Méthodes de splitting pour les problèmes multi-échelles

B. Bidégaray-Fesquet

Cours de M2R — Complément 2008

8 Un exemple d'EDP non linéaire

8.1 Contexte

On considère l'équation de réaction diffusion :

$$\left| \begin{array}{ll} \partial_t u - \partial_x^2 u + f(u) = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = u^0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

où $u(x,t) \in \mathbb{R}$. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^0 \cap W^{1,\infty}$ (c'est-à-dire que $f \in \mathcal{C}^0$, $f \in L^\infty$ et $f' \in L^\infty$), $f(0) = 0$. On note $M' = \|f'\|_\infty$. La donnée initiale vérifie $u^0 \in \mathcal{C}^0 \cap L^\infty$.

On note $\mathcal{S}(t)$ le flot associé à cette équation. On définit deux flots partiels, celui, $\mathcal{X}(t)$, de l'équation de diffusion seule

$$\left| \begin{array}{ll} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = u^0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{array} \right.$$

et celui, $\mathcal{Y}(t)$, de l'équation de réaction (EDO)

$$\left| \begin{array}{ll} \partial_t u - F(u) = 0, & x \in \mathbb{R}^2,\ t > 0, \\ u(x,0) = u^0(x), & x \in \mathbb{R}^2. \end{array} \right.$$

On considère le splitting de Lie $\mathcal{L}(t) - \mathcal{X}(t)\mathcal{Y}(t)$. Nous allons montrer le théorème suivant.

Pour tout u^0 dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et tout $T > 0$, il existe C et h_0 tels que pour tout $h \in]0, h_0[$, et pour tout n tel que $nh \leq T$

$$\|\mathcal{L}(h)^n u^0 - \mathcal{S}(nh)u^0\|_{L^2} \leq C\sqrt{h}\|u^0\|_{L^\infty}.$$

L'ordre global de la méthode est donc 1/2.

8.2 Estimations préliminaires

8.2.1 Lemme de Gronwall classique

Lemme 1

Soit p une fonction positive. On suppose que la fonction ϕ vérifie pour tout temps $t \geq 0$ l'inéquation intégrale

$$0 \leq \phi(t) \leq \phi(0) + \int_0^t p(\tau)\phi(\tau)d\tau.$$

Alors pour tout temps $t \geq 0$

$$\phi(t) \leq \phi(0)\exp(\int_0^t p(\tau)d\tau).$$

Preuve :
On pose

$$\psi(t) = [\phi(0) + \int_0^t p(\tau)\phi(\tau)d\tau] \exp(-\int_0^t p(\tau)d\tau).$$

On en calcule la dérivée

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= p(t)\phi(t)\exp(-\int_0^t p(\tau)d\tau) - [\phi(0) + \int_0^t p(\tau)\phi(\tau)d\tau]p(t)\exp(-\int_0^t p(\tau)d\tau) \\ &\leq 0 \text{ par hypothèse.} \end{aligned}$$

Donc $\psi(t) \leq \psi(0) = \phi(0)$ pour tout $t \geq 0$. Finalement

$$\phi(t) \leq \psi(t)\exp(\int_0^t p(\tau)d\tau) \leq \phi(0)\exp(\int_0^t p(\tau)d\tau).$$

■

8.2.2 Lemme de Gronwall modifié

Lemme 2

Soit p une fonction positive, nullle en zéro, de dérivée positive sur $\mathbb{R}^+$. On suppose qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout temps $t \geq 0$, on a l'inéquation intégrale

$$0 \leq \phi(t) \leq \phi(0) + p(t) + C\int_0^t \phi(\tau)d\tau.$$

Alors, pour tout $\alpha > 1$, il existe $t_0 > 0$ tel que, pour tout $0 \leq t \leq t_0$, on a la majoration

$$\phi(t) \leq \phi(0)e^{Ct} + \alpha p(t).$$

Preuve :
On définit une nouvelle fonction positive

$$\psi(t) = \left(\phi(0) + p(t) + C\int_0^t \phi(\tau)d\tau\right)e^{-Ct}$$

pour laquelle on cherche à déterminer une inéquation intégrale. Tout d'abord

$$\psi'(t) = \left(p'(t) + C\phi(t) - C\left(\phi(0) + p(t) + C\int_0^t \phi(\tau)d\tau\right)\right)e^{-Ct} \leq p'(t)e^{-Ct}.$$

