac{1}{2t_r} (X |\mathbf{E}|^2 - \chi^{(3)} |\mathbf{E}|^4 - 2\alpha X^2 + 2\alpha \chi^{(3)} |\mathbf{E}|^2 X) \\ &= c^2 (-\operatorname{rot}(\mathbf{E}) \cdot \mathbf{B} + \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) \\ &\quad - \frac{1}{2t_r} (2\alpha X^2 - (1 + 2\alpha \chi^{(3)}) X |\mathbf{E}|^2 + \chi^{(3)} |\mathbf{E}|^4). \end{aligned}$$

On choisit  $2\alpha = 1/\chi^{(3)}$ , ce qui permet d'avoir un carré parfait

$$\frac{1}{2} \partial_t \left( |c\mathbf{B}|^2 + (1 + \chi^{(1)} + X) |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\chi^{(3)}} X^2 \right) = c^2 (-\operatorname{rot}(\mathbf{E}) \cdot \mathbf{B} + \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{2t_r \chi^{(3)}} (X - \chi^{(3)} |\mathbf{E}|^2)^2.$$

En intégrant en espace, on trouve que

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^d} \left( |c\mathbf{B}|^2 + (1 + \chi^{(1)} + X) |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\chi^{(3)}} X^2 \right) = -\frac{1}{t_r \chi^{(3)}} \int_{\mathbb{R}^d} (X - \chi^{(3)} |\mathbf{E}|^2)^2.$$

Cette relation est particulièrement intéressante dans le cas où  $\chi^{(3)}$  est positif, on a alors

1. Si  $X$  est positif au temps  $t = 0$ , alors il est positif pour tout temps. En effet, l'équation régissant  $X$  se résout facilement en

$$X(t) = e^{-t/t_r} X(0) + \frac{\chi^{(3)}}{t_r} \int_0^t e^{-(t-\tau)/t_r} |\mathbf{E}(\tau)|^2 d\tau.$$

2. La quantité  $|c\mathbf{B}|^2 + (1 + \chi^{(1)} + X)|\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\chi^{(3)}}X^2$  est positive ( $\chi^{(1)}$  est toujours positif).
3. L'intégrale de cette quantité est décroissante en temps : le système est dissipatif.

On obtient ainsi une majoration des normes  $L^2$  de  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  et  $X$ .

### 3.6 Exercices

1. Reproduire la méthode générale, pour le système

$$\partial_t A_0(U)U = \sum_{\mu=1}^d A_\mu \partial_\mu U + F(U),$$

où  $A_0(U)$  est définie positive et coercive.

2. Reproduire les preuves dans le cas où le milieu est décrit par un modèle de Lorentz au lieu du modèle de Debye.
3. Pour le modèle de Maxwell–Lorentz, montrer qu'il existe une énergie  $\mathcal{E}$  et une constante  $K$  que l'on explicitera, telles que

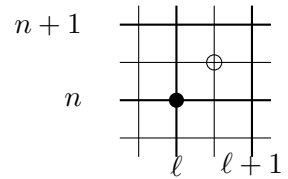
$$\partial_t \mathcal{E} = -K \|\mathbf{J}\|_{L^2}^2.$$

# Chapitre 4

## Schémas aux différences finies

### 4.1 Le schéma pour les équations de Maxwell : le schéma de Yee

Dans la catégorie des schémas aux différences finies, le schéma qui s'impose pour les équations de Maxwell est celui de Yee. L'idée de ce schéma repose sur une localisation particulière des variables dans l'espace-temps qui reflète bien les propriétés de symétrie de l'équation de Maxwell, et fournit un schéma d'ordre deux car centré et cependant explicite.



**Fig. 4.1:** Schéma de Yee

La figure 4.1 représente le cas de la dimension un, qui est le cas des exemples que nous donnons dans ce document. Dans le cas où le milieu a une géométrie simple (typiquement rectangulaire) et où on n'a pas de raison de mailler de manière non uniforme, ce schéma est le plus indiqué par son efficacité et sa simplicité de mise en œuvre.

L'écriture de ce schéma est un peu fastidieuse en dimension trois, si on explicite les indices spatiaux. C'est pourquoi, nous ne donnons ci-dessous que des versions uni- et bi-dimensionnelles dans la polarisation  $TE_z$ .

#### 4.1.1 Schéma de Yee uni-dimensionnel

Comme le montre la figure 4.1, le champ électrique  $E = E_x$  est pris aux points entiers et le déplacement magnétique  $B = B_y$  aux points demi-entiers, c'est-à-dire que  $E_\ell^n \simeq E(n\delta t, \ell\delta z)$  et  $B_{\ell+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \simeq B((n+\frac{1}{2})\delta t, (\ell+\frac{1}{2})\delta z)$ . Par ailleurs, pour décrire ce schéma et les autres nous utilisons la variable  $\mathbf{J} = \partial_t \mathbf{P}$ . Dans le cas uni-dimensionnel seule la composante  $J = J_x$  nous intéresse. Le schéma s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{B_{\ell+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{\ell+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\delta t} &= -\frac{E_{\ell+1}^n - E_\ell^n}{\delta z}, \\ \frac{1}{c_\infty^2} \frac{E_\ell^{n+1} - E_\ell^n}{\delta t} &= -\frac{B_{\ell+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{\ell-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\delta z} - \mu_0 J_\ell^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Sous cette forme apparaît l'avantage majeur de ce schéma : il est explicite.

#### 4.1.2 Schéma de Yee bi-dimensionnel

Les variables pertinentes sont alors  $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  que l'on discrétise de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E_{x,\ell+\frac{1}{2},m}^n &\simeq E_x(n\delta t, (\ell+\frac{1}{2})\delta x, m\delta y), \\ E_{x,\ell,m+\frac{1}{2}}^n &\simeq E_y(n\delta t, \ell\delta x, (m+\frac{1}{2})\delta y), \\ B_{z,\ell+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &\simeq B_z((n+\frac{1}{2})\delta t, (\ell+\frac{1}{2})\delta x, (m+\frac{1}{2})\delta y). \end{aligned}$$

Le schéma de Yee s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{B_{z,\ell+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{z,\ell+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{z,n-\frac{1}{2}}}{\delta t} &= \frac{E_{x,\ell+\frac{1}{2},m+1}^n - E_{x,\ell+\frac{1}{2},m}^n}{\delta y} - \frac{E_{y,\ell+1,m+\frac{1}{2}}^n - E_{y,\ell,m+\frac{1}{2}}^n}{\delta x}, \\ \frac{1}{c_\infty^2} \frac{E_{x,\ell+\frac{1}{2},m}^{n+1} - E_{x,\ell+\frac{1}{2},m}^n}{\delta t} &= \frac{B_{z,\ell+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{z,\ell-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\delta y} - \mu_0 J_{x,\ell+\frac{1}{2},m}^{n+\frac{1}{2}}, \\ \frac{1}{c_\infty^2} \frac{E_{y,\ell,m+\frac{1}{2}}^{n+1} - E_{y,\ell,m+\frac{1}{2}}^n}{\delta t} &= -\frac{B_{z,\ell+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{z,\ell-\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\delta x} - \mu_0 J_{y,\ell,m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

## 4.2 Convergence

On suppose que le système est décrit par une variable  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$  approchée par des valeurs  $\mathbf{U}_\ell^n$  en un nombre fini de points  $(x_\ell, t^n)$  en espace et en temps. On note  $k$  le pas de temps et  $h$  le pas d'espace (ou le suprémum des pas d'espace).

**Définition 6** *Un schéma aux différences finies à un pas est convergent si l'approximation  $\mathbf{U}_\ell^n$  converge vers  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$  lorsque  $(\ell h, nk)$  tend vers  $(\mathbf{x}, t)$  dès que  $\mathbf{U}_\ell^0$  converge vers  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, 0)$  lorsque  $\ell h$  tend vers  $\mathbf{x}$ .*

Il s'agit donc d'une notion de convergence ponctuelle. Il est en général impossible de démontrer un tel résultat directement. C'est pourquoi on introduit deux nouvelles notions qui, combinées, assureront la convergence.

### 4.2.1 Consistance

On écrit l'équation aux dérivées partielles sous la forme  $\mathcal{P}\mathbf{U} = \mathcal{F}$  et  $\mathcal{P}_{h,k}\mathbf{U} = \mathcal{F}$  le schéma.

**Définition 7** *Le schéma est consistant si pour toute fonction  $\varphi$  (suffisamment régulière)*

$$\mathcal{P}\varphi - \mathcal{P}_{h,k}\varphi = O(h^m, k^p).$$

*Le couple  $(m, p)$  définit alors l'ordre de consistance.*

Une telle estimation est en général obtenue grâce à des développements de Taylor.

Réalisons ceci sur l'exemple du schéma de Yee uni-dimensionnel. L'équation de Faraday est discrétisée autour du point  $(z, t) = ((\ell + \frac{1}{2})h, nk)$ , d'où

$$\begin{aligned} B(z, t + \frac{1}{2}k) &= B(z, t) + \frac{1}{2}k\partial_t B(z, t) + \frac{1}{8}k^2\partial_{tt}^2 B(z, \tau_1), \\ B(z, t - \frac{1}{2}k) &= B(z, t) - \frac{1}{2}k\partial_t B(z, t) + \frac{1}{8}k^2\partial_{tt}^2 B(z, \tau_2), \\ E(z + \frac{1}{2}h, t) &= E(z, t) + \frac{1}{2}h\partial_z E(z, t) + \frac{1}{8}h^2\partial_{zz}^2 E(\zeta_1, t), \\ E(z - \frac{1}{2}h, t) &= E(z, t) - \frac{1}{2}h\partial_z E(z, t) + \frac{1}{8}h^2\partial_{zz}^2 E(\zeta_2, t). \end{aligned}$$

En injectant dans la discrétisation, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{B(z, t + \frac{1}{2}k) - B(z, t - \frac{1}{2}k)}{k} + \frac{E(z + \frac{1}{2}h, t) - E(z - \frac{1}{2}h, t)}{h} \\ = \partial_t B(z, t) + \partial_z E(z, t) \\ + \frac{1}{8}k(\partial_{tt}^2 B(z, \tau_1) - \partial_{tt}^2 B(z, \tau_2)) + \frac{1}{8}h(\partial_{zz}^2 E(\zeta_1, t) - \partial_{zz}^2 E(\zeta_2, t)) \\ = \frac{1}{8}k(\partial_{tt}^2 B(z, \tau_1) - \partial_{tt}^2 B(z, \tau_2)) + \frac{1}{8}h(\partial_{zz}^2 E(\zeta_1, t) - \partial_{zz}^2 E(\zeta_2, t)). \end{aligned}$$

On procède de même pour l'équation d'Ampère autour du point  $(z, t) = (\ell h, (n + \frac{1}{2})k)$ .



