Calcul des propriétés différentielles des courbes et des surfaces : point de vue de la mesure

Notes de cours - M2R Mathématiques Appliquées

André Lieutier et Boris Thibert

11 décembre 2008

Contexte

Ce cours se place dans le cadre général de la géométrie effective, hérité de l'analyse récursive, pour le calcul sur des objets géométriques appartenant à des ensembles non dénombrables. Par définition, les ensembles non dénombrables ne sont pas "représentables" exactement en machine. Le principe général de la géométrie effective est donc le suivant :

– on se donne des représentations finies (représentables en machine) qui définissent un sous-ensemble dense ;
– on montre la continuité (propriétés de convergence ou de stabilité) des "quantités" calculées si possible en quantifiant un module de continuité.

Les quantités sur les objets limites peuvent alors être approchées par leurs valeurs sur des approximations finies. Cette approche exige de placer les représentations finies et leurs limites dans un même cadre mathématique.

Dans le cadre du calcul géométrique et plus généralement des technologies liées à la modélisation géométrique et la simulation, au delà de la visualisation et du "computer graphic", les représentations finies sont souvent des surfaces triangulées ou des nuages de points (à coordonnées rationnelles) et les objets limites sont des objets lisses ou lisses par morceaux, tels que les courbes et les surfaces "classiques". Les notions différentielles usuelles, telles que la longueur, l'aire, les normales, la tangence et la courbure doivent pouvoir être généralisées pour être définies et évaluées sur les représentations finies que sont les courbes polygonales et les surfaces triangulées voire sur des nuages de points. Pour le cas de la courbure notamment, à coté des techniques plus ou moins heuristiques qui consistent à mesurer la courbure d'une surface lisse "proche", on explore ici plutôt le point de vue de la mesure qui permet de plonger les surfaces triangulées et leurs limites lisses dans un même cadre permettant une définition uniforme des notions différentielles, plus en phase avec les points de vue du calcul et de la mesure de quantités physiques.

Nous remercions David Cohen-Steiner, dont l'excellent manuscript de thèse [4] a été une aide précieuse lors de l'élaboration de ce cours.

Plan du cours

La théorie du *cycle normal* permet de définir des mesures de courbure sur une vaste classe d'objets et aussi d'obtenir des résultats de convergence de ces mesures de courbure. Le but de ce cours est d'étudier cette théorie dans le cas particulier des surfaces régulières et des triangulations de $\mathbb{R}^3$.

Les trois premières parties concernent les pré-requis et donnent un aperçu des travaux antérieurs au cycle normal :

– Dans la partie 1, nous faisons des rappels concernant la géométrie différentielle des courbes et surfaces.

– Dans la partie 2, nous mentionnons des résultats anciens (tels que la formule des tubes, des travaux de Banchoff) qui indiquent que l'on peut trouver (ou retrouver) les mesures de courbure d'un objet à partir d'indications sur ses normales.
– Dans la partie 3, nous faisons une introduction aux courants, qui sont vus comme une généralisation des courbes et des surfaces.

Les parties suivantes abordent la théorie du *cycle normal* :
– Dans la partie 4, nous étudions des formes différentielles particulières.
– Dans la partie 5, nous définissons le cycle normal comme étant un courant particulier. Ce cycle normal appliqué aux formes différentielles de la partie 4 permet alors de définir la mesure de courbure moyenne et la mesure de courbure de Gauss pour une triangulation.
– Dans la partie 6, toujours à l'aide du cycle normal, nous définissons des mesures de courbures anisotropes.
– Dans la partie 7, nous donnons des résultats de convergence des mesures de courbures d'une suite de triangulations qui converge vers une surface lisse.

Pour plus de détails sur les parties 4,5,6 et 7 le lecteur pourra regarder le livre de Jean-Marie Morvan [10] ou la thèse de David Cohen-Steiner [4].

1 Rappels de géométrie différentielle classique

Dans cette partie, nous faisons de brefs rappels de géométrie différentielle sur les courbes et surfaces. Pour plus de détails, le lecteur pourra regarder par exemple le livre de Do Carmo [2].

1.1 Courbes paramétrées

1.1.1 Généralités

Définition 1 *On appelle courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geq 0$) toute application*

$$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

de classe $\mathcal{C}^k$, où I est une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathcal{C} = \{f(t), t \in I\}$ est appelé le support de la courbe.

Remarque 1 *Deux courbes paramétrées peuvent avoir le même support et être de classe différente. On peut par exemple considérer les deux courbes paramétrées suivantes :*

$$f(t) = (t^2, t^3) \text{ pour } t \in \mathbb{R},$$

et

$$g(t) = \begin{cases} (|t|, -|t|^{\frac{3}{2}}) & \text{si } t < 0 \\ (t, t^{\frac{3}{2}}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

• Allure locale d'une courbe plane :
Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée plane. Soit $t_0 \in I$. Un développement limité de f en t_0 donne :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2} f''(t_0) + ... + \frac{(t - t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0) + o((t - t_0)^k).$$

La première dérivée non nulle $f^{(p)}(t_0)$ est un vecteur tangent à la courbe. D'autre part, si on note q le plus petit entier plus grand que p tel que la famille $(f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ soit libre, alors $f^{(q)}(t_0)$ indique dans quelle direction est dirigée la courbe (en fait, on peut décrire précisément l'allure locale de la courbe en $f(t_0)$ suivant les parités de p et de q).

• Reparamétrisation

Soit $f : I \to \mathbb{R}^3$ est une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geq 1$) et $\rho : J \subset \mathbb{R} \to I$ un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme. Alors $f \circ \rho$ est une courbe paramétrée de même support que f. Le $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme ρ est alors appelé un changement de variable.

• Courbes régulières

La courbe $f : I \to \mathbb{R}^3$ est dite régulière si pour tout $t \in I$ on a $f'(t) \neq 0$. Dans ce cas, le support $\mathcal{C}$ de la courbe admet une tangente en tout point $f(t)$ qui est dirigée par $f'(t)$. Si on reparamétrise une courbe régulière, on a toujours une courbe régulière. D'autre part, les droites tangentes ne dépendent pas de la paramétrisation.

1.1.2 Etude métrique

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^0$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des subdivisions (t_i) de $[a, b]$ de la forme $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$. Pour $s = (t_0, ...t_n) \in \mathcal{S}$, on note $l(s) = \sum_i f(t_i)f(t_{i+1})$ la longueur de la ligne polygonale de sommets $f(t_0)$,...,$f(t_n)$.

Définition 2 *Si l'ensemble $\{l(s),\ s \in \mathcal{S}\}$ est borné, alors on dit que la courbe paramétrée f est rectifiable et que sa longueur vaut*

$$l(f) = \sup \{l(s),\ s \in \mathcal{S}\}.$$

Théorème 1 *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors f est rectifiable et on a*

$$l(f) = \int_a^b \|f'(t)\|\ dt.$$

• Abscisse curviligne d'une courbe régulière

On considère maintenant une courbe paramétrée régulière de classe $\mathcal{C}^1$ $f : I \to \mathbb{R}^3$ et $t_0 \in I$. L'abscisse curviligne de f est l'application définie par :

$$\begin{array}{rccl} \sigma : & I & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \int_{t_0}^t \|f'(u)\|\ du. \end{array}$$

On remarque que σ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dont la dérivée $\sigma'(t) = \|f'(t)\|$ est strictement positive. On en déduit que $\sigma : I \to J = \sigma(I)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. L'application

$$f \circ \sigma^{-1} : J \to \mathbb{R}^3$$

est donc une reparamétrisation de f, qui est appelée paramétrisation par abscisse curviligne.

