M2R MA : Résolution numérique des EDP 2

Examen — 1ère session 2006–2007

corrigé

Exercice 1 : splitting à trois opérateurs

1. On propose la méthode
$$\mathcal{L}_1(t) \equiv \exp(tA)\exp(tB)\exp(tC),$$
pour laquelle, on a d'après les résultats obtenus pour les méthodes de Lie à deux opérateurs
$$\begin{aligned}
&\exp(tA)\exp(tB)\exp(tC) - \exp(t(A+B+C)) \\
&\qquad = \exp(tA)\exp(tB)\exp(tC) - \exp(tA)\exp(t(B+C)) \\
&\qquad + \exp(tA)\exp(t(B+C)) - \exp(t(A+B+C)) \\
&\qquad = \exp(tA)\left(\frac{t^2}{2}[B,C] + O(t^3)\right) + \frac{t^2}{2}[A, B+C] + O(t^3).
\end{aligned}$$
Or $\exp(tA) = \mathrm{Id} + O(t)$ et le commutateur est bilinéaire, ainsi
$$\exp(tA)\exp(tB)\exp(tC) - \exp(t(A+B+C)) = \frac{t^2}{2}([A,B] + [A,C] + [B,C]) + O(t^3).$$

2. On propose cette fois-ci
$$\mathcal{S}_1(t) \equiv \exp(tA/2)\exp(tB/2)\exp(tC)\exp(tB/2)\exp(tA/2).$$
On peut écrire
$$\begin{aligned}
&\exp(tA/2)\exp(tB/2)\exp(tC)\exp(tB/2)\exp(tA/2) - \exp(t(A+B+C)) \\
&\qquad = \exp(tA/2)[\exp(tB/2)\exp(tC)\exp(tB/2) - \exp(t(B+C))]\exp(tA/2) \\
&\qquad + \exp(tA/2)\exp(t(B+C))\exp(tA/2) - \exp(t(A+B+C)) \\
&\qquad = \exp(tA/2)O(t^2)\exp(tA/2) + O(t^2) \\
&\qquad = O(t^2)
\end{aligned}$$
d'après les résultats obtenus pour les méthodes de Strang à deux opérateurs.

3. On peut utiliser la méthode très générale de l'extrapolation de Richardson qui permet de construire une méthode d'ordre 3 à partir d'une méthode quelconque d'ordre 2. On propose donc
$$\mathcal{R}(t) \equiv \frac{4}{3}\mathcal{S}_1(t/2)\mathcal{S}_1(t/2) - \frac{1}{3}\mathcal{S}_1(t),$$
avec la définition ci-dessus de $\mathcal{S}_1$.

Exercice 2 : équations linéaires non autonomes

1. La solution exacte est $x(t) = \exp(\int_0^t a(s)ds)x(0)$.
2. La solution de l'équation approchée peut s'écrire $x(t) = \exp(\int_0^t a(0)ds)x(0)$. Grâce à un développement de Taylor avec reste intégral et à Fubini, on peut écrire
$$\begin{aligned}
a(s) &= a(0) + \int_0^s \dot{a}(\tau)d\tau, \\
\int_0^t a(s)ds &= \int_0^t a(0)ds + \int_0^t\int_0^s \dot{a}(\tau)d\tau ds = \int_0^t a(0)ds + \int_0^t (t-\tau)\dot{a}(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Soit $M = \sup(\dot{a})$. Alors la fonction exponentielle est localement lipschitzienne et

$$\begin{aligned} \| \exp(\int_0^t a(s)ds) - \exp(\int_0^t a(0)ds)\|_{L^\infty} &\leq \exp(Mt)\| \int_0^t a(s)ds - \int_0^t a(0)ds\|_{L^\infty} \\ &\leq \exp(Mt)\| \int_0^t (t-\tau)\dot{a}(\tau)d\tau\|_{L^\infty} \leq \exp(Mt)\frac{t^2}{2}M. \end{aligned}$$

L'erreur locale est d'ordre 2 pour tout $0 \leq t \leq t_0$, t_0 étant quelconque.

3. Comme on n'espère pas avoir un ordre local supérieur à 2, il suffit de remarquer que la différence avec la solution de la question précédente est en $O(t^2)$ (résultat du cours dans le cas autonome). L'erreur locale totale est à nouveau d'ordre 2.