## 4.2.2 Stabilité

Pour assurer la stabilité, il faut également assurer une borne en un certain sens sur l'approximation  $\mathbf{U}_\ell^n$ . Ceci est fourni par la propriété de stabilité.

Cette exigence permet aussi d'assurer que de petites erreurs numériques introduites par l'approximation à un instant donné ne s'accumulent pas (ne sont pas amplifiées) au cours du temps.

**Définition 8** *Un schéma  $\mathcal{P}_{h,k}\mathbf{U}_\ell^n = 0$  pour une équation du premier ordre est stable si et seulement si il existe  $J > 0$ ,  $h_0$  et  $k_0$  tel que pour tout  $T > 0$ , il existe  $C_T$  tel que*

$$h \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |\mathbf{U}_\ell^n|^2 \leq C_T h \sum_{j=0}^J \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |\mathbf{U}_\ell^j|^2,$$

pour  $0 \leq nk \leq T$ ,  $0 \leq h \leq h_0$  et  $0 \leq k \leq k_0$ .

Par la relation de Parseval, on a une version équivalente en variable de Fourier. On définit la transformée de Fourier  $\hat{\mathbf{U}}^n$  qui est  $2\pi/h$ -périodique et

$$\|\hat{\mathbf{U}}^n\|^2 \leq C_T \sum_{j=0}^J \|\hat{\mathbf{U}}^j\|^2.$$

C'est cette forme qui nous servira dans la suite.

## 4.2.3 Convergence

**Théorème 9 (Lax Richtmyer)** *Un schéma aux différences finies consistant avec une équation aux dérivées partielles bien posée est convergente si et seulement si elle est stable.*

preuve Strikwerda pp. 222-226.

## 4.3 Stabilité

### 4.3.1 Stabilité linéaire classique

Une étude de stabilité linéaire est suffisante dans le cadre de systèmes linéaires. Une telle démonstration se fait classiquement en étudiant les valeurs propres de la matrice d'amplification associée au schéma. Dans ce qui suit, nous donnons le principe de l'analyse pour les systèmes linéaires puis l'application au système de Maxwell dans le cas où  $J_\ell^n = 0$  en dimension 1 et 2.

### Polynômes de Schur et de von Neumann

La description complète de cette théorie se trouve dans l'ouvrage de J.C. Strikwerda. On définit des familles particulières de polynômes : les polynômes de von Neumann, les polynômes de von Neumann simples et les polynômes de Schur.

**Définition 10** *Un polynôme de von Neumann est un polynôme dont toutes les racines sont de module  $\leq 1$ .*

**Définition 11** *Un polynôme de von Neumann simple est un polynôme dont toutes les racines sont de module  $\leq 1$  et dont celles de module exactement égal à 1 sont simples.*

**Définition 12** *Un polynôme de Schur est un polynôme dont toutes les racines sont de module  $< 1$ .*

Il est alors clair qu'un polynôme de Schur est un cas particulier de polynôme de von Neumann simple. Lorsqu'un polynôme a un degré suffisamment élevé et/ou des coefficients suffisamment compliqués, il est difficile de décider si un polynôme est de von Neumann simple ou non, ou de Schur. La théorie de polynômes de Schur et de von Neumann fournit une technique d'abaissement de degré qui

permet de résoudre ces problèmes. Pour cela, on définit tout d'abord la notion de polynôme conjugué. Si

$$\varphi(Z) = c_0 + c_1Z + \cdots + c_dZ^d,$$

son polynôme conjugué est défini par

$$\varphi^*(Z) = \overline{c_d} + \overline{c_{d-1}}Z + \cdots + \overline{c_0}Z^d = \overline{\varphi(\overline{Z}^{-1})}Z^d.$$

Étant donné un polynôme  $\varphi_0(Z)$ , on définit de manière récursive une suite de polynômes par

$$\varphi_{j+1}(Z) = \frac{1}{Z}(\varphi_j^*(0)\varphi_j(Z) - \varphi_j(0)\varphi_j^*(Z)).$$

On voit immédiatement que cette suite est de degré strictement décroissant. On a alors les deux théorèmes.

**Théorème 13** *Le polynôme  $\varphi_j$  est un polynôme de Schur de degré exactement  $d$  si et seulement si  $\varphi_{j+1}$  est polynôme de Schur de degré exactement  $d - 1$  et  $|\varphi_j(0)| < |\varphi_j^*(0)|$ .*

**Théorème 14** *Le polynôme  $\varphi_j$  est un polynôme de von Neumann simple si et seulement si  $\varphi_{j+1}$  est polynôme de von Neumann simple et  $|\varphi_j(0)| < |\varphi_j^*(0)|$ ,*

ou

*$\varphi_{j+1}$  est identiquement nul et  $\varphi_j'$  est un polynôme de Schur.*

## Preuves

Ces deux théorèmes se basent sur un théorème classique d'analyse complexe.

**Théorème 15 (Rouché)** *Soient deux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  analytiques à l'intérieur d'une courbe fermée simple  $\mathcal{C}$  et sur cette courbe. On suppose que sur  $\mathcal{C}$ ,*

$$|\varphi(z) - \psi(z)| < |\varphi(z)|.$$

*Alors  $\varphi$  et  $\psi$  ont le même nombre de zéros à l'intérieur de  $\mathcal{C}$ .*

**Preuve : polynômes de Schur.** On suppose que  $|\varphi_j(0)| < |\varphi_j^*(0)|$  et que  $\varphi_{j+1}$  est un polynôme de Schur de degré  $d - 1$ . Posons  $\psi(z) = z\varphi_{j+1}(z)/\varphi_j^*(0)$ . D'après la définition de  $\varphi_{j+1}$ , on a sur le cercle unité

$$\begin{aligned} |\varphi_j(z) - \psi(z)| &= \frac{|\varphi_j^*(0)\varphi_j(z) - [\varphi_j^*(0)\varphi_j(z) - \varphi_j(0)\varphi_j^*(z)]|}{|\varphi_j^*(0)|} = \frac{|\varphi_j(0)\varphi_j^*(z)|}{|\varphi_j^*(0)|} \\ &< |\varphi_j^*(z)| = |\overline{\varphi_j(\overline{z}^{-1})}z^d| = |\varphi_j(\overline{z}^{-1})| = |\varphi_j(z)|. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Rouché,  $\varphi_j$  et  $\psi$  (i.e.  $z\varphi_{j+1}$ ) ont le même nombre de zéros dans le cercle unité. Comme  $\varphi_{j+1}$  a ses  $d - 1$  racines dans le cercle unité,  $\psi$  a ses  $d$  racines dans le cercle unité ainsi que  $\varphi_j$ .

Réciproquement, si  $\varphi_j$  est un polynôme de Schur, alors le produit de ses racines qui vaut  $c_0/c_d$  doit être inférieur à 1. Ceci est équivalent à  $|\varphi_j(0)| < |\varphi_j^*(0)|$ . Comme par ailleurs

$$|\varphi_j(z) - \psi(z)| = \frac{|\varphi_j(0)|}{|\varphi_j^*(0)|}|\varphi_j(z)|,$$

$z\varphi_{j+1}$  et donc  $\varphi_{j+1}$  est un polynôme de Schur.

**Preuve : polynômes de von Neumann.** On écrit un polynôme de von Neumann sous la forme

$$\varphi_j(z) = \prod_{\nu=1}^N (z - \alpha_\nu) \tilde{\varphi}_j(z),$$

où  $\tilde{\varphi}_j$  est de Schur (ou une constante) et les  $\alpha_\nu$  sont de module 1 et deux-à-deux distincts.

On remarque que la transformation \* est multiplicative et que

$$(z - \alpha_\nu)^* = -\bar{\alpha}_\nu z + 1.$$

Si  $\tilde{\varphi}_j$  n'est pas une constante, alors

$$\begin{aligned} \varphi_{j+1}(z) &= \frac{\varphi_j^*(0)\varphi_j(z) - \varphi_j(0)\varphi_j^*(z)}{z} \\ &= \frac{1}{z} \left( \tilde{\varphi}_j^*(0) \prod_{\nu=1}^N (z - \alpha_\nu) \tilde{\varphi}_j(z) - \prod_{\nu=1}^N (-\alpha_\nu) \tilde{\varphi}_j(0) \prod_{\nu=1}^N (-\bar{\alpha}_\nu z + 1) \tilde{\varphi}_j^*(z) \right) \\ &= \prod_{\nu=1}^N (z - \alpha_\nu) \frac{1}{z} (\tilde{\varphi}_j^*(0) \tilde{\varphi}_j(z) - \tilde{\varphi}_j(0) \tilde{\varphi}_j^*(z)) = \prod_{\nu=1}^N (z - \alpha_\nu) \tilde{\varphi}_{j+1}(z), \end{aligned}$$

où  $\tilde{\varphi}_{j+1}$  est de Schur d'après le résultat précédent. On prouve ainsi le théorème dans le cas où  $\varphi_{j+1}$  n'est pas identiquement nul ( $\varphi_j$  constant).

Dans le cas contraire, si  $\varphi_j = \prod_{\nu=1}^d (z - \alpha_\nu)$  (à une constante près qui ne joue aucun rôle ici) est de degré  $d$ , on définit les polynômes

$$\varphi_j^\varepsilon(z) = \varphi_j(z) + \varepsilon z \varphi_j'(z),$$

pour  $\varepsilon > 0$  petit. Comme  $\varphi_j((1 + \varepsilon)z) = \varphi_j(z) + \varepsilon z \varphi_j'(z) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 z^2 \varphi_j''(z)$ , en  $z = r_\nu^\varepsilon$  racine de  $\varphi_j^\varepsilon(z)$ , on a  $\varphi_j((1 + \varepsilon)r_\nu^\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon^2 r_\nu^{\varepsilon 2} \varphi_j''(r_\nu^\varepsilon)$ . Ainsi

$$r_\nu^\varepsilon = \frac{r_\nu}{1 + \varepsilon} + O(\varepsilon^2).$$

Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, les racines de  $\varphi_j^\varepsilon$  sont toutes à l'intérieur du cercle unité et  $\varphi_j^\varepsilon$  est un polynôme de Schur. Par ailleurs :

**Lemme 16**

$$\varphi_{j+1}^\varepsilon(z) = \varepsilon(2 + \varepsilon d) \varphi_j'(z).$$

Ce lemme est montré en exercice. Ainsi  $\varphi_j'(z)$  est un polynôme de Schur. La réciproque s'obtient facilement.

**Stabilité**

Comme on s'intéresse à un problème linéaire, on peut le traiter dans le domaine fréquentiel. On suppose que le système régit une variable  $U_\ell^n$  dont la dépendance spatiale est donnée par  $U_\ell^n = U^n e^{i\xi\ell}$ . La matrice de passage de  $U^n$  à  $U^{n+1}$  s'appelle matrice d'amplification. On trouve différentes conditions de stabilité, dont les deux suivantes.