Comme $\psi(0) = \phi(0)$, on obtient la majoration

$$\psi(t) - \psi(0) = \psi(t) - \phi(0) \leq \int_0^t p'(\tau)e^{-C\tau}d\tau.$$

Donc

$$\phi(t) \leq \psi(t)e^{Ct} \leq \phi(0)e^{Ct} + \int_0^t p'(\tau)e^{C(t-\tau)}d\tau \leq \phi(0)e^{Ct} + e^{Ct_0}\int_0^t p'(\tau)d\tau.$$

On peut choisir t_0 suffisamment petit pour que $e^{Ct_0} \leq \alpha$. Alors, pour tout $0 \leq t \leq t_0$,

$$\phi(t) \leq \phi(0)e^{Ct} + \alpha p(t).$$

■

8.2.3 Estimations du flot $X(t)$

On rappelle que pour tout $w \in L^\infty$, la solution $\mathcal{X}(t)w$ de l'équation de diffusion s'écrit

$$\mathcal{X}(t)w = E(\cdot, t) \star w,$$

où E est la solution élémentaire

$$E(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

Cette solution élémentaire vérifie $\|E(\cdot,t)\|_{L^1} = 1$ pour tout t. On a donc

$$\|\mathcal{X}(t)w\|_{L^\infty} = \|E(\cdot,t) \star w\|_{L^\infty} \leq \|E(\cdot,t)\_L^1\|w\|_{L^\infty} = \|w\|_{L^\infty}.$$

Pour tout $w \in L^\infty$ et tout $t \geq 0$,
(X1) $\|\mathcal{X}(t)w\|_{L^\infty} \leq \|w\|_{L^\infty}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}(t)w - w &= \int_0^t \dot{\mathcal{X}}(s)wds \\
&= \int_0^t \partial_t(E(\cdot,s) \star w)ds \\
&= \int_0^t \partial_{x^2}(E(\cdot,s) \star w)ds \\
&= \int_0^t \partial_x E(\cdot,s) \star \partial_x w ds.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|\mathcal{X}(t)w - w\|_{L^\infty} \leq \left\| \int_0^t \partial_x E(\cdot,s)ds \right\|_{L^1} \|\partial_x w\|_{L^\infty}.$$

Or

$$\begin{aligned}
\partial_x E(x,s) &= -\frac{2x}{4s}\frac{1}{\sqrt{4\pi s}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right), \\
\|\partial_x E(\cdot,s)\|_{L^1} &= \frac{2}{\sqrt{4\pi s}} \int_0^\infty \exp(-y)dy = \frac{2}{\sqrt{4\pi s}}, \\
\|\mathcal{X}(t)w - w\|_{L^\infty} &\leq \int_0^t \frac{2}{\sqrt{4\pi s}} ds \, \|\partial_x w\|_{L^\infty} = C\sqrt{t}\, \|\partial_x w\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

Pour tout $w \in W^{1,\infty}$ et tout $t \geq 0$,
(X2) $\|\mathcal{X}(t)w - \mathcal{X}(0)w\|_{L^\infty} \leq C\sqrt{t}\|w\|_{W^{1,\infty}}$.