Proposition 1 *Si $f : I \to \mathbb{R}^3$ est une courbe paramétrée par abscisse curviligne, alors pour tout $t \in I$ on a $\|f'(t)\| = 1$.*

1.1.3 Courbure

On considère maintenant une courbe $f : I \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^2$ paramétrée par abscisse curviligne. On a alors les définitions suivantes

Définition 3
- *La courbure au point $f(s)$ est donnée par $k(s) = \|f''(s)\|$.*
- *La normale principale en un point $f(s)$ de courbure non nulle est donnée par $N(s) = \frac{f''(s)}{\|f''(s)\|}$.*

– *Le centre de courbure en un point $f(s)$ de courbure non nulle est donnée par*

$$C(s) = f(s) + \frac{1}{k(s)} N(s).$$

On a alors les propriétés suivantes :

Proposition 2

1. *Pour tout s $\|f'(s)\| = 1$ et $f''(s)$ est orthogonal à $f'(s)$.*
2. *Le cercle de centre $C(s)$ et de rayon $\frac{1}{k(s)}$ a un contact d'ordre deux avec la courbe en $f(s)$.*

1.2 Surfaces paramétrées

Définition 4 *On appelle surface paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geq 2$) toute application*

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

de classe $\mathcal{C}^k$, où U est un domaine de $\mathbb{R}^2$.

On note $S = f(U)$ la surface géométrique associée.

• Plan tangent et point régulier
Par définition, l'espace tangent à S en $m = f(u, v)$ est donné par :

$$T_m S = Im(Df(u, v)) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)h + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)k, (h, k) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On dit que f est régulière si pour tout couple $(u, v) \in U$ la différentielle $Df(u, v)$ de f en (u, v) est de rang 2. Dans ce cas là, l'espace tangent est un plan. On peut montrer que le fait d'être régulier et l'espace tangent ne changent pas si on reparamétrise f en la composant par un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.

• Allure locale en un point régulier
Localement, une surface peut être vue comme un graphe au-dessus de son plan tangent. On peut supposer que notre surface est paramétrée par l'application :

$$f(x, y) = (x, y, \phi(x, y)),$$

avec $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. D'autre part, quitte à faire un changement de repère, on peut supposer que $\phi(0, 0) = 0$ et que $D\phi(0, 0) = 0$. Dans le nouveau repère, cela revient à avoir que la surface passe par le point de coordonnées $(0, 0, 0)$ et que le plan tangent en ce point est horizontal. Dans ce cas là, un développement limité de ϕ en $(0, 0)$ donne :

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2} D\phi(0, 0)(x, y)^2 + o((x^2 + y^2)),$$

avec

$$D^2\phi(0, 0)((x, y), (x, y)) = x^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(0, 0) + 2xy \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(0, 0) + y^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(0, 0).$$

La forme bilinéaire symétrique $D^2\phi(0, 0)((x, y), (x, y))$ donne des informations sur l'allure locale de la surface en $(0, 0, 0)$. Elle correspond en fait à la courbure de la surface en $(0, 0, 0)$ et est appelé **deuxième forme fondamentale** (on donnera par la suite une définition plus classique de la deuxième forme fondamentale).

1.3 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

La notion de sous-variété généralise la notion de surface régulière. Il existe plusieurs définitions équivalentes. En voici une :

Définition 5 *Un sous-ensemble M de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension k de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $x \in M$ il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage Ω de 0 dans $\mathbb{R}^k$ et une application $j : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geq 1$) telle que :*
- $j(0) = x$
- $j(\Omega) = U \cap M$
- $j : \Omega \to U \cap M$ *est un homéomorphisme*
- *le rang de la différentielle $Dj(0)$ de j en 0 vaut k.*

L'application j est appelée une paramétrisation locale. On définit alors l'espace tangent à M en x par :

$$T_x M = Im(Dj(0)).$$

D'autre part, si $j_2 : \Omega_2 \to U_2 \cap M$ est une autre paramétrisation au voisinage de x, alors l'application

$$j_2^{-1} \circ j : j^{-1}(U \cap U_2 \cap M) \subset \mathbb{R}^2 \to j_2^{-1}(U \cap U_2 \cap M) \subset \mathbb{R}^2$$

est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme qui est appelé changement de variable. Ceci permet en particulier de montrer que l'espace tangent ne dépend pas de la paramétrisation locale j choisie.

• Application différentiable entre variétés

Soit M_1 une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, M_2 une sous-variété de $\mathbb{R}^p$ et $\varphi : M_1 \to M_2$ une application. Soit $x \in M_1$. Par définition des sous-variétés, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} x \in M_1 \cap U_1 & \overset{\varphi}{\longrightarrow} & \varphi(x) \in M_2 \cap U_2 \\ j_1 \uparrow & & \uparrow j_2 \\ \Omega_1 & \overset{j_2^{-1} \circ \varphi \circ j_1}{\longrightarrow} & \Omega_2 \end{array}$$

On dit que φ est différentiable en $x \in M_1$ si localement l'application $j_2^{-1} \circ \varphi \circ j_1 : \Omega_1 \to \Omega_2$ est différentiable.

Prenons maintenant un vecteur $X \in T_x M_1$. Alors il existe une courbe γ de Ω_1 telle que $j_1(\gamma(0)) = x$ et $X = (j_1 \circ \gamma)'(0)$. On définit alors la différentielle de φ en x par :

$$\begin{array}{rccl} D\varphi(x) : & T_x M_1 & \to & T_{\varphi(x)} M_2 \\ & X & \mapsto & (\varphi \circ j_1 \circ \gamma)'(0), \end{array}$$

On peut montrer que cette définition est cohérente, dans le sens où elle ne dépend pas de la paramétrisation j_1 ni de la courbe γ. D'autre part, $D\phi(x)$ est une application linéaire.

On dit qu'une application $\phi : M_1 \to M_2$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme si ϕ est de classe $\mathcal{C}^k$, bijective et si ϕ et ϕ^{-1} sont différentiables.

On dit qu'une sous-variété M est orientable s'il existe une famille de paramétrisations $j_i : \Omega_i \to M_i = U_i \cap M$, telle que $M = \cup_i M_i$ est telle que les changements de paramétrisations $j_i^{-1} \circ j_h$ soient des difféomorphismes de jacobien positif.

1.4 Formes fondamentales d'une surface régulière de $\mathbb{R}^3$

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière, $S = f(U)$ et $m_0 = f(u_0, v_0) \in S$. On remarque que S admet une orientation liée à la paramétrisation.

1.4.1 Première forme fondamentale

Par définition, la première forme fondamentale en m_0 est la restriction du produit scalaire de $\mathbb{R}^3$ à l'espace tangent $T_{m_0}S$. C'est donc la forme bilinéaire symétrique définie positive donnée par :

$$\begin{array}{rrcl} I_{m_0}: & T_{m_0}S \times T_{m_0}S & \to & \mathbb{R} \\ & (X,Y) & \mapsto & < X, Y >, \end{array}$$

où $< .,. >$ est le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

On peut avoir une expression matricielle de I_{m_0} et exprimer les coefficients de cette matrice en fonction de la paramétrisation f.