**Proposition 17** *Une condition nécessaire de stabilité pour un schéma est que le polynôme caractéristique de la matrice d'amplification soit un polynôme de von Neumann.*

**Proposition 18** *Une condition suffisante de stabilité pour un schéma est que le polynôme caractéristique de la matrice d'amplification soit un polynôme de von Neumann simple.*

La première proposition est claire. Dans le cas contraire, un vecteur propre correspondant à une valeur propre de module supérieur à 1 croîtrait de manière exponentielle.

La deuxième proposition l'est moins. Certaines matrices ayant 1 comme racine double (par exemple) donnent lieu à des itérées non bornées :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'autres peuvent avoir des itérées bornées

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1-a^n}{1-a} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

### Schéma de Yee uni-dimensionnel

**Proposition 19** *La condition de stabilité linéaire pour le système uni-dimensionnel avec  $J_\ell^n = 0$  est  $c_\infty \delta t / \delta z < 1$ .*

*Preuve*

On définit la nouvelle variable  $U_\ell^n = {}^t(c_\infty B_{\ell+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, E_\ell^n)$  dont on suppose que la dépendance spatiale est de la forme  $U_\ell^n = U^n e^{i\xi\ell}$ . On réécrit les équations pour qu'elles soient explicites en cette variable, à savoir

$$\begin{aligned} c_\infty B_{\ell+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= c_\infty B_{\ell+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{c_\infty \delta t}{\delta z} (E_{\ell+1}^n - E_\ell^n), \\ E_\ell^{n+1} &= E_\ell^n - \frac{c_\infty \delta t}{\delta z} (c_\infty B_{\ell+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - c_\infty B_{\ell-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \\ &= E_\ell^n - \frac{c_\infty \delta t}{\delta z} (c_\infty B_{\ell+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - c_\infty B_{\ell-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}) + \frac{c_\infty^2 \delta t^2}{\delta z^2} (E_{\ell+1}^n - 2E_\ell^n + E_{\ell-1}^n). \end{aligned}$$

Ainsi, en notant  $\lambda = c_\infty \delta t / \delta z$ , le rapport de Courant-Lewy-Friedrichs,

$$U^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda(e^{i\xi} - 1) \\ -\lambda(1 - e^{-i\xi}) & 1 + \lambda^2(e^{i\xi} - 2 + e^{-i\xi}) \end{pmatrix} U^n.$$

La matrice d'amplification ne dépend pas explicitement des pas de temps et d'espace mais uniquement de leur rapport. La matrice d'amplification pour le schéma de Yee a pour polynôme caractéristique

$$\varphi_0(Z) = Z^2 - 2(1 - 2\lambda^2 \sin^2 \frac{\xi}{2})Z + 1.$$

Ses deux valeurs propres  $g_-$  et  $g_+$  vérifient

$$g_- g_+ = 1, \quad g_- + g_+ = 2(1 + \lambda^2(\cos \xi - 1)) = 2(1 - 2\lambda^2 \sin^2 \frac{\xi}{2}).$$

Ces deux valeurs propres sont conjuguées et de module 1. Ceci n'est possible que si pour tout  $\xi$

$$-2 \leq g_- + g_+ = 2(1 - 2\lambda \sin^2 \frac{\xi}{2}) \leq 2.$$

Ceci est clairement équivalent à  $\lambda \leq 1$ . Sous cette première condition, les deux valeurs propres sont de la forme

$$\lambda_\pm = 1 - 2\lambda^2 \sin^2 \frac{\xi}{2} \pm i2\lambda \sin \frac{\xi}{2} \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \frac{\xi}{2}}.$$

Deux cas d'égalité se présentent :

- si  $\sin \xi/2 = 0$ , alors 1 est valeur propre double. Cela correspond à une matrice d'amplification qui est l'identité, ce qui ne génère pas de problème d'instabilité ;
- si  $\sin \xi/2 = \pm 1$  et  $\lambda = 1$ , alors la matrice d'amplification a des itérées linéairement croissantes. Ce cas est à proscrire car il génère des instabilités.

La condition de stabilité est donc  $\lambda < 1$ . ■

### Schéma de Yee bi-dimensionnel

**Proposition 20** *La condition de stabilité linéaire pour le système bi-dimensionnel avec  $J_{x,\ell+\frac{1}{2},m}^n = 0$  et  $J_{y,\ell,m+\frac{1}{2}}^n = 0$  est  $c_\infty^2 \delta t^2 / \delta x^2 + c_\infty^2 \delta t^2 / \delta y^2 < 1$ .*

#### Preuve

Nous ne détaillons pas à nouveau le raisonnement fait ci-dessus dans le cas uni-dimensionnel mais n'en donnons que les points essentiels.

On étudie, cette fois-ci, l'amplification du vecteur

$$U_{\ell,m}^n = {}^t (c_\infty B_{z,\ell+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, E_{x,\ell+\frac{1}{2},m}^n, E_{y,\ell,m+\frac{1}{2}}^n),$$

et on se place dans l'espace des fréquences en supposant que  $U_{\ell,m}^n$  est de la forme  $U_{\ell,m}^n = U^n e^{i(\xi\ell + \zeta m)}$ . On se donne deux rapports de stabilité (un pour chaque direction) :  $\lambda_x = \delta t c_\infty / \delta x$  et  $\lambda_y = \delta t c_\infty / \delta y$ . En rendant explicite le schéma de Yee pour la variable  $U^n$ , on obtient la matrice d'amplification

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_y(e^{i\zeta} - 1) & -\lambda_x(e^{i\xi} - 1) \\ \lambda_y(1 - e^{-i\zeta}) & 1 + \lambda_y^2(e^{i\zeta} - 2 + e^{-i\zeta}) & -\lambda_x\lambda_y(e^{i\xi} - 1)(1 - e^{-i\zeta}) \\ \lambda_x(1 - e^{-i\xi}) & -\lambda_x\lambda_y(e^{i\zeta} - 1)(1 - e^{-i\xi}) & 1 + \lambda_x^2(e^{i\xi} - 2 + e^{-i\xi}) \end{pmatrix}.$$

On voit immédiatement que 1 est valeur propre de cette matrice. En effet, si on soustrait la matrice identité, les trois lignes sont clairement proportionnelles. Notons les deux autres valeurs propres  $g_-$  et  $g_+$ . Celles-ci sont nécessairement complexes conjuguées et en calculant la trace et le déterminant de la matrice d'amplification, on a

$$\begin{aligned} 1 + g_- + g_+ &= 3 - 4\lambda_x^2 \sin^2 \frac{\xi}{2} - 4\lambda_y^2 \sin^2 \frac{\zeta}{2} \\ g_- g_+ &= 1. \end{aligned}$$

Nous avons vu précédemment qu'il suffisait d'étudier la partie réelle de  $g_\pm$  pour trouver la condition de stabilité. Celle-ci vaut

$$\text{Re } g_\pm = 1 - 2\lambda_x^2 \sin^2 \frac{\xi}{2} - 2\lambda_y^2 \sin^2 \frac{\zeta}{2}.$$

Le cas  $\sin \xi/2 = \sin \zeta/2 = 0$  donne a nouveau lieu à une matrice d'amplification unité. Pour les autres fréquences, une condition nécessaire et suffisante pour que  $|\text{Re } g_\pm| < 1$  est  $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 < 1$ , ce qui prouve la proposition. ■

Si ce programme de preuve est simple à réaliser pour le schéma de Yee, il peut s'avérer ardu dès que l'on aborde des couplages fussent-ils linéaires. Nous en verrons un exemple ultérieurement.

### 4.3.2 Stabilité non linéaire

Notre objectif est de pouvoir traiter les cas fortement non linéaires où linéariser autour de l'état d'équilibre n'aurait pas beaucoup de sens. Il faut donc se rabattre sur une méthode d'énergie qui fournit uniquement une condition suffisante de stabilité non linéaire.

Nous présentons ici le début du calcul qui est commun à tous les couplages. Un exemple d'application aux couplages est donné ultérieurement.

L'estimation d'énergie est réalisée aux temps demi-entiers et on définit dans ce but  $\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^{n+1} + \mathbf{E}^n)$ . Par ailleurs, on commence par travailler uniquement sur la semi-discrétisation en temps :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}}{\delta t} &= -\text{rot } \mathbf{E}^n, \\ \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\delta t} &= \text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} - \mu_0 \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En pondérant pour assurer l'homogénéité, on définit l'énergie du système au temps  $(n + \frac{1}{2})\delta t$  et à la fréquence infinie par

$$\mathcal{E}_\infty^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_0} \|\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \|\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 - \frac{c_\infty^2 \delta t^2}{4} \frac{1}{\mu_0} \|\text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \right).$$

**Proposition 21** Soit  $h$  le pas minimal du maillage  $h = \min(\delta x, \delta y, \delta z)$ . L'énergie  $\mathcal{E}_\infty^{n+\frac{1}{2}}$  est positive sous la condition CFL :  $c_\infty \delta t \leq h/\sqrt{2}$ .

Preuve

La formule de rot  $\mathbf{B}$  donne

$$\|\operatorname{rot} \mathbf{B}\|^2 \leq \frac{8}{h^2} \|\mathbf{B}\|^2.$$

Ainsi

$$\|\mathbf{B}\|^2 - \frac{c_\infty^2 \delta t^2}{4} \|\operatorname{rot} \mathbf{B}\|^2 \geq \|\mathbf{B}\|^2 - \frac{c_\infty^2 \delta t^2}{4} \frac{8}{h^2} \|\mathbf{B}\|^2 = \left(1 - \frac{2c_\infty^2 \delta t^2}{h^2}\right) \|\mathbf{B}\|^2,$$

d'où le résultat annoncé. Dans le cas uni-dimensionnel, on a une majoration légèrement meilleure, car

$$\|\operatorname{rot} B\| \leq \frac{2}{h} \|B\|. \quad \blacksquare$$

**Proposition 22**

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\infty^{n+\frac{1}{2}} &= \mathcal{E}_\infty^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\delta t}{4} \left( \mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad - \frac{c_\infty^2 \delta t^2}{8} \left( \operatorname{rot} \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} + \operatorname{rot} \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Preuve