8.2.4 Estimations du flot $\mathcal{Y}(t)$

La solution de l'équation différentielle $_partial_t u + f(u) = 0$ s'intègre en

$$u(t) = u(0) - \int_0^t f(u(\tau))d\tau.$$

En écrivant $u(t) = \mathcal{Y}(t)w$, on a

$$(*)\ \mathcal{Y}(t)w = w - \int_0^t f(\mathcal{Y}(\tau)w)d\tau.$$

On a donc

$$\|\mathcal{Y}(t)w\|_{L^\infty} \leq \|w\|_{L^\infty} + \int_0^t \|f(\mathcal{Y}(\tau)w)\|_{L^\infty} d\tau.$$

D'après les hypothèses f set M'-lipschitzienne et $f(0)=0$ donc pour $v \in L^\infty$

$$\|f(v)\|_{L^\infty} = \|f(v)-f(0)\|_{L^\infty} \leq M'\|v\|_{L^\infty}.$$

Ainsi

$$\|\mathcal{Y}(t)w\|_{L^\infty} \leq \|w\|_{L^\infty} + M'\int_0^t \|\mathcal{Y}(\tau)w\|_{L^\infty} d\tau.$$

On applique le lemme de Gronwall classique avec $\phi(t) = \|\mathcal{Y}(t)w\|_{L^\infty}$ et $p(t) = M'$, d'où

$$\|\mathcal{Y}(t)w\|_{L^\infty} \leq \exp(M't)\|w\|_{L^\infty}.$$

Pour tout $w \in L^\infty$ et tout $t \geq 0$,

$$\text{(Y1)}\ \|\mathcal{Y}(t)w\|_{L^\infty} \leq \exp(M't)\|w\|_{L^\infty}.$$

Si w_1 et $w_2 \in L^\infty$, on a d'après $(*)$

$$\mathcal{Y}(t)w_1 - \mathcal{Y}(t)w_2 = w_1 - w_2 - \int_0^t \left(f(\mathcal{Y}(\tau)w_1) - f(\mathcal{Y}(\tau)w_2)\right) d\tau.$$

Comme précédemment, par le caractère lipschitzien, on a

$$\|\mathcal{Y}(t)w_1 - \mathcal{Y}(t)w_2\|_{L^\infty} = \|w_1 - w_2\|_{L^\infty} + M'\int_0^t \|\mathcal{Y}(\tau)w_1 - \mathcal{Y}(\tau)w_2\|_{L^\infty} d\tau$$

et le lemme de Gronwall classique implique

$$\|\mathcal{Y}(t)w_1 - \mathcal{Y}(t)w_2\|_{L^\infty} \leq (1+Ct)\|w_1 - w_2\|_{L^\infty},$$

où on a majoré $\exp(M't) \leq 1 + Ct$ pour $0 \leq t \leq 1$.

Il existe une constante C qui ne dépend que de f telle que pour tout $w_1,\ w_2 \in L^\infty$ et tout $0 \leq t \leq 1$,

$$\text{(Y2)}\ \|\mathcal{Y}(t)w_1 - \mathcal{Y}(t)w_2\|_{L^\infty} \leq (1+Ct)\|w_1 - w_2\|_{L^\infty}.$$

On dérive $(*)$ en espace pour obtenir

$$\begin{aligned}
\partial_x \mathcal{Y}(t)w &= \partial_x w - \int_0^t f'(\mathcal{Y}(\tau)w)\partial_x(\mathcal{Y}(\tau)w) d\tau, \\
\|\partial_x \mathcal{Y}(t)w\|_{L^\infty} &\leq \|\partial_x w\|_{L^\infty} + M'\int_0^t \|\partial_x(\mathcal{Y}(\tau)w)\|_{L^\infty} d\tau.
\end{aligned}$$

Toujours d'après le lemme de Gronwall on obtient le résultat

Pour tout $w \in W^{1,\infty}$ et tout $t \geq 0$,

$$\text{(Y3)}\ \|\partial_x \mathcal{Y}(t)w\|_{L^\infty} \leq \exp(M't)\|\partial_x w\|_{L^\infty}.$$

