M2R MA : Des modèles quantiques à la matière condensée, Partie I

Examen — 1ère session 2010–2011

corrigé

Spectre du laplacien

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Im}(V)$. Il existe un x_λ tel que $V(x_\lambda) = \lambda$. On construit la même suite ψ_n que pour calculer le spectre de l'opérateur de position, mais en la centrant en x_λ : $\psi_n = n^{1/2}\phi(n(x - x_\lambda))$. On a alors
$$\|(V(x) - \lambda)\psi_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |V(x) - \lambda|^2 n|\phi(n(x - x_\lambda)|^2 dx = \int_{[-1,1]} |V(\frac{y}{n} + x_\lambda) - \lambda|^2 |\phi(y)|^2 dy \to 0,$$
par continuité de V au point x_λ. Tout élément de $\mathrm{Im}(V)$ est donc dans le spectre. On a vu que l'adhérence du spectre était dans le spectre essentiel. Ainsi, on a $\overline{\mathrm{Im}(V)} \subset \sigma(V))$.
2. Comme V est continue, on peut affirmer que $\overline{\mathrm{Im}(V)}$ est un intervalle. Supposons maintenant que $\lambda \notin \overline{\mathrm{Im}(V)}$ et par exemple $\lambda < \inf \mathrm{Im}(V)$. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $V(x) - \lambda \geq \alpha > 0$. Pour toute suite ψ_n de norme 1, on peut écrire
$$\langle (V(x) - \lambda)\psi_n, \psi_n \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} (V(x) - \lambda)|\psi_n(x)|^2 dx \geq \alpha \int_{\mathbb{R}^d} |\psi_n(x)|^2 dx = \alpha,$$
et qui n'a donc aucune chance de tendre vers 0. λ n'appartient donc pas au spectre de V. On peut raisonner de même pour $\lambda > \sup \mathrm{Im}(V)$. Ainsi on a exactement $\sigma(V) = \overline{\mathrm{Im}(V)}$.
3. Pour calculer le spectre de $-\Delta$, on remarque que dans le domaine fréquentiel, il s'agit de l'opérateur de multiplication par $|k|^2$. Dans ce domaine fréquentiel, le spectre de $V(k) = |k|^2$ est égal à $\overline{\mathrm{Im}(V)} = [0, +\infty[$. C'est donc également le spectre de $-\Delta$.
4. Question subsidiaire.
Il s'agit de reproduire la question 1 mais de manière un peu plus technique. Soit ϕ une fonction de $L^2(\mathbb{R}^d)$ de norme 1 et de support compact inclus dans $[-1,1]^d$. On construit la suite $\psi_n = n^{d/2}\phi(x - x_\lambda)$, qui est aussi dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et de norme 1, mais dont le support est $x_\lambda + [-1/n, 1/n]^d$. On a
$$\|(V(x) - \lambda)\psi_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |V(x) - \lambda|^2 n^d |\phi(n(x - x_\lambda)|^2 dx = \int_{[-1,1]^d} |V(\frac{y}{n} + x_\lambda) - \lambda|^2 |\phi(y)|^2 dy \to 0.$$
La fin du raisonnement est identique à celui du point 1.

Démonstration et corollaire du théorème 2

1. Pour tout $\psi \in \mathrm{D}(A)$, en utilisant le caractère auto-adjoint, on peut calculer
$$\|(A - z\mathbb{1})\psi\|^2 = \langle (A - z\mathbb{1})\psi, (A - z\mathbb{1})\psi \rangle = \|A\psi\|^2 - 2\Re(z)\langle \psi, A\psi \rangle + |z|^2\|\psi\|^2.$$
En particulier
$$\|(A - z\mathbb{1})\psi\|^2 \geq \|A\psi\|^2 - 2|\Re(z)|\|\psi\|\|A\psi\| + |z|^2\|\psi\|^2 = (\|A\psi\| - |\Re(z)|\|\psi\|)^2 + |\Im(z)|^2\|\psi\|^2$$
et donc on a la relation de coercivité $\|(A - z\mathbb{1})\psi\| \geq |\Im(z)|\|\psi\|$.

2. Ceci montre que $A - z\mathbb{1}$ admet un inverse qui va de $\mathrm{Im}(A - z\mathbb{1})$ dans $\mathcal{H}$, et qui satisfait, pour tout $\phi \in \mathrm{Im}(A - z\mathbb{1})$,
$$\|(A - z\mathbb{1})^{-1}\phi\| \leq |\Im(z)|^{-1}\|\phi\|.$$
(Il reste à étendre cette propriété sur tout $\mathcal{H}$.)

3. Si $\phi \in \mathrm{D}(A - z\mathbb{1})^{\perp}$, alors, pour tout $\psi \in \mathrm{D}(A)$, $\langle \phi, (A - z\mathbb{1})\psi \rangle = 0$. Alors, par définition, $\phi \in \mathrm{D}(A^*) = \mathrm{D}(A)$ et donc, pour tout $\psi \in \mathrm{D}(A)$,

$$0 = \langle \phi, (A - z\mathbb{1})\psi \rangle = \langle (A - \bar{z}\mathbb{1})\phi, \psi \rangle.$$

4. Comme $\mathrm{D}(A)$ est dense dans $\mathcal{H}$, ceci implique que $(A - \bar{z}\mathbb{1})\phi = 0$ et donc $\phi = 0$ d'après la relation de coercivité.
5. Ceci implique que $\mathrm{D}(A - z\mathbb{1})$ est dense dans $\mathcal{H}$ et donc l'opérateur borné $(A - z\mathbb{1})^{-1}$ peut être étendu à l'espace tout entier avec la même estimation.
6. On peut cette fois-ci écrire, pour $\psi \in \mathrm{D}(A)$,

$$\|(A - z\mathbb{1})\psi\|^2 = \|A\psi\|^2 - 2z\langle \psi, A\psi \rangle + z^2\|\psi\|^2.$$

D'une part $\langle \psi, A\psi \rangle \leq \|\psi\|\|A\psi|$, donc

$$\|(A - z\mathbb{1})\psi\|^2 \geq (\|A\psi\| - z\|\psi\|)^2.$$

Comme $z < \inf(E)$, il existe $\alpha > 0$ tel que $z + \alpha < \inf(E)$ et

$$\|\psi\|\|A\psi\| \geq |\langle \psi, A\psi \rangle| \geq (z + \alpha)\|\psi\|^2,$$

d'où $\|A\psi\| \geq (z + \alpha)\|\psi\|$ et $\|A\psi\| - z\|\psi\| \geq \alpha\|\psi\|$. Ainsi

$$\|(A - z\mathbb{1})\psi\|^2 \geq \alpha^2\|\psi\|^2$$

et $(A - z\mathbb{1})$ est inversible d'inverse borné, ce qui implique que $z \notin \sigma(A)$.