On multiplie scalairement l'équation de Faraday par  $\frac{1}{2}(\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}})$  et on intègre en espace :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\delta t} [\|\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 - \|\mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}\|^2] &= - \left( \operatorname{rot} \mathbf{E}^n, \frac{1}{2}(\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}) \right) \\ &= - \left( \mathbf{E}^n, \frac{1}{2} \operatorname{rot} (\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}) \right) \\ &= - \frac{1}{c_\infty^2} \left( \mathbf{E}^n, \frac{1}{2\delta t} (\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^{n-1}) \right) - \mu_0 \left( \mathbf{E}^n, \frac{1}{2} (\mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}}) \right), \end{aligned}$$

formule qu'il convient de comparer à l'énergie pour le modèle continu. Ainsi

$$\|\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{c_\infty^2} (\mathbf{E}^n, \mathbf{E}^{n+1}) = \|\mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{c_\infty^2} (\mathbf{E}^{n-1}, \mathbf{E}^n) - \mu_0 \delta t (\mathbf{E}^n, \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}}),$$

où on a utilisé la relation  $\varepsilon_0 \varepsilon_\infty \mu_0 c_\infty^2 = 1$ . Or

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}^n, \mathbf{E}^{n+1}) &= \left\| \frac{\mathbf{E}^{n+1} + \mathbf{E}^n}{2} \right\|^2 - \frac{\delta t^2}{4} \left\| \frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\delta t} \right\|^2 \\ &= \left\| \mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 - \frac{\delta t^2}{4} \left\| c_\infty^2 \operatorname{rot} \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} - \mu_0 c_\infty^2 \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 \\ &= \left\| \mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 - \frac{\delta t^2}{4} c_\infty^4 \left\| \operatorname{rot} \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 + \frac{\delta t^2}{2} c_\infty^4 \mu_0 (\operatorname{rot} \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\delta t^2}{4} c_\infty^4 \mu_0^2 \left\| \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\infty^{n+\frac{1}{2}} &= \mathcal{E}_\infty^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\delta t}{2} (\mathbf{E}^n, \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}}) - \frac{c_\infty^2 \delta t^2}{4} \left[ (\operatorname{rot} \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}}) - (\operatorname{rot} \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}}) \right] \\ &\quad + \frac{c_\infty^2 \delta t^2}{8} \mu_0 \left[ \left\| \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 - \left\| \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}} \right\|^2 \right]. \end{aligned}$$

Remplaçons maintenant  $\mathbf{E}^n$  dans l'expression précédente par

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^n &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{4} (\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n) + \frac{1}{4} (\mathbf{E}^n - \mathbf{E}^{n-1}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{4} (\delta t c_\infty^2 \operatorname{rot} \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} - \delta t c_\infty^2 \mu_0 \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4} (\delta t c_\infty^2 \operatorname{rot} \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}} - \delta t c_\infty^2 \mu_0 \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{4} \delta t c_\infty^2 (\operatorname{rot} \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} - \operatorname{rot} \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4} \delta t c_\infty^2 \mu_0 (\mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\infty^{n+\frac{1}{2}} &= \mathcal{E}_\infty^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\delta t}{4} \left( \mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + \frac{c_\infty^2 \delta t^2}{8} \left( \text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} - \text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}} \right) - \frac{c_\infty^2 \delta t^2}{8} \mu_0 \left[ \left\| \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 - \left\| \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}} \right\|^2 \right] \\ &\quad - \frac{c_\infty^2 \delta t^2}{4} \left[ \left( \text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \left( \text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right] + \frac{c_\infty^2 \delta t^2}{8} \mu_0 \left[ \left\| \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 - \left\| \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}} \right\|^2 \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\infty^{n+\frac{1}{2}} &= \mathcal{E}_\infty^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\delta t}{4} \left( \mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad - \frac{c_\infty^2 \delta t^2}{8} \left( \text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} + \text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}} \right).\end{aligned}$$

■

La démonstration de stabilité nécessite une expression pour  $\mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}}$  qui bien sûr dépend du modèle considéré. Dans le cas de l'optique linéaire classique où la permittivité vaut  $\varepsilon_0 \varepsilon_\infty$  indépendamment de la fréquence, ceci donne une condition nécessaire et suffisante de stabilité et la démonstration présentée est une alternative aux démonstrations classiques de stabilité linéaire.

**Théorème 23** *Si  $\mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} = 0$  pour tout  $n$ , alors le schéma de Yee est stable dès que l'énergie  $\mathcal{E}_\infty^{n+\frac{1}{2}}$  est positive pour tout  $n$ . Ceci est assuré par la condition de CFL de la proposition 21.*

On remarque qu'en dimension un la condition de stabilité ici prouvée revient exactement à  $\lambda \leq 1$  alors qu'en dimension supérieure, on a  $\lambda^2 \leq 1/2$ . Si on considère des pas d'espaces égaux, les conditions obtenues par les deux méthodes (analyse de stabilité linéaire classique et analyse de stabilité non linéaire par méthode d'énergie) donnent les mêmes résultats.

Pour les autres modèles, on ne peut obtenir que des estimations de  $\mathcal{E}_\infty^{n+\frac{1}{2}}$  et donc des conditions suffisantes de stabilité.

## 4.4 Analyse linéaire d'un cas de couplage

### 4.4.1 Position du modèle

Le système de Maxwell uni-dimensionnel est fermé par deux discrétisations de l'équation de Debye, à savoir

$$\begin{aligned}t_r \frac{P_\ell^{n+\frac{1}{2}} - P_\ell^{n-\frac{1}{2}}}{\delta t} &= -\frac{P_\ell^{n+\frac{1}{2}} + P_\ell^{n-\frac{1}{2}}}{2} + \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)E_\ell^n, \\ t_r J_\ell^{n+\frac{1}{2}} &= -P_\ell^{n+\frac{1}{2}} + \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \frac{E_\ell^{n+1} + E_\ell^n}{2}.\end{aligned}$$

Bien que l'on utilise  $J_\ell^{n+\frac{1}{2}}$  dans les calculs ce n'est pas une variable à part entière et ainsi le système porte sur la variable

$$U_\ell^n = {}^t(c_\infty B_{\ell+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, E_\ell^n, P_\ell^{n-\frac{1}{2}} / \varepsilon_0 \varepsilon_\infty) = {}^t(\mathcal{B}_{\ell+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{E}_\ell^n, \mathcal{P}_\ell^{n-\frac{1}{2}}).$$

et s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{\ell+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{\ell+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} &= -\lambda(\mathcal{E}_{\ell+1}^n - \mathcal{E}_\ell^n), \\ \mathcal{E}_\ell^{n+1} - \mathcal{E}_\ell^n &= -\lambda(\mathcal{B}_{\ell+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{\ell-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) + 2\delta \mathcal{P}_\ell^{n+\frac{1}{2}} - \delta\alpha(\mathcal{E}_\ell^{n+1} + \mathcal{E}_\ell^n), \\ \mathcal{P}_\ell^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{P}_\ell^{n-\frac{1}{2}} &= -\delta(\mathcal{P}_\ell^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{P}_\ell^{n-\frac{1}{2}}) + 2\delta\alpha \mathcal{E}_\ell^n,\end{aligned}$$

où, outre les notations  $\lambda$ ,  $\delta$  déjà définies, on introduit  $\alpha = \varepsilon'_s - 1$  qui est un paramètre positif (ou nul). On réécrit ce système sous forme explicite :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\ell+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathcal{B}_{\ell+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \lambda(\mathcal{E}_{\ell+1}^n - \mathcal{E}_\ell^n), \\ (1 + \delta\alpha)\mathcal{E}_\ell^{n+1} &= (1 - \delta\alpha)\mathcal{E}_\ell^n - \lambda(\mathcal{B}_{\ell+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{\ell-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}) + \lambda^2(\mathcal{E}_{\ell+1}^n - 2\mathcal{E}_\ell^n + \mathcal{E}_{\ell-1}^n) + 2\delta\frac{1-\delta}{1+\delta}\mathcal{P}_\ell^{n-\frac{1}{2}} + \frac{4\delta^2\alpha}{1+\delta}\mathcal{E}_\ell^n, \\ (1 + \delta)\mathcal{P}_\ell^{n+\frac{1}{2}} &= (1 - \delta)\mathcal{P}_\ell^{n-\frac{1}{2}} + 2\delta\alpha\mathcal{E}_\ell^n, \end{aligned}$$

d'où la matrice d'amplification

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\chi & 0 \\ \frac{\chi^*}{1+\delta\alpha} & \frac{(1+\delta)(1-\delta\alpha)+4\delta^2\alpha-(1+\delta)q}{(1+\delta)(1+\delta\alpha)} & \frac{1-\delta}{1+\delta} \frac{2\delta}{1+\delta\alpha} \\ 0 & \frac{2\delta\alpha}{1+\delta} & \frac{1-\delta}{1+\delta} \end{pmatrix}.$$

#### 4.4.2 Calcul du polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique de  $G$  vaut

$$P(Z) = \begin{vmatrix} Z - 1 & \chi & 0 \\ -\frac{\chi^*}{1+\delta\alpha} & Z - \frac{(1+\delta)(1-\delta\alpha)+4\delta^2\alpha-(1+\delta)q}{(1+\delta)(1+\delta\alpha)} & -\frac{1-\delta}{1+\delta} \frac{2\delta}{1+\delta\alpha} \\ 0 & -\frac{2\delta\alpha}{1+\delta} & Z - \frac{1-\delta}{1+\delta} \end{vmatrix}$$

Posons  $Y = Z - 1$  alors

$$\begin{aligned} (1 + \delta)^2(1 + \delta\alpha)P(Z) &= \begin{vmatrix} Y & \chi & 0 \\ -(1 + \delta)\chi^* & (1 + \delta)(1 + \delta\alpha)Y + 2\delta\alpha(1 - \delta) + (1 + \delta)q & -2\delta(1 - \delta) \\ 0 & -2\delta\alpha & (1 + \delta)Y + 2\delta \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} Y & \chi & 0 \\ -(1 + \delta)\chi^* & (1 + \delta)(1 + \delta\alpha)Y + (1 + \delta)q & (1 + \delta)(1 - \delta)Y \\ 0 & -2\delta\alpha & (1 + \delta)Y + 2\delta \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On voit que  $(1 + \delta)$  est en facteur partout, donc

$$\begin{aligned} (1 + \delta)(1 + \delta\alpha)P(Z) &= Y \begin{vmatrix} (1 + \delta\alpha)Y + q & (1 - \delta)Y \\ -2\delta\alpha & (1 + \delta)Y + 2\delta \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} 1 & -2\delta(1 - \delta) \\ 0 & (1 + \delta)Y + 2\delta \end{vmatrix} \\ &= Y \{ [(1 + \delta)(1 + \delta\alpha)]Y^2 + [2\delta(1 + \alpha) + (1 + \delta)q]Y + [2\delta q] \} \\ &\quad + q(1 + \delta) \{ [1 + \delta]Y + [2\delta] \} \\ &= [(1 + \delta)(1 + \delta\alpha)]Y^3 + [2\delta(1 + \alpha) + (1 + \delta)q]Y^2 + [(1 + 3\delta)q]Y + [2\delta q]. \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique est proportionnel à

$$\begin{aligned} \phi_0(Z) &= [(1 + \delta\alpha)(1 + \delta)]Z^3 - [3 + \delta + \delta\alpha + 3\delta^2\alpha - (1 + \delta)q]Z^2 \\ &\quad + [3 - \delta - \delta\alpha + 3\delta^2\alpha - (1 - \delta)q]Z - [(1 - \delta\alpha)(1 - \delta)]. \end{aligned}$$