Remarque 2 *Le calcul de l'aire d'une surface, le calcul de la longueur d'une courbe dépendent de la forme première forme fondamentale.*

1.4.2 Deuxième forme fondamentale

L'application de Gauss est l'application suivante :

$$\begin{array}{rrcl} N: & S & \to & \mathbb{S}^2 \\ & m & \mapsto & N(m), \end{array}$$

où $N(m)$ est la normale unitaire orientée à S en m. Cette application est différentiable et on a le lemme suivant :

Lemme 1 *La différentielle $DN(m)$ est un endomorphisme autoadjoint de T_mS.*

Par définition, l'endomorphisme de Weingarten est $A_m = -DN(m)$. Un résultat classique d'algèbre implique que cet endomorphisme est diagonalisable dans une base orthonormale (V_1, V_2) de T_mS, où V_i est un vecteur propre de $DN(m)$ associé à une valeur propre λ_i. De plus, on a :

$$\lambda_1 = \min_{X \neq 0} \frac{< -DN(m)X, X >}{\|X\|^2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \max_{X \neq 0} \frac{< -DN(m)X, X >}{\|X\|^2}.$$

On peut maintenant donner les définitions suivantes :

Définition 6
- *V_1 et V_2 sont appelées les directions principales de S en m.*
- *λ_1 et λ_2 sont appelées les courbures principales de S en m.*
- *La courbure de Gauss en m est $G(m) = \det(A_m) = \lambda_1 \lambda_2$.*
- *La courbure moyenne en m est $H(m) = Trace(A_m) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$.*
- *La deuxième forme fondamentale fondamentale en m est donnée par :*

$$\begin{array}{rrcl} II_{m_0}: & T_{m_0}S \times T_{m_0}S & \to & \mathbb{R} \\ & (X,Y) & \mapsto & < -DN(m)X, Y >, \end{array}$$

D'après le lemme précédent, on sait que la deuxième forme fondamentale est une forme bilinéaire symétrique. Comme le montre la proposition suivante, cette forme fondamentale permet d'avoir la courbure de la surface dans une direction donnée.

Proposition 3 *Si $C : I \to S$ est une courbe régulière de classe $\mathcal{C}^2$ sur S paramétrée par abscisse curviligne, alors*

$$II_{m_0}(C'(s_0), C'(s_0)) = k(s_0) < N^S(m_0), N^C(m_0) >,$$

où $k(s_0)$ est la courbure de S en m_0, $N^S(m_0)$ est la normale unitaire orientée à S en m_0 et $N^C(m_0)$ est la normale principale à la courbe C en m_0.

2 Historique

On donne ici deux points de vue sur les mesures de courbures, plus anciens et plus élémentaires que la théorie du cycle normal car ils peuvent préparer l'intuition du lecteur.

2.1 Formule des tubes dans deux cas simples

2.1.1 Surface lisse dans $\mathbb{R}^3$ bordant un ensemble compact

Soit V un compact de $\mathbb{R}^3$ dont le bord $S = \partial V$ est une surface de classe C^2. Pour un point $x \in S$, on note $\overrightarrow{n_S}(x)$ le vecteur normal à S en x dirigé vers l'extérieur de V. On considère la fonction ϕ définie par :

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{R}^+ \times S & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (t,x) & \mapsto & \phi(t,x) = x + t\,\overrightarrow{n_S}(x) \end{array}.$$

Dans ce cas le *reach* de V est le supremum des $h \geq 0$ tels que ϕ restreint à $[0,h] \times S$ est injectif (on donne plus loin une définition du reach pour des ensembles plus généraux). Dans la mesure où V est compact et $S = \partial V$ est de classe C^2 il est possible de montrer que le reach de V est strictement positif. Pour $h > 0$, on note V^h le voisinage tubulaire de V de rayon h :

$$V^h = \{x \in \mathbb{R}^3, d(x,V) \leq h\}.$$

Lorsque h est plus petit que le reach de V, la restriction de ϕ à $[0,h] \times S$ est injective et la formule classique donne le volume de l'image $V^h \setminus V$ comme intégrale du jacobien :

$$\mathrm{Vol}(V^h \setminus V) = \mathrm{Vol}(V^h) - \mathrm{Vol}(V) = \int_0^h \int_S |\operatorname{Jac}(\phi)|\, d\mathcal{A}\, dt,$$

où $\operatorname{Jac}(\phi)$ désigne le jacobien de ϕ. $\operatorname{Jac}(\phi)$ ne dépend pas de la paramétrisation de S. On choisit de paramétrer S par la projection sur le plan tangent en x avec un repère centré en x et aligné sur les directions principales de courbures. Si on prend comme base du plan tangent à $[0,h] \times S$ en (t,x) le vecteur $\overrightarrow{n_S}(x)$ et deux vecteurs colinéaires aux directions principales de courbure et pour base du plan tangent à $\mathbb{R}^3$ en $\phi(t,x)$ la direction $\overrightarrow{n_S}(x)$ suivie des mêmes deux vecteurs colinéaires aux directions principales de courbure, on a :

$$\operatorname{Jac}(\phi)(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - t\kappa_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - t\kappa_2 \end{pmatrix},$$

où κ_1 et κ_2 sont les courbures principales en x, c'est à dire les valeurs propres de l'endomorphisme de Weingarten qui est, au signe près, la différentielle de la fonction de Gauss $x \mapsto \overrightarrow{n_S}(x)$. On peut montrer que κ_1 et κ_2 sont plus petits, en valeur algébrique que $\frac{1}{\mathrm{reach}(V)}$ (mais peuvent avoir une valeur absolue arbitrairement grande si ils sont négatifs) d'où il résulte que les quantités $1-t\kappa_1$ et $1-t\kappa_2$ sont positives. Le déterminant est donc positif et on a :

$$|\operatorname{Jac}(\phi)| = (1 - t\kappa_1)(1 - t\kappa_2) = 1 - t(\kappa_1 + \kappa_2) + t^2\kappa_1\kappa_2,$$

dont on déduit :

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(V^h \setminus V) &= \mathrm{Vol}(V^h) - \mathrm{Vol}(V) \\ &= h \int_S d\mathcal{A} \;+\; \frac{h^2}{2} \int_S -(\kappa_1 + \kappa_2) d\mathcal{A} \;+\; \frac{h^3}{3} \int_S \kappa_1\kappa_2 d\mathcal{A}. \end{aligned}$$

$\mathrm{Vol}(V^h)$ est donc un polynôme de degré 3 dont les coefficients de degré 0,1, 2 et 3 sont respectivement le volume de V, l'aire $A(V)$ de S , $\frac{1}{2}$ fois la mesure de courbure moyenne $H(V)$ et $\frac{1}{3}$ fois la mesure de courbure de Gauss $K(V)$:

$$\mathrm{Vol}(V^h) = \mathrm{Vol}(V) + A(V)h + \frac{1}{2}H(V)h^2 + \frac{1}{3}K(V)h^3$$

avec :

$$\begin{array}{rcl} A(V) & = & \int_S d\mathcal{A}, \\ H(V) & = & \int_S -(\kappa_1+\kappa_2)d\mathcal{A}, \\ K(V) & = & \int_S \kappa_1\kappa_2 d\mathcal{A}. \end{array}$$

2.1.2 Polyèdres convexe dans $\mathbb{R}^3$

Si V est un polyèdre convexe dans $\mathbb{R}^3$ et $p \in \partial V$ un point sur son bord, on considère le cône normal $CN_V(p)$:

$$CN_V(p) = \{v,\ \|v\| = 1 \text{ et } \forall q \in V\ \overrightarrow{pq}.v \leq 0\}.$$