8.2.5 Estimations du flot total $\mathcal{S}(t)$

On admettra que pour tout $T > 0$, $\mathcal{S}(t)u^0 \in \mathcal{C}([0,T]; L^\infty)$ et est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,T] \times \mathbb{R}$. On se fixe T. En particulier, pour tout $0 \leq t \leq T$, on note $\|u(t)\|_{L^\infty} \leq m$ et $M = \sup_{x \in [-m,m]} f(x)$. On admet également qu'il existe $K > 0$ telle que

$$\|\partial_x \mathcal{S}(t)u^0\|_{L^\infty} \leq \frac{K\exp(Kt)}{\sqrt{t}}\|u^0\|_{L^\infty}.$$

8.3 Régularité lipschitzienne

Composons $(*)$ par $\mathcal{X}(t)$ à gauche. On a

$$\mathcal{L}(t)w = \mathcal{X}(t)\mathcal{Y}(t)w = \mathcal{X}(t)w - \int_0^t \mathcal{X}(t)f(\mathcal{Y}(\tau)w)\ d\tau$$

donc pour w_1 et $w_2 \in L^\infty$, on a par linéarité de $\mathcal{X}(t)$

$$\mathcal{L}(t)w_1 - \mathcal{L}(t)w_2 = \mathcal{X}(t)(w_1 - w_2) - \int_0^t \mathcal{X}(t)(f(\mathcal{Y}(\tau)w_1) - f(\mathcal{Y}(\tau)w_2)d\tau.$$

D'après (X1)

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}(t)w_1 - \mathcal{L}(t)w_2\|_{L^\infty} &\leq \|w_1 - w_2\|_{L^\infty} + \int_0^t \|f(\mathcal{Y}(\tau)w_1) - f(\mathcal{Y}(\tau)w_2)\|_{L^\infty} d\tau \\
&\leq \|w_1 - w_2\|_{L^\infty} + M' \int_0^t \|\mathcal{Y}(\tau)w_1 - \mathcal{Y}(\tau)w_2\|_{L^\infty} d\tau \text{ (f est lipschitzienne)} \\
&\leq \|w_1 - w_2\|_{L^\infty} + M' \int_0^t (1 + Ct)\|w_1 - w_2\|_{L^\infty} \text{ ((Y2) pour $0 \leq t \leq 1$)} \\
&\leq (1 + Ct)\|w_1 - w_2\|_{L^\infty} \text{ (majoration brutale pour $0 \leq t \leq 1$).}
\end{aligned}$$

Il existe une constante C qui ne dépend que de f telle que pour tout $w_1,\ w_2 \in L^\infty$ et tout $0 \leq t \leq 1$,

$$\|\mathcal{L}(t)w_1 - \mathcal{L}(t)w_2\|_{L^\infty} \leq (1 + Ct)\|w_1 - w_2\|_{L^\infty}.$$

8.4 Erreur locale

Soit $w \in L^\infty$. Notons

$$g(t) = f(\mathcal{X}(t)\mathcal{Y}(t)w) - \mathcal{X}(t)f(\mathcal{Y}(t)w).$$

Lemme 3 *Si $w \in L^\infty$*

$$\|g(t)\|_{L^\infty} \leq 2M \exp(M't)\|w\|_{L^\infty}.$$

Preuve :
On estime séparément

$$\begin{aligned}
\|f(\mathcal{X}(t)\mathcal{Y}(t)w)\|_{L^\infty} &\leq M\|\mathcal{X}(t)\mathcal{Y}(t)w\|_{L^\infty} \overset{(X1)}{\leq} M\|\mathcal{Y}(t)w\|_{L^\infty} \overset{(Y1)}{\leq} M\exp(M't)\|w\|_{L^\infty}, \\
\|\mathcal{X}(t)f(\mathcal{Y}(t)w)\|_{L^\infty} &\overset{(X1)}{\leq} \|f(\mathcal{Y}(t)w)\|_{L^\infty} \leq M\|\mathcal{Y}(t)w\|_{L^\infty} \overset{(Y1)}{\leq} M\exp(M't)\|w\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