Problème : équation de réaction–diffusion

1. On utilise la définition de la convolution et le fait que $\|E(\cdot,t)\|_{L^1} = 1$ pour tout t :

$$\|\mathcal{X}(t)w\|_{L^\infty} = \|E(\cdot,t) \star w\|_{L^\infty} \leq \|E(\cdot,t)\|_{L^1}\|w\|_{L^\infty} = \|u_0\|_{L^\infty}.$$

2. On utilise l'équation de diffusion et les propriétés de distribution des dérivées dans une convolution

$$\mathcal{X}(t)w - w = \int_0^t \dot{\mathcal{X}}(s)wds = \int_0^t \partial_t(E(\cdot,s)\star w)ds = \int_0^t \partial_x^2(E(\cdot,s)\star w)ds = \int_0^t \partial_x E(\cdot,s)\star\partial_x w ds.$$

On a ainsi $\|\mathcal{X}(t)w - w\|_{L^\infty} \leq \| \int_0^t \partial_x E(\cdot,s)ds\|_{L^1}\|\partial_x w\|_{L^\infty}$. On calcule donc

$$\begin{aligned} \partial_x E(\cdot,s) &= -\frac{2x}{4s}\frac{1}{\sqrt{4\pi s}}\exp(-\frac{x^2}{4s}), \\ \|\partial_x E(\cdot,s)\|_{L^1} &= \frac{2}{\sqrt{4\pi s}}\int_0^\infty \exp(-y)dy = \frac{2}{\sqrt{4\pi s}}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\|\mathcal{X}(t)w - w\|_{L^\infty} \leq \int_0^t \frac{2}{\sqrt{4\pi s}}ds\|\partial_x w\|_{L^\infty} = C\sqrt{t}\|\partial_x w\|_{L^\infty}.$$

3. On utilise la formulation intégrale de $\mathcal{Y}(t)$ que l'on dérive en espace

$$\begin{aligned} \partial_x\mathcal{Y}(t)w &= \partial_x w + \int_0^t f'(\mathcal{Y}(\tau)w)\partial_x(\mathcal{Y}(\tau)w)\ d\tau, \\ \|\partial_x\mathcal{Y}(t)w\|_{L^\infty} &\leq \|\partial_x w\|_{L^\infty} + M'\int_0^t \|\partial_x(\mathcal{Y}(\tau)w)\|_{L^\infty}d\tau. \end{aligned}$$

On utilise ensuite le lemme de Gronwall classique pour obtenir

$$\|\partial_x\mathcal{Y}(t)w\|_{L^\infty} \leq \exp(M't)\|\partial_x w\|_{L^\infty}.$$

4. On utilise la formulation intégrale de $\mathcal{Y}(t)$ qui est la même que dans le cours. On a

$$\mathcal{L}(t)w = \mathcal{X}(t)w + \int_0^t \mathcal{X}(t)f(\mathcal{Y}(\tau)w)\ d\tau.$$

La différence de deux solutions est donnée par

$$\mathcal{L}(t)w_1 - \mathcal{L}(t)w_2 = \mathcal{X}(t)(w_1 - w_2) + \int_0^t \mathcal{X}(t)(f(\mathcal{Y}(\tau)w_1) - f(\mathcal{Y}(\tau)w_2)d\tau.$$

D'après le résultat de la question 1.,

$$\|\mathcal{L}(t)w_1 - \mathcal{L}(t)w_2\|_{L^\infty} \leq \|w_1 - w_2\|_{L^\infty} + \int_0^t \|f(\mathcal{Y}(\tau)w_1) - f(\mathcal{Y}(\tau)w_2)\|_{L^\infty} d\tau.$$

On utilise ensuite comme dans le cours le fait que f est lipschitzienne,

$$\|\mathcal{L}(t)w_1 - \mathcal{L}(t)w_2\|_{L^\infty} \leq \|w_1 - w_2\|_{L^\infty} + M' \int_0^t \|\mathcal{Y}(\tau)w_1 - \mathcal{Y}(\tau)w_2\|_{L^\infty} d\tau.$$

L'estimation sur (Y4) du cours est clairement également valable si on considère la norme L^∞ : il existe une constante C qui dépend uniquement de f telle que pour tout $0 \leq t \leq 1$

$$\|\mathcal{L}(t)w_1 - \mathcal{L}(t)w_2\|_{L^\infty} \leq \|w_1 - w_2\|_{L^\infty} + M' \int_0^t (1 + Ct)\|w_1 - w_2\|_{L^\infty} d\tau,$$

et on finit par une majoration brutale de l'intégrale en temps pour obtenir

$$\|\mathcal{L}(t)w_1 - \mathcal{L}(t)w_2\|_{L^\infty} \leq (1 + Ct)\|w_1 - w_2\|_{L^\infty}.$$