On a :

$$V^h \setminus V = \bigcup_{\substack{p\in\partial V \\ n\in CN_V(p)}} \{p + tn\,,\, t \in (0, h]\}, \tag{1}$$

où $(0, h]$ est l'intervalle ouvert en 0 et fermé en h. De plus cette représentation est une partition dans le sens où :

$$p_1 \neq p_2 \Rightarrow \left[\bigcup_{n\in CN_V(p_1)} \{p_1 + tn\,,\, t \in (0, h]\}\right] \cap \left[\bigcup_{n\in CN_V(p_2)} \{p_2 + tn\,,\, t \in (0, h]\}\right] = \emptyset.$$

Détaillons la forme de $CN_V(p)$ suivant que p est dans l'intérieur relatif d'une face, l'intérieur relatif d'une arête ou en un sommet. Si p est dans l'intérieur relatif d'une face f, $CN_V(p) = \{n_f\}$ où n_f est la normale (sortante) à la face f. Si p est dans l'intérieur relatif d'une arête e, $CN_V(p)$ est un arc de grand cercle orthogonal à e et d'angle $\beta(e)$, où $\beta(e)$ est l'angle dièdre externe en e, c'est à dire l'angle entre les normales des deux faces adjacentes à e. Si p est sur un sommet s, $CN_V(p)$ est un polygone sphérique dont l'aire est

$$2\pi - \sum_{f\in F(s)} \alpha_{f,s},$$

où $\alpha_{f,s}$ est l'angle externe entre deux arcs successifs du polygone sphérique et $F(s)$ désigne l'ensemble des faces adjacentes à s sur la peau du polyèdre. Chaque arc étant orthogonal à une arête adjacente au sommet, l'angle $\alpha_{f,s}$ correspond en fait à l'angle en s de la face f.

Ainsi, la mesure du volume de la partie de $V^h \setminus V$ située au dessus d'une face f d'aire $A(f)$ est :

$$hA(f).$$

La mesure du volume de la partie de $V^h \setminus V$ située au dessus d'une arête e de longueur $\mathrm{long}(e)$ et d'angle dièdre externe $\beta(e)$ est :

$$\frac{h^2}{2}\mathrm{long}(e)\beta(e).$$

La mesure du volume de la partie de $V^h \setminus V$ située au dessus d'un sommmet s est :

$$\frac{h^3}{3}\left(2\pi - \sum_{f\in F(s)} \alpha_{f,s}\right).$$

L'équation (1) donne alors

$$\mathrm{Vol}(V^h) = \mathrm{Vol}(V) + A(V)h + \frac{1}{2}H(V)h^2 + \frac{1}{3}K(V)h^3$$

avec, si $\mathfrak{F}(V)$, $\mathfrak{E}(V)$ et $\mathfrak{V}(V)$ désigne respectivement les ensembles de faces, arêtes et sommets de V :

$$\begin{aligned}
A(V) &= \sum_{f\in\mathfrak{F}(V)} A(f) \\
H(V) &= \sum_{e\in\mathfrak{E}(V)} \mathrm{long}(e)\beta(e) \\
K(V) &= \sum_{s\in\mathfrak{V}(V)} \left(2\pi - \sum_{f\in F(s)} \alpha_{f,s}\right).
\end{aligned}$$

2.1.3 Généralisations

Steiner a montré que la formule des tubes s'applique à tout convexe. Federer a montré qu'elle s'applique à tout ensemble à reach positif. C'est à dire que le volume du tube reste un polynôme dont les coefficients peuvent encore être interprétés comme des mesures de courbure.

2.2 Courbures discrètes "à la" Banchoff

Le matériel présenté ici est tiré de [1]. Restreint au cas des "complexes cellullaires convexes plongés" ce point de vue fourni des preuves complètement élémentaires pour les équivalents discrets de la théorie de Morse, du théorème Egregium de Gauss (caractère intrinsèque de la courbure de Gauss) ainsi que du théorème de Gauss-Bonnet.

Pour un entier $k \geq 0$, une *cellule convexe de dimension* k (où k*-cellule* pour faire court) se définit récursivement de la façon suivante. Une 0-cellule est un point. Pour $k \geq 1$, une k-cellule est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ tel que la dimension du plus petit espace affine le contenant est k et dont le bord est une union finie de $k-1$-cellules. On appelle ici *complexe cellullaire convexe plongé* un ensemble de cellules convexes de dimension au plus k tel que l'intersection de deux cellules distinctes du complexe est soit vide, soit une autre cellule du complexe de dimension strictement inférieure. On dit qu'un complexe cellullaire convexe plongé est de dimension k si ses cellules de plus grande dimension sont de dimension k. Un cas particulier plus connu de complexe cellullaire convexe plongé est un *complexe simplicial plongé* caractérisé par le fait que les k-cellules sont des k-simplexes. (Un k-simplexe est l'enveloppe convexe d'un ensemble de $k+1$ points affinements indépendants : les 0-simplexes sont donc des points ; les 1-simplexes des segments ; les 2-simplexes des triangles et les 3-simplexes des tétraèdres.)

Dans la suite de cette section, M^k est un complexe cellullaire convexe plongé de dimension k et C^r une r-cellule de M^k.

Définition 7 *Si v est un sommet de M^k et ξ un vecteur unitaire, on définit $A(C^r, v, \xi)$ de la façon suivante :*

$$A(C^r, v, \xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in C^r \text{ et } \forall x \in C^r \ < \xi, v > \geq < \xi, x > \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

Autrement dit, $A(C^r, v, \xi)$ vaut 1 si v est un sommet de C^r et est maximum sur C^r dans la direction ξ ; il vaut 0 sinon.

On dit que ξ est *générique* pour M^k, si M^k ne contient pas d'arête orthogonale à ξ, ou, dit autrement, si pour toute arête C^1 de M^k, si V_0 et V_1 sont les sommets de C^1, on a $< V_0, \xi > \neq < V_1, \xi >$. On peut remarquer que "presque tous" les ξ sont génériques.

Lemme 2 *Si ξ est générique pour M^k, alors :*

$$\sum_{v \in M^k} A(C^r, v, \xi) = 1$$

Preuve :
Si ξ est générique pour M^k, la fonction $x \mapsto <\xi, x>$ atteint son maximum en exactement un sommet de C^r. □

Définition 8 *On définit $a(v, \xi)$ l'index du sommet v dans la direction ξ.*

$$a(v, \xi) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \sum_{C^r \in M^k} A(C^r, v, \xi).$$

On a alors un équivalent discret du théorème des points critiques en théorie de Morse qui relie les indices des points critiques d'une fonction "hauteur" définie sur la variété à la caractéristique d'Euler de la variété.

Théorème 2 (Critical Point Theorem) *Si ξ est générique pour M^k, alors :*

$$\sum_{v \in M^k} a(v, \xi) = \chi(M^k).$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \sum_{v \in M^k} a(v, \xi) &= \sum_{v \in M^k} \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \sum_{C^r \in M^k} A(C^r, v, \xi) \\ &= \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \sum_{C^r \in M^k} \sum_{v \in M^k} A(C^r, v, \xi). \end{aligned}$$

Soit, d'après le lemme 2 :

$$\sum_{v \in M^k} a(v, \xi) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \sum_{C^r \in M^k} 1 = \chi(M^k).$$

□

On appelle maintenant C_{n-1} le volume de la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$:

$$C_{n-1} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\omega^{n-1}.$$

On a par exemple $C_0 = 2$,$C_1 = 2\pi$ et $C_2 = 4\pi$.