#### 4.4.3 Analyse de von Neumann

La condition  $|\varphi_0(0)| < |\varphi_0^*(0)|$  est vraie sans aucune hypothèse. On définit ensuite par récurrence

$$\begin{aligned} \varphi_1(Z) &= 2\delta\{ [2(1 + \alpha)(1 + \delta^2\alpha)]Z^2 - [4(1 + \alpha)(1 + \delta^2\alpha) - (2 + \alpha + \delta^2\alpha)q]Z \\ &\quad + [2(1 + \alpha)(1 + \delta^2\alpha) - \alpha(1 - \delta^2)q] \}. \end{aligned}$$

Le cas où  $\delta^2 \geq 1$  ne peut pas permettre de remplir la condition  $|\varphi_1(0)| < |\varphi_1^*(0)|$ . On supposera donc  $\delta < 1$ , ce qui borne le pas de temps en fonction du retard  $t_r$ . Ceci est raisonnable du point de vue de la modélisation : on ne saurait bien approcher l'équation de retard avec un pas de temps trop grand. On remarque qu'une telle hypothèse n'était néanmoins pas nécessaire pour le schéma de Joseph. On voit que le cas d'égalité  $|\varphi_1(0)| = |\varphi_1^*(0)|$  est obtenu lorsque  $q = 0$  ou  $\alpha = 0$  ( $\varepsilon'_s = 1$ ). Il nous



faudra donc à nouveau traiter ces deux cas séparément.

Si  $\alpha > 0$ ,  $q > 0$  et  $\delta < 1$ , alors  $|\varphi_1(0)| < |\varphi_1^*(0)|$  équivaut à  $\alpha(1 - \delta^2)q < 4(1 + \alpha)(1 + \delta^2\alpha)$ , ce qui est clairement vérifié pour  $q \in ]0, 4[$ . Par ailleurs, le polynôme  $\varphi_1$  est de degré 2.

Dans le cas général, on calcule ensuite  $\varphi_2$  :

$$\varphi_2(Z) = 4\delta^2\alpha(1 - \delta^2)q\{[4(1 + \alpha)(1 + \delta^2\alpha) - \alpha(1 - \delta^2)q]Z - [4(1 + \alpha)(1 + \delta^2\alpha) - (2 + \alpha + \delta^2\alpha)q]\}.$$

On remarque que les quantité contenues dans les crochets sont positives pour  $q \in ]0, 4[$ . Par ailleurs,  $\alpha(1 - \delta^2) < 2 + \alpha + \delta^2$ , la racine de  $\varphi_2$  appartient donc à l'intervalle  $]0, 1[$ . Le polynôme  $\varphi_0$  est donc de Schur. Nous obtenons donc la stabilité sous les hypothèses  $\lambda < 1$  et  $\delta < 1$ , modulo le traitement des cas particuliers sus-cités.

#### 4.4.4 Cas particulier $q = 0$

Le cas où  $q = 0$  correspond au polynôme caractéristique

$$\varphi_0(Z) = (Z - 1)^2 \left( Z - \frac{(1 - \delta)(1 - \delta\alpha)}{(1 + \delta)(1 + \delta\alpha)} \right)$$

et n'est donc pas de von Neumann simple. La matrice d'amplification vaut

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1+\delta)(1-\delta\alpha)+4\delta^2\alpha}{(1+\delta)(1+\delta\alpha)} & \frac{1-\delta}{1+\delta} \frac{2\delta}{1+\delta\alpha} \\ 0 & \frac{2\delta\alpha}{1+\delta} & \frac{1-\delta}{1+\delta} \end{pmatrix}.$$

On voit clairement que les vecteurs propres correspondant à la valeur propre 1 sont dans deux sous-espaces propres stables. Les itérées de cette matrice sont donc bornées.

#### 4.4.5 Cas particulier $\varepsilon'_s = 1$

Le cas où  $\varepsilon'_s = 1$  donne lieu à une violation de la condition  $|\varphi_1(0)| < |\varphi_1^*(0)|$ . On a, comme pour le schéma de Joseph,

$$\varphi_1(Z) = 4\delta\{Z^2 - [2 - q]Z + 1\}.$$

Le polynôme  $\varphi_0$  est donc de von Neumann simple (cf. supra).

#### 4.4.6 Conclusion

Le schéma que nous avons étudié pour les équations de Maxwell–Debye uni-dimensionnelles est stable sous la condition

$$\delta t < \min\left(\frac{\delta x}{c_\infty}, 2t_r\right).$$

### 4.5 Analyse non linéaire d'un cas de couplage

#### 4.5.1 Position du problème

On reprend le même modèle que dans la section précédente, mais on peut ici sans sur-coût considérer le cas multi-dimensionnel directement.

$$\begin{aligned} t_r \frac{\mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}}{\delta t} &= -\frac{\mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}}{2} + \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\mathbf{E}^n, \\ t_r \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} &= -\mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \frac{\mathbf{E}^{n+1} + \mathbf{E}^n}{2}. \end{aligned}$$

Par ailleurs on rappelle que

$$\mathcal{E}_\infty^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_0} \|\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \|\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 - \frac{c_\infty^2 \delta t^2}{4} \frac{1}{\mu_0} \|\text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \right).$$

et

$$\mathcal{E}_\infty^{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{E}_\infty^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\delta t}{4} \left( \mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}} \right) - \frac{c_\infty^2 \delta t^2}{8} \left( \text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} + \text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}} \right).$$

### 4.5.2 Calcul de l'énergie

Les calculs déjà effectués nous suggèrent de traiter l'équation d'évolution sur  $\mathbf{P}$  de la même manière que les équations de Maxwell. On obtient immédiatement

$$\begin{aligned} t_r \frac{\mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}}{\delta t} &= -\frac{\mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}}{2} \\ &\quad + \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \left( \frac{1}{2}(\mathbf{E}^{n+1\frac{1}{2}} + \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{4}\delta t c_\infty^2 (\text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} - \text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4}\delta t c_\infty^2 \mu_0 (\mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}}) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{t_r}{\delta t} \left( \|\mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 - \|\mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}\|^2 \right) &= -\frac{1}{2} \|\mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) (\mathbf{E}^{n+1\frac{1}{2}} + \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \delta t c_\infty^2 (\text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} - \text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}) \\ &\quad + \frac{1}{4} \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \delta t c_\infty^2 \mu_0 (\mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}) \\ &= -\frac{1}{2} \|\mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) (\mathbf{E}^{n+1\frac{1}{2}} + \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \delta t c_\infty^2 (\text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} - \text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}) \\ &\quad + \frac{1}{4t_r} \varepsilon_0^2 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)^2 \delta t c_\infty^2 \mu_0 (\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}) \\ &\quad - \frac{1}{4t_r} \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \delta t c_\infty^2 \mu_0 (\|\mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 - \|\mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}\|^2). \end{aligned}$$

Pour avoir une énergie homogène, on va s'intéresser à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)} \left( 1 + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\delta t^2 c_\infty^2 \mu_0}{4t_r^2} \right) \left( \|\mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 - \|\mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}\|^2 \right) \\ = -\frac{\delta t}{4t_r \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)} \|\mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}\|^2 \\ + \frac{\delta t}{4t_r} (\mathbf{E}^{n+1\frac{1}{2}} + \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}) \\ - \frac{\delta t^2 c_\infty^2}{8t_r} (\text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} - \text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}) \\ + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\delta t^2 c_\infty^2 \mu_0}{8t_r^2} (\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} -\frac{\delta t}{4} (\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}}) &= -\frac{\delta t \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{4t_r} \|\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}\|^2 \\ &\quad + \frac{\delta t}{4t_r} (\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -\frac{c_\infty^2 \delta t^2}{8} \left( \text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} + \text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}} \right) \\ = -\frac{c_\infty^2 \delta t^2 \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{8t_r} \left( \text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} + \text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}} \right) \\ + \frac{c_\infty^2 \delta t^2}{8t_r} \left( \text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} + \text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

On définit l'énergie

$$\mathcal{E}^{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{E}_\infty^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)} \left( 1 + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\delta t^2 c_\infty^2 \mu_0}{4t_r^2} \right) \|\mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}}\|^2.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{E}^{n-\frac{1}{2}} &= -\frac{\delta t}{4t_r\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)} \|\mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}\|^2 \\ &\quad + \frac{\delta t}{4t_r} (\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}) \\ &\quad - \frac{\delta t^2 c_\infty^2}{8t_r} (\text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} - \text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}) \\ &\quad + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\delta t^2 c_\infty^2 \mu_0}{8t_r^2} (\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}) \\ &\quad - \frac{\delta t\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{4t_r} \|\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}\|^2 \\ &\quad + \frac{\delta t}{4t_r} (\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}) \\ &\quad - \frac{c_\infty^2 \delta t^2 \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{8t_r} \left( \text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} + \text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + \frac{c_\infty^2 \delta t^2}{8t_r} \left( \text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} + \text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}} \right) \\ &= -\frac{\delta t}{4t_r\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)} \|\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)(\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}) - (\mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}})\|^2 \\ &\quad + \frac{c_\infty^2 \delta t^2}{4t_r} \left( (\text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}}) - (\text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}) \right) \\ &\quad + \frac{c_\infty^2 \delta t^2 \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{8t_r} (\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}, \frac{\mu_0}{t_r} (\mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}) - (\text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} + \text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}})). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} &(\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}, \frac{\mu_0}{t_r} (\mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}) - (\text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} + \text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}})) \\ &= (\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}, \frac{\mu_0\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{t_r} (\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}) - \mu_0(\mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}}) - (\text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} + \text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}})) \\ &= \frac{\mu_0\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{t_r} \left( \|\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 - \|\mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}\|^2 \right) \\ &\quad + (\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}, \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^{n-1}}{\delta t} - 2(\text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} + \text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}})) \\ &= \frac{\mu_0\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{t_r} \left( \|\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 - \|\mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}\|^2 \right) + \frac{2}{\delta t c_\infty^2} \|\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}\|^2 \\ &\quad - 2(\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}, \text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} + \text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

et

$$\left| (\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}, \text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} + \text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}) \right| \leq \frac{1}{2\alpha} \|\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} + \text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}\|^2.$$