5. On majore brutalement chaque partie de la différence. On utilise la question 1. et la majoration L^∞ de $\mathcal{Y}(t)$ du cours

$$\|f(\mathcal{X}(t)\mathcal{Y}(t)w)\|_{L^\infty} \leq M\|\mathcal{X}(t)\mathcal{Y}(t)w\|_{L^\infty} \leq M\|\mathcal{Y}(t)w\|_{L^\infty} \leq M \exp(M't)\|w\|_{L^\infty},$$
$$\|\mathcal{X}(t)f(\mathcal{Y}(t)w)\|_{L^\infty} \leq \|f(\mathcal{Y}(t)w)\|_{L^\infty} \leq M\|\mathcal{Y}(t)w\|_{L^\infty} \leq M \exp(M't)\|w\|_{L^\infty}.$$

6. On additionne et on soustrait la quantité $f(\mathcal{Y}(t)w)$ pour obtenir

$$g(t) = f(\mathcal{X}(t)\mathcal{Y}(t)w) - f(\mathcal{Y}(t)w) + f(\mathcal{Y}(t)w) - \mathcal{X}(t)f(\mathcal{Y}(t)w).$$

Comme f est lipschitzienne et grâce aux résultats des questions 2. et 3.,

$$\|f(\mathcal{X}(t)\mathcal{Y}(t)w) - f(\mathcal{Y}(t)w)\|_{L^\infty} \leq CM'\sqrt{t}\|\partial_x \mathcal{Y}(t)w\|_{L^\infty} \leq CM'\sqrt{t}\exp(M't)\|\partial_x w\|_{L^\infty}.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}\|f(\mathcal{Y}(t)w) - \mathcal{X}(t)f(\mathcal{Y}(t)w)\|_{L^\infty} &\leq C\sqrt{t}\|\partial_x f(\mathcal{Y}(t)w)\|_{L^\infty} = C\sqrt{t}\|f'(\mathcal{Y}(t)w)\partial_x \mathcal{Y}(t)w\|_{L^\infty} \\ &\leq CM'\sqrt{t}\exp(M't)\|\partial_x w\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

Finalement, il existe une constante qui ne dépend que de f telle que pour $0 \leq t \leq 1$

$$\|g(t)\|_{L^\infty} \leq C\sqrt{t}\|\partial_x w\|_{L^\infty}.$$

7. Nous voulons estimer $\|\mathcal{L}(h)^n u^0 - \mathcal{S}(nh)u^0\|_{L^\infty}$. On a dans un premier temps et de manière classique

$$\|\mathcal{L}(h)^n u^0 - \mathcal{S}(nh)u^0\|_{L^\infty} \leq \sum_{j=0}^{n-1} \|\mathcal{L}(h)^{n-j-1}\mathcal{L}(h)\mathcal{S}(jh)u^0 - \mathcal{L}(h)^{n-j-1}\mathcal{S}((j+1)h)u^0\|_{L^\infty}.$$

Nous avons montré à la question 4. l'existence d'une constante C telle que pour tout $w_1, w_2 \in L^\infty$ et tout temps $0 \leq t \leq 1$

$$\|\mathcal{L}(t)w_1 - \mathcal{L}(t)w_2\|_{L^\infty} \leq (1 + Ct)\|w_1 - w_2\|_{L^\infty},$$

et ainsi

$$\|\mathcal{L}(h)^n u^0 - \mathcal{S}(nh)u^0\|_{L^\infty} \leq \sum_{j=0}^{n-1} (1 + C_0 h)^{n-j-1}\|(\mathcal{L}(h) - \mathcal{S}(h))\mathcal{S}(jh)u^0\|_{L^\infty}.$$

Posons $v^0 = \mathcal{S}(jh)u^0$. De manière analogue aux démonstrations pour les équations avec différentes échelles, nous avons des régularités différentes au temps initial et aux temps ultérieurs. En effet, pour $j = 0$, nous avons uniquement la régularité $v^0 = u^0 \in L^\infty$. En revanche, pour $j \geq 1$ nous avons $v^0 = \mathcal{S}(jh)u^0 \in W^{1,\infty}$ avec

$$\|\partial_x v^0\|_{L^\infty} \leq \frac{K \exp(Kt)}{\sqrt{t}} \|u^0\|_{L^\infty}.$$