Définition 9 *La courbure $K(v)$ en un sommet v de M^k vaut :*

$$K(v) = \frac{1}{C_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} a(v, \xi) d\omega^{n-1}.$$

Si Ω est ouvert de M^k, on a :

$$K(\Omega) = \sum_{v \in \Omega} K(v)$$

et en particulier :

$$K(M^k) = \sum_{v \in M^k} K(v).$$

Cette définition est a priori *extrinsèque*, dans la mesure où l'intégration est faite sur toutes les directions de l'espace ambient, elle dépend a priori de la façon dont M^k est plongée dans l'espace ambiant $\mathbb{R}^n$. Nous donnons plus bas une définition intrinsèque.

Une simple intégration sur $\mathbb{S}^{n-1}$ de chaque membre de l'équation du théorème 2 suivie d'une normalisation par C_{n-1} donne :

Théorème 3 (Gauss-Bonnet discret)

$$K(M^k) = \chi(M^k)$$

Nous montrons maintenant la version discrète du "theorem egregium" de Gauss, c'est à dire le caractère intrinsèque de la courbure $K(M^k)$.

Définition 10 *On définit l'angle extérieur normalisé d'une r-cellule C^r en un sommet v :*

$$\mathcal{E}(C^r, v) = \frac{1}{C_{r-1}} \int_{\mathbb{S}^{r-1}} A(C^r, v, \xi) d\omega^{r-1}$$

Dans le cas particulier $r = 0$, on pose $\mathcal{E}(v, v) = 1$ et, si $w \neq v$ $\mathcal{E}(w, v) = 0$.

Si $r = 1$, on a $\mathcal{E}(C^r, v) = \frac{1}{2}(A(C^1, v, 1) - A(C^1, v, -1))$. Il faut bien noter dans la définition ci-dessus que l'intégration se fait sur $\mathbb{S}^{n-1}$, donc ne concerne que la géométrie de C^r dans son espace affine support de dimension r et est dans ce sens "intrinsèque". Par exemple si C^r est un triangle, cette quantité dépend de la géométrie du triangle et pas de la façon dont il est plongé dans un espace de dimension supérieure à 2.

Un simple calcul d'intégration montre le lemme suivant :

Lemme 3

$$\mathcal{E}(C^r, v) = \frac{1}{C_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} A(C^r, v, \xi) d\omega^{n-1}.$$

On en déduit alors directement :

Théorème 4 (Gauss Egregium discret)

$$K(v) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \sum_{C^r \in M^k} \mathcal{E}(C^r, v).$$

On peut aussi facilement énoncer le théorème suivant :

Théorème 5 (Gauss-Bonnet intrinsèque discret)

$$\sum_{v \in M^k} K(v) = \chi(M^k)$$

Le théorème est dit intrinsèque car l'expression de $K(v)$ donnée dans le théorème 4 est purement intrinsèque.

3 Introduction aux courants

Dans cette partie, on introduit les notions de base sur les courants qui seront utilisées dans la suite. Dans la partie 3.1, on définit les ensembles rectifiables, qui sont des ensembles qui ne sont pas forcément lisses, mais sur lesquels il est possible de faire du calcul intégral. Dans la partie 3.2, on définit les formes différentielles sur des variétés. Dans la partie 3.3, on définit les courants et on s'intéresse en particulier aux courants rectifiables (un courant est dit rectifiable s'il correspond à l'intégration sur un ensemble rectifiable). On mentionne des résultats importants portant sur les courants rectifiables.

Pour plus de détails, le lecteur pourra regarder le livre de Franck Morgan [9] ou de Jean-Marie Morvan [10].

3.1 Ensembles rectifiables

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $m \in \mathbb{N}$.

3.1.1 Mesure de Hausdorff

La mesure de Hausdorff est une mesure qui est définie de la manière suivante :

Définition 11 *La m-mesure de Hausdorff de A est donnée par*

$$\mathcal{H}^m(A) = \lim_{\delta \to 0} \inf_{\substack{diam(S_i) \leq \delta \\ A \subset \cup_i S_i}} \sum_i \alpha_m \left(\frac{diam(S_i)}{2} \right)^m ,$$

où α_m est le volume de la sphère unité de $\mathbb{R}^m$ et $diam(S_i) = \sup_{x,y \in S_i} \|x - y\|$.

Comme l'indique la proposition suivante, cette notion coïncide avec la notion de volume pour des sous-variétés de dimension m.

Proposition 4

1. *Si M est une sous-variété de dimension m alors $\mathcal{H}^m(M)$ est égal au volume de M.*
2. *Sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^n$ est égale à la mesure de Lebesgues.*

3.1.2 Ensembles rectifiables

Définition 12 *L'ensemble A est dit m-rectifiable si $\mathcal{H}^m(A) < +\infty$ et s'il existe une famille dénombrable de fonctions lipschitziennes $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ telle que $A \subset \cup_i f_i(\mathbb{R}^m)$ $\mathcal{H}^m$-presque partout.*

La proposition suivante indique qu'un sous-ensemble m-rectifiable a un espace tangent de dimension m $\mathcal{H}^m$-presque partout.

Proposition 5 *Soit $A \subset$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Les deux propositions sont équivalentes :*

1. *A est une réunion dénombrable d'ensembles m-rectifiable,*
2. *A est inclus $\mathcal{H}^m$ presque partout dans une réunion dénombrable de sous-variétés de dimension m de classe $\mathcal{C}^1$.*

Exemples d'ensembles rectifiables

1. Une réunion dénombrable de surfaces dont la somme des aires converge est un ensemble 2-rectifiable.
2. Exemple du Morgan (page 29-30).

Beaucoup d'ensembles sont rectifiables. Du point de vue de la mesure, les ensembles rectifiables se comportent comme des surfaces (on peut effectivement intégrer, car les espaces tangents sont définis presque partout pour la mesure de Hausdorff).

Exemple d'ensemble non rectifiables
La courbe de Von Koch, aussi appelée courbe du flocon de neige est une courbe non 1-rectifiable.

3.2 Formes différentielles sur des variétés

3.2.1 Applications multilinéaires alternées

Une application $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n ... \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite m-linéaire alternée si elle est linéaire par rapport à chacune de ses m variables et si

$$\forall i \neq j \text{ si } x_i = x_j \text{ alors } f(x_1, ..., x_m) = 0.$$

Exemple

1. Dans $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique $(e_1, ..., e_n)$, l'application

$$(v_1, ..., v_n) \mapsto det(v_1, ..., v_n)$$

   est une forme n-linéaire alternée.
2. Une forme linéaire est une forme 1-linéaire alternée.

Produit extérieur de formes linéaires
Si on a m formes linéaires $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (pour $1 \leq i \leq m$), alors leur produit extérieur est une forme m-linéaire alternée définie par :

$$(f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_m)(x_1, ..., x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \epsilon(\sigma) f_1(x_{\sigma(1)}) ... f_m(x_{\sigma(m)}).$$

Décomposition des formes m-linéaires alternées
Si f est une forme m-linéaire alternée, alors il existe une unique famille $(c_{i_1,...,i_m})$ de nombres réels telle que :

$$f = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_m \leq n} c_{i_1,...,i_m} \, dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_m},$$

où $dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est la fonction qui donne la $i^{\text{ème}}$ composante.