Le résultat découle de l'inégalité triangulaire. ∎

Lemme 4 *Si de plus $w \in W^{1,\infty}$, pour tout $0 \leq t \leq 1$,*

$$\|g(t)\|_{L^\infty} \leq C\sqrt{t}\|\partial_x w\|_{L^\infty}.$$

Preuve :
On réécrit

$$g(t) = f(\mathcal{X}(t)\mathcal{Y}(t)w) - f(\mathcal{Y}(t)w) + f(\mathcal{Y}(t)w) - \mathcal{X}(t)f(\mathcal{Y}(t)w)$$

et on estime séparément

$$\begin{aligned}
\|f(\mathcal{X}(t)\mathcal{Y}(t)w) - f(\mathcal{Y}(t)w)\|_{L^\infty} &\overset{\text{lipsch.}}{\leq} M'\|\mathcal{X}(t)\mathcal{Y}(t)w - \mathcal{Y}(t)w\|_{L^\infty} \\
&\overset{(X2)}{\leq} M'C\sqrt{t}\|\partial_x \mathcal{Y}(t)w\|_{L^\infty} \\
&\overset{(Y3)}{\leq} M'C\sqrt{t}\exp(M't)\|\partial_x w\|_{L^\infty}, \\
\|f(\mathcal{Y}(t)w) - \mathcal{X}(t)f(\mathcal{Y}(t)w)\|_{L^\infty} &\overset{(X2)}{\leq} C\sqrt{t}\|\partial_x f(\mathcal{Y}(t)w)\|_{L^\infty} \\
&\leq C\sqrt{t}\|f'(\mathcal{Y}(t)w)\partial_x \mathcal{Y}(t)w\|_{L^\infty} \\
&\leq C\sqrt{t}M'\|\partial_x \mathcal{Y}(t)w\|_{L^\infty} \\
&\overset{(Y3)}{\leq} C\sqrt{t}M'\exp(M't)\|\partial_x w\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

Il existe une constante C qui ne dépend que de f telle que pour tout $0 \leq t \leq 1$

$$\|g(t)\|_{L^\infty} \leq C\sqrt{t}\|\partial_x w\|_{L^\infty}.$$

■

On utilise une formulation de Duhamel pour écrire que $v^0 \in L^\infty$

$$\mathcal{S}(t)v^0 = \mathcal{X}(t)v^0 - \int_0^t \mathcal{X}(t-\tau)f(\mathcal{S}(\tau)v^0)d\tau.$$

On écrit la différence avec la solution splittée pour obtenir l'erreur locale

$$\mathcal{S}(t)v^0 - \mathcal{L}(t)v^0 = -\int_0^t \mathcal{X}(t-\tau)\left[f(S(\tau)v^0) - f(\mathcal{L}(\tau)v^0)\right]d\tau - \int_0^t \mathcal{X}(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

On a une estimation ainsi de l'erreur locale

$$\|\mathcal{S}(t)v^0 - \mathcal{L}(t)v^0\|_{L^\infty} \leq M'\int_0^t \|\mathcal{S}(\tau)v^0 - \mathcal{L}(\tau)v^0\|_{L^\infty}d\tau + \int_0^t \|g(\tau)\|_{L^\infty}d\tau.$$

À la première itération du schéma, on sait uniquement que $v^0 = u^0 \in L^\infty$, on a alors d'après le lemme 3

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{S}(t)v^0 - \mathcal{L}(t)v^0\|_{L^\infty} &\leq M'\int_0^t \|\mathcal{S}(\tau)v^0 - \mathcal{L}(\tau)v^0\|_{L^\infty}d\tau + \int_0^t C\|v^0\|_{L^\infty}d\tau \\
&= M'\int_0^t \|\mathcal{S}(\tau)v^0 - \mathcal{L}(\tau)v^0\|_{L^\infty}d\tau + Ct\|v^0\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