On choisit  $2\alpha = c_\infty^2 \delta t$  et donc  $\alpha/2 = (c_\infty^2 \delta t)/4$ . On a alors

$$\begin{aligned} &\left| (\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}, \frac{\mu_0}{t_r} (\mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}) - (\text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} + \text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}})) \right| \\ &\leq \frac{\mu_0\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{t_r} \left( \|\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 - \|\mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}\|^2 \right) + \frac{4}{\delta t c_\infty^2} \|\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}\|^2 \\ &\quad + \frac{\delta t c_\infty^2}{2} \|\text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} + \text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}\|^2. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\left| (\text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}}) - (\text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}) \right| \leq \frac{\alpha}{2} (\|\text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}\| + \|\text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}\|^2) + \frac{1}{2\alpha} (\|\mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}}\| + \|\mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}\|^2).$$

On choisit cette fois-ci  $\alpha = c_\infty^2 \delta t \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)$ , d'où

$$\begin{aligned} \left| (\text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}}) - (\text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}) \right| &\leq \frac{c_\infty^2 \delta t \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{2} (\|\text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}\| + \|\text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}\|^2) \\ &\quad + \frac{1}{2c_\infty^2 \delta t \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)} (\|\mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}}\| + \|\mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}\|^2). \end{aligned}$$

Finalement, on pose

$$\mathcal{U}^{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{E}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{c_\infty^2 \delta t^2 \mu_0 \varepsilon_0^2 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)^2}{8t_r}$$

et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{n+\frac{1}{2}} &\leq \mathcal{U}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\delta t^2 t_r}{4\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)} \|\mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\delta t \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{t_r} (\|\mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|\mathbf{J}^{n-\frac{1}{2}}\|^2) \\ &\quad + \frac{c_\infty^4 \delta t^3 \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{4t_r} (\|\text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|\text{rot } \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}\|^2) + \frac{\delta t}{8t_r \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)} (\|\mathbf{P}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|\mathbf{P}^{n-\frac{1}{2}}\|^2). \end{aligned}$$

Ceci est intéressant à condition de vérifier que  $\mathcal{U}^{n+\frac{1}{2}} \geq 0$ . Pour cela, il faut un pas de temps suffisamment petit, à savoir

$$\delta t \leq \frac{2t_r \varepsilon_\infty}{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}.$$

## 4.6 Exercices

1. Montrer que

$$\varphi_{j+1}^\varepsilon(z) = \varepsilon(2 + \varepsilon d)\varphi_j'(z).$$

2. Réciproque de la preuve pour les polynômes de von Neumann.

3. Analyse linéaire du couplage des équations de Maxwell avec le modèle de Lorentz

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}}{\delta t} &= -\text{rot } \mathbf{E}^n, \\ \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\delta t} &= \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\mathbf{P}^{n+1} - \mathbf{P}^n}{\delta t}, \\ \frac{\mathbf{P}^{n+1} - \mathbf{P}^n}{\delta t} &= \frac{\mathbf{J}^{n+1} + \mathbf{J}^n}{2}, \\ \frac{\mathbf{J}^{n+1} - \mathbf{J}^{n-1}}{\delta t} &= -\nu \frac{\mathbf{J}^{n+1} + \mathbf{J}^n}{2} + \omega_1^2 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \varepsilon_0 \frac{\mathbf{E}^{n+1} + \mathbf{E}^n}{2} - \omega_1^2 \frac{\mathbf{P}^{n+1} + \mathbf{P}^n}{2}. \end{aligned}$$

# Chapitre 5

## Solutions des exercices

### 5.1 Modèles de propagation d'ondes

#### 5.1.1 Conservation de la charge

On a d'une part

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{D}) &= \rho_{\text{libre}}, \\ \partial_t \operatorname{div}(\mathbf{D}) &= \partial_t \rho_{\text{libre}},\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\mathbf{H}) &= \mathbf{j}_{\text{libre}} + \partial_t \mathbf{D}, \\ \operatorname{div} \operatorname{rot}(\mathbf{H}) &= \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{libre}} + \operatorname{div} \partial_t \mathbf{D}.\end{aligned}$$

Comme  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$ , on obtient l'équation de conservation de la charge

$$\partial_t \rho_{\text{libre}} = -\operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{libre}}.$$

#### 5.1.2 Indice optique

Commençons par écrire les équations de Maxwell en variable  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  uniquement :

$$\begin{array}{l} \operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0, \\ \operatorname{rot}(\mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{B}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{D}) = 0, \\ \operatorname{rot}(\mathbf{H}) = \partial_t \mathbf{D}, \end{array} \left| \begin{array}{l} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{array} \right. \begin{array}{l} \operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0, \\ \operatorname{rot}(\mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{B}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{E}) = 0, \\ \operatorname{rot}(\mathbf{B}) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \partial_t \mathbf{E} = \frac{n^2}{c^2} \partial_t \mathbf{E}. \end{array}$$

Le reste des calculs est le même que dans le vide en remplaçant  $c$  par  $c/n$ . Ainsi l'équation des ondes est donc

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{n^2}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E},$$

et l'équation de Schrödinger

$$\left( \partial_z + \frac{n}{c} \partial_t - \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \right) \mathbf{A} = 0$$

avec la relation de dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2}.$$

Enfin, l'équation d'Helmholtz est inchangée :

$$\Delta \mathbf{A} = -k^2 \mathbf{A}.$$

### 5.1.3 Équations uni-dimensionnelles

Si les champs ne dépendent que de la variable d'espace  $z$ , on peut annuler les dérivées  $\partial_x$  et  $\partial_z$ . Ainsi (par exemple)

$$\text{rot } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -\partial_z E_y \\ \partial_z E_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

et les équations de Maxwell donnent

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_z B_z = 0, \\ \partial_t B_x = \partial_z E_y, \\ \partial_t B_y = -\partial_z E_x, \\ \partial_t B_z = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_z D_z = 0, \\ \partial_t D_x = -\partial_z H_y, \\ \partial_t D_y = \partial_z H_x, \\ \partial_t D_z = 0. \end{array} \right.$$

Les variables  $B_z$  et  $D_z$  ne dépend alors ni de  $z$  ni de  $t$ , ce sont des constantes. Si de plus la permittivité est un tenseur scalaire, on peut étudier séparément l'évolution de  $(B_x, H_x, E_y, D_y)$  d'une part et  $(B_y, H_y, E_x, D_x)$  d'autre part.

### 5.1.4 Équations bi-dimensionnelles

Si les champs ne dépendent que des variables d'espace  $x$  et  $y$ , on peut annuler les dérivées  $\partial_z$ . Ainsi (par exemple)

$$\text{rot } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \partial_y E_z \\ -\partial_x E_z \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x \end{pmatrix}$$

et les équations de Maxwell donnent

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x B_x + \partial_y B_y = 0, \\ \partial_t B_x = -\partial_y E_z, \\ \partial_t B_y = \partial_x E_z, \\ \partial_t B_z = -\partial_x E_y + \partial_y E_x, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_x D_x + \partial_y D_y = 0, \\ \partial_t D_x = \partial_y H_z, \\ \partial_t D_y = -\partial_x H_z, \\ \partial_t D_z = \partial_x H_y - \partial_y H_x. \end{array} \right.$$

Si de plus la permittivité est un tenseur scalaire, on peut étudier séparément l'évolution de  $(B_x, H_x, B_y, H_y, E_z, D_z)$  d'une part et  $(B_z, H_z, E_x, D_x, E_y, D_y)$  d'autre part.

### 5.1.5 Matériaux stratifiés

Dès que la constante diélectrique ne dépend pas du temps, on a

$$\partial_t^2 \mathbf{E} = -c^2 \text{rot rot } \mathbf{E}.$$

Pour que l'équation des ondes soit valide, il faut donc assurer que  $\nabla \text{div } \mathbf{E} = \nabla \text{div}(\mathbf{D}/\varepsilon_0 \varepsilon_r(z)) = 0$ . Comme  $\text{div } \mathbf{D} = 0$ , on a

$$\text{div } \mathbf{E} = -\frac{\partial_z \varepsilon_r(z)}{\varepsilon_r(z)} E_z.$$

Pour que le gradient soit nul, il faut que  $\partial_x E_z = 0$  et  $\partial_y E_z = 0$ . Il serait simple de prendre une des polarisation décrites ci-dessus avec  $\partial_z = 0$ . Sinon, il faut vérifier la relation

$$\varepsilon_r(z) \partial_z \varepsilon_r(z) \partial_z E_z(z) = \left( (\partial_z \varepsilon_r(z))^2 - \varepsilon_r(z) \partial_z^2 \varepsilon_r(z) \right) E_z(z).$$

## 5.2 Couplages avec la matière

### 5.2.1 Permittivités

Il est plus pratique d'écrire la convolution autrement, à savoir

$$\mathbf{P}(t) = \varepsilon_0 \int_0^{+\infty} E(t-\tau) \chi^{(1)}(\tau) d\tau.$$

Pour le modèle de Debye, avec  $\mathbf{E}(t) = \exp(i\omega t)$ ,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(t) &= \varepsilon_0 \int_0^{+\infty} \exp(i\omega(t-\tau)) \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{t_r} \exp(-\tau/t_r) d\tau \\
&= \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{t_r} \mathbf{E}(t) \int_0^{+\infty} \exp(-i\omega\tau - \tau/t_r) d\tau \\
&= \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{t_r} \mathbf{E}(t) \left[ \frac{\exp(-i\omega\tau - \tau/t_r)}{-i\omega - 1/t_r} \right]_0^{+\infty} \\
&= \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \frac{1}{1 + i\omega t_r} \mathbf{E}(t),
\end{aligned}$$

et

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + i\omega t_r}.$$

Pour le modèle de Lorentz,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(t) &= \varepsilon_0 \int_0^{+\infty} \exp(i\omega(t-\tau)) \frac{\omega_1^2(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{\sqrt{\omega_1^2 - \nu^2/4}} \exp(-\nu\tau/2) \times \\
&\quad \times \frac{\exp(i\sqrt{\omega_1^2 - \nu^2/4}\tau) - \exp(-i\sqrt{\omega_1^2 - \nu^2/4}\tau)}{2i} d\tau \\
&= \frac{\omega_1^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{2i \sqrt{\omega_1^2 - \nu^2/4}} \mathbf{E}(t) \left[ \frac{\exp(-i\omega\tau - \nu\tau/2 + i\sqrt{\omega_1^2 - \nu^2/4}\tau)}{-i\omega - \nu/2 + i\sqrt{\omega_1^2 - \nu^2/4}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\exp(-i\omega\tau - \nu\tau/2 - i\sqrt{\omega_1^2 - \nu^2/4}\tau)}{-i\omega - \nu/2 - i\sqrt{\omega_1^2 - \nu^2/4}} \right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{\omega_1^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{2i \sqrt{\omega_1^2 - \nu^2/4}} \mathbf{E}(t) \left( \frac{1}{i\omega + \nu/2 - i\sqrt{\omega_1^2 - \nu^2/4}} - \frac{1}{i\omega + \nu/2 + i\sqrt{\omega_1^2 - \nu^2/4}} \right),
\end{aligned}$$

à savoir

$$\mathbf{P}(t) = \frac{\omega_1^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{\omega_1^2 - i\omega\nu - \omega^2} \mathbf{E}(t)$$

et

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\omega_1^2 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{\omega_1^2 - i\omega\nu - \omega^2}.$$

### 5.2.2 Coefficient d'amortissement

Pour une onde plane l'intensité vaut

$$I = n\varepsilon_\infty c \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle_t = n\varepsilon_\infty c |\tilde{\mathbf{E}} \exp(ikz)|^2 = n\varepsilon_\infty c |\tilde{\mathbf{E}}|^2 \exp(2 \operatorname{Im}(k(\omega))z).$$

Si  $\operatorname{Im}(k(\omega)) < 0$ , il y a décroissance de l'intensité (amortissement) le long de l'axe de propagation  $z$ .