En particulier

1. L'ensemble des formes m-linéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension C_n^m.
2. Toute forme bilinéaire alternée $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s'écrit de la forme $f = C \, dx_1 \wedge dx_2$.
3. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont deux applications linéaires, alors on a :

$$(f \wedge g)(x, y) = f(x)g(y) - f(y)g(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f(y) & g(y) \end{vmatrix}.$$

La proposition suivante sera utile par la suite.

Proposition 6 *Si $f : \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une forme n-linéaire alternée et si $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire, alors pour tout $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^n$:*

$$f(u(x_1), ..., u(x_n)) = det(u) \; f(x_1, ..., x_n).$$

3.2.2 Formes différentielles sur une sous-variété

Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension m.

Définition 13 *Soit $m > 0$. Une m-forme différentielle sur M est une application ω qui à tout $x \in M$ associe une forme m-linéaire alternée sur l'espace tangent T_xM :*

$$\omega_x : T_xM \times ... \times T_xM \to \mathbb{R}.$$

Une 0-forme différentielle est une fonction sur M : à tout $x \in M$ on associe un nombre réel.

Champ de vecteur

Un champ de vecteur X est une application qui à tout $x \in M$ associe un vecteur $X_x \in T_xM$.

Le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ induit un produit scalaire sur chaque espace tangent T_xM. Cela permet d'identifier les vecteurs de T_xM avec les formes linéaires. On peut ainsi définir le produit extérieur de deux champs de vecteurs :

Définition 14 *Si X et Y sont deux champs de vecteurs sur M, alors le produit extérieur de X et Y est la 2-forme différentielle sur M définie par :*

$$\begin{array}{rccl} (X \wedge Y)_x : & T_xM \times T_xM & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & \begin{vmatrix} X_x.u & Y_x.u \\ X_x.v & Y_x.v \end{vmatrix} \end{array}.$$

Remarque 3 *Si (X_x, Y_x) et (X'_x, Y'_x) sont deux bases orthonormées directes de T_xM, alors $X_x \wedge Y_x = X'_x \wedge Y'_x$.*

Preuve :

Soit f une rotation de T_xM telle que $f(X_x) = X'_x$ et $f(Y_x) = Y'_x$. Alors

$$\begin{aligned} (X_x \wedge Y_x)(u,v) &= (X_x \wedge Y_x)(f(u), f(v)) \\ &= \begin{vmatrix} X_x.f(u) & Y_x.f(u) \\ X_x.f(v) & Y_x.f(v) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} f^{-1}(X_x).u & f^{-1}(Y_x).u \\ f^{-1}(X_x).v & f^{-1}(Y_x).v \end{vmatrix} \\ &= (X'_x \wedge Y'_x)(u,v). \end{aligned}$$

□

3.2.3 Intégration d'une m-forme différentielle

Étant donné qu'une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ de dimension m est $\mathcal{H}^m$-mesurable, il est possible d'intégrer des m-formes différentielles sur M, d'où la définition suivante :

Définition 15 *Soit M une sous-variété orientée de dimension m de $\mathbb{R}^n$ et ω une m-forme différentielle sur M. Pour tout $x \in M$, on considère une base orthonormée directe $(e_x^1, ..., e_x^m)$ de T_xM. On pose alors :*

$$\int_M \omega = \int_M \omega_x(e_x^1, ..., e_x^m) d\mathcal{H}^m(x).$$

Cette intégrale est bien définie car elle ne dépend pas en fait de la base orthonormale directe choisie.

Remarque 4 *Classiquement, on définit l'intégrale d'une m-forme à l'aide d'une paramétrisation, puis on montre que l'intégrale est indépendante de la paramétrisation.*

3.2.4 Changement de variables

Définition 16 *Soit $\Phi : M' \to M$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux sous-variétés de dimension m, ω une m-forme différentielle sur M. On définit le pullback $\Phi^*\omega$ de ω par Φ la m-forme différentielle sur M' définie par :*

$$\begin{array}{rccl} \Phi^*\omega_x : & T_xM' \times ... \times T_xM' & \to & \mathbb{R} \\ & (u_1, ..., u_m) & \mapsto & \omega_{\Phi(x)}(D\Phi(x).u_1, ..., D\Phi(x).u_m) \end{array}.$$

On a alors la formule du changement de variable suivante :

Proposition 7

$$\int_{M'} \Phi^*\omega \;=\; \int_{\Phi(M')} \omega.$$

Le $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme Φ est aussi appelé changement de variable.

3.3 Courants généraux

3.3.1 Ensemble $\mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)$ des m-formes différentielles

On note $\mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des m-formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^n$. En identifiant $T_x\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$, toute m-forme $\varphi \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)$ s'écrit de la forme :

$$\varphi = \sum_{1\leq i_1\leq ...\leq i_m\leq n} f_{i_1,...,i_m}\ dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_m},$$

où les $f_{i_1,...,i_m}$ appartiennent à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^n$.
Le support $spt(\varphi)$ de φ est l'adhérence de l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $\varphi(x) \neq 0$.
La masse de $\varphi(x)$ est donnée par :

$$\|\varphi(x)\|^* = \sup\{\varphi(x)(\xi_1, ..., \xi_m),\ \xi_i \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|\xi_i\| \leq 1\}.$$

Topologie $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)$
On considère une suite $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)$. On a alors :

$$\varphi_n(x) = \sum_{1\leq i_1\leq ...\leq i_m\leq n} f^n_{i_1,...,i_m}\ dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_m},$$

et

$$\varphi(x) = \sum_{1\leq i_1\leq ...\leq i_m\leq n} f_{i_1,...,i_m}\ dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_m}.$$

On dit que $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ converge vers φ pour la topologie $\mathcal{C}^\infty$ si :

1. Il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^n$, tel que $spt(\varphi_n) \subset K$ et $spt(\varphi) \subset K$;
2. pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout m-uplet $(i_1, ..., i_m)$, la différentielle $D^{(k)} f^n_{i_1,...,i_m}$ converge uniformément sur K vers la différentielle $D^{(k)} f_{i_1,...,i_m}$.

3.3.2 Dérivée extérieure et Formule de Stockes

Soit $\varphi \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)$ une m-forme différentielle. Alors, φ s'écrit de la forme :

$$\varphi(x) = \sum_{1\leq i_1\leq ...\leq i_m\leq n} f_{i_1,...,i_m}\ dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_m}.$$

La dérivée extérieure $d\varphi$ de φ est la $(m+1)$-forme différentielle définie par :

$$d\varphi = \sum_{1\leq i_1\leq ...\leq i_m\leq n} df_{i_1,...,i_m} \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_m},$$

avec

$$df_{i_1,...,i_m} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1,...,i_m}}{\partial x_i}\ dx_i.$$

On a alors la formule de Stockes :

Théorème 6 *Soit M une sous-variété orientée de classe $\mathcal{C}^1$ de dimension m dans $\mathbb{R}^n$. L'orientation de M induit naturellement une orientation sur ∂M. Pour toute $(m-1)$-forme différentielle ω sur M, on a :*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

La dérivée extérieure et la formule de Stockes nous permettent de retrouver des résultats connus en physique :

Exemple 1

1. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ est vue comme une 0-forme et on a $df(x) = f'(x)dx$. La formule de Stockes avec $M = [a, b]$ et $\partial M = \{a, b\}$ donne la formule suivante :*

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

On remarque que si on prend une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors on a $df(x) = Df(x)$.