Dès l'itération suivante, on a $v^0 = \mathcal{S}(jh)u^0 \in W^{1,\infty}$ d'après les estimations sur le flot total. D'après le lemme 4, on a alors

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{S}(t)v^0 - \mathcal{L}(t)v^0\|_{L^\infty} &\leq M'\int_0^t \|\mathcal{S}(\tau)v^0 - \mathcal{L}(\tau)v^0\|_{L^\infty}d\tau + \int_0^t C\sqrt{\tau}\|\partial_x v^0\|_{L^\infty}d\tau \\
&= M'\int_0^t \|\mathcal{S}(\tau)v^0 - \mathcal{L}(\tau)v^0\|_{L^\infty}d\tau + \frac{2}{3}Ct\sqrt{t}\|\partial_x v^0\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall modifié, on a pour tout $0 \leq t \leq t_0 (\leq 1)$,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{S}(t)v^0 - \mathcal{L}(t)v^0\|_{L^\infty} &\leq Ct\|v^0\|_{L^\infty}d\tau, \text{ pour } v^0 \in L^\infty, \\
\|\mathcal{S}(t)v^0 - \mathcal{L}(t)v^0\|_{L^\infty} &\leq Ct\sqrt{t}\|\partial_x v^0\|_{L^\infty}, \text{ pour } v^0 \in W^{1,\infty}.
\end{aligned}$$

8.5 Erreur globale

On choisit un pas de temps $h \leq_m in(t_0, 1)$. On veut estimer $\|\mathcal{L}(h)^n u^0 - \mathcal{S}(nh)u^0\|_{L^\infty}$. Par une inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}(h)^n u^0 - \mathcal{S}(nh)u^0\|_{L^\infty} &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \|\mathcal{L}(h)^{n-j-1}\mathcal{L}(h)\mathcal{S}(jh)u^0 - \mathcal{L}(h)^{n-j-1}\mathcal{S}((j+1)h)u^0\|_{L^\infty} \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1}(1+Ch)^{n-j-1}\|(\mathcal{L}(h) - \mathcal{S}(h))\mathcal{S}(jh)u^0\|_{L^\infty},
\end{aligned}$$

d'après le résultat de régularité lipschitzienne.
Pour $j = 0$, on a

$$\|(\mathcal{L}(h) - \mathcal{S}(h))\mathcal{S}(jh)u^0\|_{L^\infty} = \|(\mathcal{L}(h) - \mathcal{S}(h))u^0\|_{L^\infty} \leq Ch\|u^0\|_{L^\infty}.$$

Pour $j \geq 1$, on a

$$\|(\mathcal{L}(h) - \mathcal{S}(h))\mathcal{S}(jh)u^0\|_{L^\infty} \leq Ch\sqrt{h}\|_p artial_x \mathcal{S}(jh)u^0\|_{L^\infty} \leq Ch\sqrt{h}\frac{K\exp(Kjh)}{\sqrt{jh}}\|u^0\|_{L^\infty}.$$

On utilise le fait que $(1 + Ch)^{n-j-1} \leq \exp(CT)$, que $\exp(Kjh) \leq \exp(KT)$ et que

$$h\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{j}} \leq Ch\sqrt{n} \leq C\sqrt{T}\sqrt{h}.$$

En sommant, on obtient le théorème suivant.

Théorème 1

Pour tout u^0 dans $L\infty(\mathbb{R})$ et tout $T > 0$, il existe C et h_0 tels que pour tout $h \in]0, h_0[$, et pour tout n tel que $nh \leq T$

$$\|\mathcal{L}(h)^n u^0 - \mathcal{S}(nh)u^0\|_{L^2} \leq C\sqrt{h}\|u^0\|_{L\infty}.$$

La méthode est d'ordre 1/2.