### 5.2.3 Modèle de Landau–Lifschitz : magnétisation

Il suffit de prendre le produit scalaire avec  $\mathbf{M}$ , ainsi

$$\partial_t \mathbf{M} \cdot \mathbf{M} = -\gamma \mu_0 \{ (\mathbf{M} \wedge \mathbf{H}) \cdot \mathbf{M} + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}|} (\mathbf{M} \wedge (\mathbf{M} \wedge \mathbf{H})) \cdot \mathbf{M} \}.$$

On a des produits mixtes contenant deux fois  $\mathbf{M}$ , ils sont donc nuls. Ainsi  $\partial_t \mathbf{M} \cdot \mathbf{M} = 0$ ,  $|\mathbf{M}|^2$  ainsi que  $|\mathbf{M}|$  sont des constantes.

### 5.2.4 Modèle de Landau–Lifschitz : modèle

Il suffit de faire le calcul

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{M} - \frac{\alpha}{|\mathbf{M}|} \mathbf{M} \wedge \partial_t \mathbf{M} &= -\gamma \mu_0 \left\{ \mathbf{M} \wedge \mathbf{H} + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}|} \mathbf{M} \wedge (\mathbf{M} \wedge \mathbf{H}) \right\} \\ &\quad + \frac{\gamma \mu_0 \alpha}{|\mathbf{M}|} \left\{ \mathbf{M} \wedge (\mathbf{M} \wedge \mathbf{H}) + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}|} \mathbf{M} \wedge (\mathbf{M} \wedge (\mathbf{M} \wedge \mathbf{H})) \right\}. \end{aligned}$$

Les deux termes du milieu s'annulent. Par ailleurs

$$\mathbf{M} \wedge (\mathbf{M} \wedge (\mathbf{M} \wedge \mathbf{H})) = -|\mathbf{M}|^2 (\mathbf{M} \wedge \mathbf{H}),$$

d'où

$$\partial_t \mathbf{M} - \frac{\alpha}{|\mathbf{M}|} \mathbf{M} \wedge \partial_t \mathbf{M} + \gamma \mu_0 (1 + \alpha^2) \mathbf{M} \wedge \mathbf{H} = 0.$$

## 5.3 Analyse mathématique

### 5.3.1 Cas d'un opérateur en temps

### 5.3.2 Modèle de Lorentz

Le modèle de Maxwell–Lorentz s'écrit

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{B} &= -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \\ \partial_t \mathbf{D} &= \operatorname{rot} \mathbf{B} / \mu_0, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \mathbf{E} + \mathbf{P}, \\ \partial_t^2 \mathbf{P} + \nu \partial_t \mathbf{P} + \omega_1^2 \mathbf{P} &= \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \omega_1^2 \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Pour pouvoir étudier le problème de Cauchy, il faut mettre ce système sous la forme d'un système du premier ordre et donc introduire la nouvelle variable  $\mathbf{J} = \partial_t \mathbf{P}$ , ainsi :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{B} &= -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \\ \partial_t \mathbf{E} &= c_\infty^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_\infty} \mathbf{J}, \\ \partial_t \mathbf{P} &= \mathbf{J}, \\ \partial_t \mathbf{J} &= -\nu \mathbf{J} - \omega_1^2 \mathbf{P} + \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \omega_1^2 \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Prenons la variable  $(c_\infty \mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{P} / \varepsilon_0 \varepsilon_\infty, \mathbf{J} / \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \omega_1)$ , le système se réécrit

$$\begin{aligned} \partial_t \begin{pmatrix} c_\infty \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{P} / \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \\ \mathbf{J} / \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \omega_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -c_\infty & 0 & 0 \\ c_\infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \operatorname{rot} \begin{pmatrix} c_\infty \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{P} / \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \\ \mathbf{J} / \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \omega_1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_1 \\ 0 & (\varepsilon'_s - 1) \omega_1 & -\omega_1 & -\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\infty \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{P} / \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \\ \mathbf{J} / \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \omega_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 5.3.3 Estimation *a priori*

Comme dans le cas général, on déduit des équations d'Ampère et de Faraday :

$$\frac{1}{2} \partial_t |c_\infty \mathbf{B}|^2 + \frac{1}{2} \partial_t |\mathbf{E}|^2 = c_\infty^2 (-\operatorname{rot}(\mathbf{E}) \cdot \mathbf{B} + \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_\infty} \partial_t \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}$$

Or d'après l'équation de Lorentz

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} &= \partial_t \mathbf{P} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)} (\partial_t^2 \mathbf{P} + \nu \partial_t \mathbf{P} + \omega_1^2 \mathbf{P}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)} \partial_t (|\partial_t \mathbf{P}|^2 + \omega_1^2 |\mathbf{P}|^2) + \frac{1}{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)} \nu |\partial_t \mathbf{P}|^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)} \partial_t (|\mathbf{J}|^2 + \omega_1^2 |\mathbf{P}|^2) + \frac{1}{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)} \nu |\mathbf{J}|^2. \end{aligned}$$



On a donc le résultat voulu avec

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left( |c_\infty \mathbf{B}|^2 + |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{\varepsilon_0^2 \varepsilon_\infty (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)} (|\mathbf{J}|^2 + \omega_1^2 |\mathbf{P}|^2) \right) dx$$

et

$$K = \frac{\nu}{\varepsilon_0^2 \varepsilon_\infty (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}.$$

## 5.4 Schémas aux différences finies

### 5.4.1 Le lemme

Pour démontrer le lemme, on utilise l'additivité de la transformation \* lorsque les deux polynômes sont de même degré.

$$\begin{aligned} \varphi_j(z) &= \prod_{\nu=1}^d (z - \alpha_\nu), \\ \varphi_j'(z) &= \sum_{\nu=1}^d \prod_{\mu \neq \nu} (z - \alpha_\mu), \\ \varphi_j^\varepsilon(z) &= \varphi_j(z) + \varepsilon z \varphi_j'(z), \\ \varphi_j^\varepsilon(0) &= \prod_{\nu=1}^d (-\alpha_\nu), \\ \varphi_j^{\varepsilon*}(z) &= \prod_{\nu=1}^d (-\bar{\alpha}_\nu z + 1) + \varepsilon \sum_{\nu=1}^d \prod_{\mu \neq \nu} (-\bar{\alpha}_\mu z + 1) \\ &= \prod_{\nu=1}^d (-\bar{\alpha}_\nu) \left( \prod_{\nu=1}^d (z - \alpha_\nu) + \varepsilon \sum_{\nu=1}^d -\alpha_\nu \prod_{\mu \neq \nu} (z - \alpha_\mu) \right) \\ &= \prod_{\nu=1}^d (-\bar{\alpha}_\nu) \left( (1 + \varepsilon d) \prod_{\nu=1}^d (z - \alpha_\nu) - \varepsilon z \sum_{\nu=1}^d \prod_{\mu \neq \nu} (z - \alpha_\mu) \right) \\ &= \prod_{\nu=1}^d (-\bar{\alpha}_\nu) ((1 + \varepsilon d) \varphi_j(z) - z \varepsilon \varphi_j'(z)), \\ \varphi_j^{\varepsilon*}(0) &= 1 + \varepsilon d, \\ \varphi_{j+1}^\varepsilon(z) &= \frac{\varphi_j^{\varepsilon*}(0) \varphi_j^\varepsilon(z) - \varphi_j^\varepsilon(0) \varphi_j^{\varepsilon*}(z)}{z} \\ &= \frac{1}{z} ((1 + \varepsilon d)(\varphi_j(z) + \varepsilon z \varphi_j'(z)) - (1 + \varepsilon d) \varphi_j(z) + \varepsilon z \varphi_j'(z)) \\ &= (2 + \varepsilon d) \varphi_j'(z). \end{aligned}$$

### 5.4.2 Réciproque pour les polynômes de von Neumann

#### 5.4.3 Modèle de Kashiwa et al.

Le modèle de Kashiwa et al. s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} (B_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}) &= -\frac{1}{\delta x} (E_{j+1}^n - E_j^n), \\ \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\infty}{\delta t} (E_j^{n+1} - E_j^n) &= -\frac{1}{\mu_0 \delta x} (B_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{1}{\delta t} (P_j^{n+1} - P_j^n), \\ \frac{1}{\delta t} (P_j^{n+1} - P_j^n) &= \frac{1}{2} (J_j^{n+1} + J_j^n), \\ \frac{1}{\delta t} (J_j^{n+1} - J_j^n) &= -\frac{\nu}{2} (J_j^{n+1} + J_j^n) + \frac{\omega_1^2 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \varepsilon_0}{2} (E_j^{n+1} + E_j^n) - \frac{\omega_1^2}{2} (P_j^{n+1} + P_j^n). \end{aligned}$$