2. *Soit $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^3)$. Alors f s'écrit de la forme :*

$$f(x, y, z) = f_1(x, y, z)dx + f_2(x, y, z)dy + f_3(x, y, z)dz.$$

Soit S une surface orientée régulière de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^3$, dont le bord ∂S est une courbe de classe $\mathcal{C}^1$. On note $\overrightarrow{n}$ le champ de vecteur normal unitaire orienté de S, et $\overrightarrow{dl}$ le champ de vecteur tangent unitaire orienté de ∂S. Soit $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ un champ de vecteur de classe $\mathcal{C}^1$ défini dans un voisinage de S. Alors, on a :

$$\int_S < \overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{V}), \overrightarrow{n} >= \int_{\partial S} < \overrightarrow{V}, \overrightarrow{dl} > .$$

3. *Soit $\alpha \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}^3)$. Alors α s'écrit de la forme*

$$\alpha = f \ dy \wedge dz + g \ dz \wedge dx + h \ dx \wedge dy.$$

Un simple calcul donne :

$$d\alpha = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz = div(f, g, h) \ dx \wedge dy \wedge dz.$$

Soit V est un domaine compact de $\mathbb{R}^3$ dont le bord ∂V est une surface régulière de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $\overrightarrow{X}$ un champ de vecteurs défini dans un voisinage de V, et $\overrightarrow{n}$ le champ de vecteur normal unitaire de ∂V sortant de V. Alors on obtient donc la formule d'Ostrogradsky qui permet de calculer le flux de $\overrightarrow{X}$ à travers ∂V :

$$\int_V div(\overrightarrow{X}) \ dx \wedge dy \wedge dz = \int_{\partial V} < \overrightarrow{X}, \overrightarrow{n} > .$$

3.3.3 L'espace vectoriel $\mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$ des m-courants

L'espace vectoriel $\mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$ des m-courants est le dual topologique de $\mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)$. Autrement dit, $\mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)$. Un m-courant $T \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$ est donc une application linéaire continue :

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n) & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi & \mapsto & T(\varphi) \end{array}.$$

Topologie faible
On dit qu'une suite de m-courants $(T_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers T si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n) \quad T_n(\varphi) \to T(\varphi).$$

Support d'un courant
Le support $spt(T)$ de T est le plus petit fermé C tel que :

$$spt(\varphi) \cap C = \emptyset \;\Rightarrow\; T(\varphi) = 0.$$

Exemples

1. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ et $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Alors l'application
$$\omega \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}^2) \mapsto \omega(x)(v_1, v_2)$$
est un courant.
2. Soit S une surface régulière orientée de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$. Alors l'application :
$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{D}^2(\mathbb{R}^n) & \to & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & \int_S \omega \end{array}$$
est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}^n)$, donc un courant de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R}^n)$.
3. Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble m-rectifiable. Alors S admet un espace tangent $\mathcal{H}^m$-presque partout. Si de plus S est orienté, alors on définit le courant $T \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)$ par :
$$T(\varphi) = \int_S \varphi(e_x^1, ..., e_x^m) \; d\mathcal{H}^m(x),$$
où $(e_x^1, ..., e_x^m)$ est une base orthonormée directe de $T_x S$. (Cette définition ne dépend pas du choix de la base orthornormée $(e_x^1, ..., e_x^m)$.)
Dans ce cas, par abus de notation, S désigne aussi bien l'ensemble rectifiable que le courant T.

3.3.4 Opérations sur les courants

Bord
Soit $T \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$ un m-courant. Alors on définit un $(m-1)$-courant ∂T par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}^{m-1}(\mathbb{R}^n) \quad \partial T(\varphi) = T(d\varphi),$$

où $d\varphi$ est la dérivée extérieure de φ.

Remarque 5 *Cette définition est cohérente dans le cas lisse avec la formule de Stockes. En effet, si T est défini par intégration sur une sous-variété S, alors ∂T correspond à l'intégration sur la sous-variété ∂S :*

$$\partial T(\varphi) = T(d\varphi) = \int_S d\varphi = \int_{\partial S} \varphi.$$

Push-forward
Soit $T \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec $U \supset spt(T)$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que quel que soit K compact de $\mathbb{R}^p$, $f^{-1}(K)$ est un compact. Le push-forward $f_\sharp T \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^p)$ est défini par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^p) \quad f_\sharp T(\varphi) = T(f^*\varphi).$$

3.3.5 Courants rectifiables et intégraux

Il existe plusieurs catégories de courants. Nous allons citer deux catégories de courants qui seront utiles par la suite :

Définition 17 *Un m-courant T est dit rectifiable si*

1. *Le support $S = spt(T)$ de T est m-rectifiable, compact et orienté ;*
2. *Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$T(\varphi) = \int_S \mu(x)\varphi(e_x^1, ..., e_x^m)\ d\mathcal{H}^m(x),$$

où $(e_x^1, ..., e_x^m)$ est une base orthonormée directe de T_xS, $\mu(x) \in \mathbb{Z}$ est la multiplicité et vérifie $\int_S \mu(x) d\mathcal{H}^m(x) < \infty$.

Notation
Dans le cas où $\mu(x) = k$ est constant, on écrit $T = k.S$.

Remarque 6 *Un courant T peut être rectifiable sans que son bord le soit.*

Définition 18 *Un courant T est dit intégral si T est rectifiable et ∂T est rectifiable.*

3.3.6 Autres topologies sur $\mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$

Nous pouvons aussi définir deux semi-normes sur $\mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$.

Définition 19 *Soit $T \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$.*

1. *La masse $M(T)$ est donnée par :*

$$M(T) = \sup\{T(\varphi),\ \varphi \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)\ \textit{et}\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ \|\varphi(x)\|^* \leq 1\}.$$

2. *La norme plate $\mathcal{F}(T)$ est donnée par :*

$$\mathcal{F}(T) = \inf \left\{ M(A) + M(B),\ T = A + \partial B,\ \begin{array}{l} A\ est\ m - rectifiable \\ B\ est\ (m+1) - rectifiable \end{array} \right\}.$$

Remarque 7 *La masse d'un courant rectifiable est la mesure de Hausdorff de son support (comptée avec la valeur absolue de son ordre de multiplicité).*

Exemple
Deux disques du Morgan (page 40).

Remarque 8 *La topologie faible est plus faible que la norme plate, qui est plus faible que la masse.*

Proposition 8

$$\mathcal{F}(T) = \sup\{T(\varphi),\ \varphi \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n),\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ \|\varphi(x)\|^* \leq 1\ \textit{et}\ \|\ d\varphi(x)\|^* \leq 1\}.$$

La preuve repose sur le théorème d'Hahn-Banach et peut être trouvée dans Federer ([7] p. 367).

3.3.7 Résultats importants sur les courants intégraux

On mentionne ici deux résultats importants sur les courants. Le premier théorème est un résultat de compacité qui est utile pour avoir des résultats de convergence. Il est en particulier utile pour montrer l'existence de surfaces minimales. Le deuxième théorème donne une condition suffisante pour qu'un courant corresponde à l'intégration sur une sous-variété.

Théorème 7 *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors l'ensemble*

$$\{T \in D_m(\mathbb{R}^n) \textit{ intégral}, \; spt(T) \subset K, \; M(T) \leq c \textit{ et } M(\partial T) \leq c\}$$

est compact pour la norme plate.