Nous pouvons écrire

$$\mathcal{S}(t)v^0 = \mathcal{X}(t)v^0 + \int_0^t \mathcal{X}(t-\tau) f(\mathcal{S}(\tau)v^0) d\tau.$$

On écrit la différence avec la solution splittée sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t)v^0 - \mathcal{L}(t)v^0 &= \int_0^t \mathcal{X}(t-\tau) \left[f(S(\tau)v^0) - f(\mathcal{L}(\tau)v^0) \right] d\tau + \int_0^t \mathcal{X}(t-\tau) g(\tau) d\tau, \\ \|\mathcal{S}(t)v^0 - \mathcal{L}(t)v^0\|_{L^\infty} &\leq \int_0^t \|f(S(\tau)v^0) - f(\mathcal{L}(\tau)v^0)\|_{L^\infty} d\tau + \int_0^t \|g(\tau)\|_{L^\infty} d\tau. \end{aligned}$$

Si $v^0 \in L^\infty$, on utilise l'estimation obtenue à la question 5.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}(t)v^0 - \mathcal{L}(t)v^0\|_{L^\infty} &\leq K \int_0^t \|S(\tau)v^0 - \mathcal{L}(\tau)v^0\|_{L^\infty} d\tau + \int_0^t C\|v^0\|_{L^\infty} d\tau, \\ &= K \int_0^t \|S(\tau)v^0 - \mathcal{L}(\tau)v^0\|_{L^\infty} d\tau + Ct\|v^0\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Si $v^0 \in W^{1,\infty}$, on utilise l'estimation obtenue à la question 6.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}(t)v^0 - \mathcal{L}(t)v^0\|_{L^\infty} &\leq K \int_0^t \|S(\tau)v^0 - \mathcal{L}(\tau)v^0\|_{L^\infty} d\tau + \int_0^t C\sqrt{\tau}\|\partial_x v^0\|_{L^\infty} d\tau, \\ &= K \int_0^t \|S(\tau)v^0 - \mathcal{L}(\tau)v^0\|_{L^\infty} d\tau + \frac{2}{3} Ct\sqrt{t}\|\partial_x v^0\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on peut tout à fait écrire un lemme de Gronwall modifié du même type que celui du cours qui assure qu'il existe un temps t_0 tel que pour tout $0 \leq t \leq t_0$

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{S}(t)v^0 - \mathcal{L}(t)v^0\|_{L^\infty} \leq Ct\|v^0\|_{L^\infty} && \text{si } w \in L^\infty \\ &\|\mathcal{S}(t)v^0 - \mathcal{L}(t)v^0\|_{L^\infty} \leq Ct\sqrt{t}\|\partial_x v^0\|_{L^\infty} && \text{si } w \in W^{1,\infty} \end{aligned}$$

On choisit $h \leq \min(t_0, 1)$. On a alors

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n-1} (1+C_0h)^{n-j-1} \|(\mathcal{L}(h) - \mathcal{S}(h))\mathcal{S}(jh)u^0\|_{L^\infty} \\ &\qquad \leq \sum_{j=1}^{n-1} (1+C_0h)^{n-j-1} Ch\sqrt{h} \frac{K\exp(K(jh))}{\sqrt{jh}} \|u^0\|_{L^\infty} \\ &\qquad \leq \sum_{j=1}^{n-1} (1+C_0h)^{n-j-1} Ch\sqrt{h} \frac{K\exp(K(jh))}{\sqrt{jh}} \|u^0\|_{L^\infty} \\ &\qquad \leq \exp(C_0T) CK \exp(KT) \sqrt{T}\sqrt{h} \|u^0\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

où on a utilisé que $h\sum_{j=1}^{n-1} 1/\sqrt{j} \leq Ch\sqrt{n} \leq C\sqrt{T}\sqrt{h}$. Pour $j = 0$, on a

$$(1+C_0h)^{n-1}\|(\mathcal{L}(h) - \mathcal{S}(h))u^0\|_{L^\infty} \leq (1+C_0h)^{n-1} Ch\|u^0\|_{L^\infty} \leq \exp(C_0T) Ch\|u^0\|_{L^\infty}.$$

On en déduit que pour tout $u^0 \in L^\infty$ et tout $T > 0$, il existe C et h_0 tels que pour tout $h \in]0, h_0]$, et pour tout n tel que $nh \leq T$

$$\|\mathcal{L}(h)^n u^0 - \mathcal{S}(nh)u^0\|_{L^\infty} \leq C\sqrt{h}\|u^0\|_{L^\infty}.$$

L'ordre global de la méthode est 1/2.