Ce système porte sur la variable

$$U_j^n = {}^t(c_\infty B_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, E_j^n, P_j^n / \varepsilon_0 \varepsilon_\infty, \delta t J_j^n / \varepsilon_0 \varepsilon_\infty) = {}^t(\mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{E}_j^n, \mathcal{P}_j^n, \mathcal{J}_j^n)$$

et s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \lambda(\mathcal{E}_{j+1}^n - \mathcal{E}_j^n), \\ [1 + \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]\mathcal{E}_j^{n+1} &= [1 + \delta - \frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 2)]\mathcal{E}_j^n + \lambda^2(1 + \delta + \frac{1}{2}\omega)(\mathcal{E}_{j+1}^n - 2\mathcal{E}_j^n + \mathcal{E}_{j-1}^n) \\ &\quad - \lambda(1 + \delta + \frac{1}{2}\omega)(\mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}) + \omega\mathcal{P}_j^n - \mathcal{J}_j^n, \\ [1 + \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]\mathcal{P}_j^{n+1} &= [1 + \delta + \frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 2)]\mathcal{P}_j^n - \frac{1}{2}\lambda\omega(\varepsilon'_s - 1)(\mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}) \\ &\quad + \omega(\varepsilon'_s - 1)\mathcal{E}_j^n + \frac{1}{2}\lambda^2\omega(\varepsilon'_s - 1)(\mathcal{E}_{j+1}^n - 2\mathcal{E}_j^n + \mathcal{E}_{j-1}^n) + \mathcal{J}_j^n, \\ [1 + \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]\mathcal{J}_j^{n+1} &= [1 - \delta - \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]\mathcal{J}_j^n - \lambda\omega(\varepsilon'_s - 1)(\mathcal{B}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \mathcal{B}_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}) \\ &\quad + 2\omega(\varepsilon'_s - 1)\mathcal{E}_j^n + \lambda^2\omega(\varepsilon'_s - 1)(\mathcal{E}_{j+1}^n - 2\mathcal{E}_j^n + \mathcal{E}_{j-1}^n) - 2\omega\mathcal{P}_j^n, \end{aligned}$$

d'où la matrice d'amplification

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\chi & 0 & 0 \\ \frac{\chi^*(D-\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s-1))}{D} & \frac{(1-q)D-(2-q)\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s-1)}{D} & \frac{\omega}{D} & \frac{-1}{D} \\ \frac{\chi^*\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s-1)}{D} & \frac{(2-q)\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s-1)}{D} & \frac{D-\omega}{D} & \frac{1}{D} \\ \frac{\chi^*\omega(\varepsilon'_s-1)}{D} & \frac{(2-q)\omega(\varepsilon'_s-1)}{D} & \frac{-2\omega}{D} & \frac{2-D}{D} \end{pmatrix}$$

où, en plus des notations précédentes,  $D = 1 + \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s$ .

### Calcul du polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique de  $G$  vaut

$$P(Z) = \begin{vmatrix} Z-1 & \chi & 0 & 0 \\ -\chi^*(D-\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s-1)) & (1-q)D-(2-q)\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s-1) & -\frac{\omega}{D} & \frac{1}{D} \\ -\chi^*\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s-1) & -(2-q)\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s-1) & Z-\frac{D-\omega}{D} & \frac{-1}{D} \\ -\chi^*\omega(\varepsilon'_s-1) & -(2-q)\omega(\varepsilon'_s-1) & \frac{2\omega}{D} & Z-\frac{2-D}{D} \end{vmatrix}.$$

Ainsi, en posant  $X = D(Z-1)$

$$\begin{aligned} D^4P(Z) &= \begin{vmatrix} X & D\chi & 0 & 0 \\ -\chi^*(D-\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s-1)) & X+qD+(2-q)\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s-1) & -\omega & 1 \\ -\chi^*\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s-1) & -(2-q)\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s-1) & X+\omega & -1 \\ -\chi^*\omega(\varepsilon'_s-1) & -(2-q)\omega(\varepsilon'_s-1) & 2\omega & X+2(D-1) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} X & D\chi & 0 & 0 \\ -\chi^*D & X+qD & X & 0 \\ -\chi^*\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s-1) & -(2-q)\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s-1) & X+\omega & -1 \\ 0 & 0 & -2X & X+2D \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= X \begin{vmatrix} X + qD & X & 0 \\ -(2-q)\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1) & X + \omega & -1 \\ 0 & -2X & X + 2D \end{vmatrix} \\
&+ qD \begin{vmatrix} D & X & 0 \\ \frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1) & X + \omega & -1 \\ 0 & -2X & X + 2D \end{vmatrix} \\
&= X\{(X + qD)(X + \omega)(X + 2D) \\
&\quad + (2-q)\frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1)X(X + 2D) - 2X(X + qD)\} \\
&\quad + qD\{D(X + \omega)(X + 2D) - 2DX - \frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1)X(X + 2D)\} \\
&= X^4 + [2D - 2 + \omega\varepsilon'_s + q(D - \frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 1))]X^3 \\
&\quad + D[2\omega\varepsilon'_s + q(3D - 2 + \frac{5}{2}\omega - \frac{3}{2}\omega\varepsilon'_s)]X^2 \\
&\quad + D^2[q(2D - 2 + 4\omega - \omega\varepsilon'_s)]X + D^3[2\omega q] \\
&= X^4 + [2(\delta + \omega\varepsilon'_s) + q(1 + \delta + \frac{1}{2}\omega)]X^3 + D[2\omega\varepsilon'_s + q(1 + 3\delta + \frac{5}{2}\omega)]X^2 \\
&\quad + D^2[q(2\delta + 4\omega)]X + D^3[2\omega q].
\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique est proportionnel à

$$\begin{aligned}
\phi_0(Z) &= [1 + \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]Z^4 - [4 + 2\delta - q(1 + \delta + \frac{1}{2}\omega)]Z^3 \\
&\quad + [6 - \omega\varepsilon'_s + q(\omega - 2)]Z^2 - [4 - 2\delta - q(1 - \delta + \frac{1}{2}\omega)]Z \\
&\quad + [1 - \delta + \frac{1}{2}\omega(\varepsilon'_s - 2)].
\end{aligned}$$

### Analyse de von Neumann

On calcule successivement

$$\begin{aligned}
\varphi_1(Z) &= 2\delta\{[2 + \omega\varepsilon'_s]Z^3 - [6 + \omega\varepsilon'_s - (2 + \omega\varepsilon'_s)q]Z^2 + [6 - \omega\varepsilon'_s - (2 - \omega)q]Z - [2 - \omega\varepsilon'_s]\}, \\
\varphi_2(Z) &= 8\delta^2\omega\{[4\varepsilon'_s]Z^2 - [8\varepsilon'_s - (\varepsilon'_s - 1)q]Z + [4\varepsilon'_s - (\varepsilon'_s - 1)q]\}, \\
\varphi_3(Z) &= 64\delta^4\omega^2(\varepsilon'_s - 1)q(8\varepsilon'_s - (\varepsilon'_s - 1)q)\{Z - 1\}.
\end{aligned}$$

La racine de  $\varphi_3$  est 1 et on a donc un polynôme de von Neumann *modulo* la vérification de conditions supplémentaires et le traitement à part des cas particuliers  $q = 0$  et  $\varepsilon'_s = 1$ .

Il est clair que  $|\varphi_0(0)| < |\varphi_0^*(0)|$ ,  $|\varphi_1(0)| < |\varphi_1^*(0)|$  et que pour  $q \in ]0, 4[$ ,  $|\varphi_2(0)| < |\varphi_2^*(0)|$ .

### Cas particulier $q = 0$

Le cas  $q = 0$  donne à nouveau lieu à une étude séparée. On a alors

$$\varphi_0(Z) = (Z - 1)^2[(Z - 1)^2 + \delta(Z^2 - 1) + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s(Z + 1)^2].$$

La matrice d'amplification correspondante est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D - \omega(\varepsilon'_s - 1)}{D} & \frac{\omega}{D} & \frac{-1}{D} \\ 0 & \frac{\omega(\varepsilon'_s - 1)}{D} & \frac{D - \omega}{D} & \frac{1}{D} \\ 0 & \frac{2\omega(\varepsilon'_s - 1)}{D} & \frac{-2\omega}{D} & \frac{2 - D}{D} \end{pmatrix}.$$

A nouveau 1 est valeur propre double mais dans deux sous-espaces stables. Il suffit de vérifier que le reste du polynôme caractéristique, à savoir

$$\psi_0(Z) = [1 + \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s]Z^2 - [2 - \omega\varepsilon'_s]Z + [1 - \delta + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s],$$

est de Schur (ou de von Neumann simple). On a bien  $|\psi_0(0)| < |\psi_0^*(0)|$  et on calcule

$$\psi_1(Z) = 4\delta\left\{ \left[1 + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s\right]Z - \left[1 - \frac{1}{2}\omega\varepsilon'_s\right] \right\}.$$

Les deux valeurs propres restantes sont donc de module strictement inférieur à 1 et les itérées de la matrice d'amplification sont bornées.

### Cas particulier $\varepsilon'_s = 1$

Si  $\varepsilon'_s = 1$ , le polynôme  $\varphi_3$  est identiquement nul et

$$\varphi_2(Z) = 32\delta^2\omega\{Z^2 - 2Z + 1\}.$$

Il y a donc *a priori* un problème. La matrice d'amplification vaut

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\chi & 0 & 0 \\ \chi^* & 1 - q & \frac{\omega}{D} & \frac{-1}{D} \\ 0 & 0 & \frac{D-\omega}{D} & \frac{1}{D} \\ 0 & 0 & \frac{-2\omega}{D} & \frac{2-D}{D} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice s'écrit sous la forme par bloc de taille  $2 \times 2$

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

dont la nième itérée est

$$G^n = \begin{pmatrix} A^n & \sum_{k=0}^{n-1} A^k C^{n-1-k} B \\ 0 & C^n \end{pmatrix}$$

Dans cette configuration le sous-vecteur  $(\mathcal{P}_j^n, \mathcal{J}_j^n)$  évolue indépendamment du reste. On associe à la matrice  $C$  le polynôme caractéristique

$$\psi_0(Z) = \left[1 + \delta + \frac{1}{2}\omega\right]Z^2 - [2 - \omega]Z + [1 - \delta + \frac{1}{2}\omega],$$

qui est bien de Schur. Le sous-vecteur  $(\mathcal{P}_j^n, \mathcal{J}_j^n)$  reste donc borné. On associe à la matrice  $A$  le polynôme

$$\psi_0(Z) = Z^2 - [2 - q]Z + 1,$$

qui admet deux racines complexes conjuguées de module 1. Grâce à la décroissance de  $C^n$ , on peut alors assurer que  $\sum_{k=0}^{n-1} A^k C^{n-1-k} B$  reste aussi borné. On a donc bien stabilité.

### Conclusion

Le schéma de Kashiwa et al. pour les équations de Maxwell–Lorentz uni-dimensionnel est stable sous la condition

$$\sqrt{2}c_\infty\delta t < \delta x.$$

# Bibliographie

- [1] R.W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Academic Press, 1992.
- [2] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, 1987.
- [3] T. Cazenave and A. Haraux. *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*. Ellipses, 1990.
- [4] P. Huynh. *Étude théorique et numérique de modèles de Kerr*. PhD thesis, Université Bordeaux I, September 1999.
- [5] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Number 44 in Applied Mathematical Sciences. Springer, 1983.
- [6] J.C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Wadworth & Brooks/Cole, 1989.
- [7] A. Taflové and S.C. Hagness. *Computational Electrodynamics : The Finite-Difference Time-Domain Method*. Artech House, 2000.
- [8] K.S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14(3) :302–307, 1966.