Théorème 8 *Soit A une sous-variété de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ et T un m-courant intégral tel que $spt(T) \subset A$ et $spt(\partial T) \subset \partial A$. Alors*

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad T = k.A.$$

4 2-formes invariantes sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$

On a vu dans la section 2 qu'il pouvait être utile de considérer une surface de $\mathbb{R}^3$ avec ses normales unitaires. Un tel objet est un ensemble 2-rectifiable dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$. Dans le chapitre suivant, on intègrera des 2-formes sur ces ensembles. Étant donné que l'on cherche au final à mesurer des quantités géométriques qui ne dépendent pas de la position dans l'espace, il est alors naturel de s'intéresser aux 2-formes de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ qui sont invariantes par déplacement.

4.1 Action du groupe des déplacements sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$

Soit G le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^3$. Alors tout déplacement $g \in G$ se décompose de manière unique en une rotation et une translation : $g = r + t$, où t est une translation qui correspond à la partie affine et r est une rotation qui correspond à la partie linéaire. On peut alors faire agir G sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ de la manière suivante :

$$\forall (m, \xi) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2,\ g.(m, \xi) = (g(m), r(\xi)) \quad \text{où } g = r + t.$$

Définition 20 *Soit $\omega \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2)$ une 2-formes différentielle sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$. On dit que ω est invariante par déplacement si*

$$\forall g \in G \quad g^* \omega = \omega.$$

On note $\mathcal{D}^2_{Inv}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2)$ l'ensemble des 2-forme différentielle sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ invariantes par déplacement.

Remarque 9 *Une 2-forme ω sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ est invariante si pour tout $(m, \xi) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ et pour tout $X, Y \in T_{(m,\xi)}\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$, on a :*

$$(g^*\omega)_{(m,\xi)}(X, Y) = \omega_{g(m,\xi)}(Dg(m, \xi).X, Dg(m, \xi).Y) = \omega_{(m,\xi)}(X, Y).$$

4.2 Espace des 2-formes invariantes sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$

Soit $(m, \xi) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$. On considère une base orthonormale directe (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que $e_3 = \xi$. Ceci permet de définir une base orthonormale $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \tilde{\epsilon_1}, \tilde{\epsilon_2})$ de $T_{(m,\xi)}\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ par :

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \epsilon_2 = \begin{pmatrix} e_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \epsilon_3 = \begin{pmatrix} e_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{\epsilon_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \end{pmatrix}, \tilde{\epsilon_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

Définition 21 *On considère les 2-formes différentielles ω^A, ω^H, ω^G et Ω de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ définies sur $T_{(m,\xi)}\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ par :*

1. *La "forme d'aire vu de ξ" : $\omega^A_{(m,\xi)} = \epsilon_1 \wedge \epsilon_2$.*
2. *La forme mixte : $\omega^H_{(m,\xi)} = \epsilon_1 \wedge \tilde{\epsilon_2} + \tilde{\epsilon_1} \wedge \epsilon_2$.*
3. *La forme d'aire sur $\mathbb{S}^2$: $\omega^G_{(m,\xi)} = \tilde{\epsilon_1} \wedge \tilde{\epsilon_2}$.*
4. *La forme symplectique : $\Omega_{(m,\xi)} = \epsilon_1 \wedge \tilde{\epsilon_1} + \epsilon_2 \wedge \tilde{\epsilon_2}$.*

Remarque 10 Les 2-formes différentielles ω^A, ω^H, ω^G et Ω sont bien définies, dans le sens où elles ne dépendent pas de la base orthonormale directe (e_1, e_2) choisie.
En effet, prenons $u = (u_p, u_n) \in T_{(m,\xi)}\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ et $v = (v_p, v_n) \in T_{(m,\xi)}\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$. On a alors :

$$(\epsilon_1 \wedge \epsilon_2)(u, v) = (e_1 \wedge e_2)(u_p, v_p),$$

$$(\tilde{\epsilon_1} \wedge \tilde{\epsilon_2})(u, v) = (e_1 \wedge e_2)(u_n, v_n).$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}(\epsilon_1 \wedge \tilde{\epsilon_2} + \tilde{\epsilon_1} \wedge \epsilon_2)(u,v) &= e_1.u_p\ e_2.v_n\ -\ e_1.v_p\ e_2.u_n \\ &\quad + e_1.u_n\ e_2.v_p\ -\ e_1.v_n\ e_2.u_p \\ &= (e_1 \wedge e_2)(u_p, v_n) + (e_1 \wedge e_2)(u_n, v_p).\end{aligned}$$

Prenons maintenant une autre base $(e'_1, e'_2, e'_3 = \xi)$ de $\mathbb{R}^3$. D'après la remarque 3, on a que $e_1 \wedge e_2 = e'_1 \wedge e'_2$ ce qui implique que les formes ω^A, ω^H et ω^G ne dépendent pas de la base orthonormée directe choisie (e_1, e_2). De même, comme $u_n.\xi = 0$ et $v_n.\xi = 0$, on a :

$$\begin{aligned}(\epsilon_1 \wedge \tilde{\epsilon_1} + \epsilon_2 \wedge \tilde{\epsilon_2})(u,v) &= e_1.u_p\ e_1.v_n\ -\ e_1.v_p\ e_1.u_n \\ &\quad + e_2.u_p\ e_2.v_n\ -\ e_2.v_p\ e_2.u_n \\ &= u_p.v_n - u_n.v_p,\end{aligned}$$

ce qui implique aussi que Ω ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie (e_1, e_2).

Proposition 9 *Les 2-formes différentielles ω^A, ω^H, ω^G et Ω sont invariantes par déplacement.*

Théorème 9 *L'espace $\mathcal{D}^2_{Inv}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2)$ des 2-formes invariantes par déplacement est un espace vectoriel de dimension 4 dont une base est :*

$$(\omega^A, \omega^H, \omega^G, \Omega).$$

4.3 Preuve de la Proposition 9

Soit $g = t \circ r \in G$ et $(m, \xi) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$.

La différentielle $Dg(m,\xi) = r$ est une application linéaire de $T_{(m,\xi)}\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ dans $T_{g(m,\xi)}\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$. Prenons une base orthonormale directe (e_1, e_2, ξ) de $\mathbb{R}^3$ et $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \tilde{\epsilon_1}, \tilde{\epsilon_2})$ la base de $T_{(m,\xi)}\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ associée. Alors $(e'_1 = r(e_1), e'_2 = r(e_2), r(\xi))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On note $(\epsilon'_1, \epsilon'_2, \epsilon'_3, \tilde{\epsilon_1}', \tilde{\epsilon_2}')$ la base de $T_{g(m,\xi)}\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ associée. La matrice de la restriction de $Dg(m,\xi)$ exprimée dans les bases (e_1, e_2) et (e'_1, e'_2) est donc la matrice identité.

Prenons maintenant $X, Y \in T_{(m,\xi)}\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$. Alors $X = (X_p, X_n)$ et $Y = (Y_p, Y_n)$. On a alors $r(X) = (r(X_p), r(X_n))$ et $r(Y) = (r(Y_p), r(Y_n))$ ce qui implique que :

$$\begin{aligned}g^*\omega^A_{(m,\xi)}(X,Y) &= \omega^A_{g(m,\xi)}(r(X), r(Y)) \\ &= \epsilon'_1 \wedge \epsilon'_2(r(X), r(Y)) \\ &= e'_1 \wedge e'_2(r(X_p), r(Y_p)) \\ &= e_1 \wedge e_2(X_p, Y_p)) \\ &= \omega^A_{(m,\xi)}(X,Y),\end{aligned}$$

ce qui implique que $g^*\omega^A = \omega^A$. De la même manière, on montre que $g^*\omega^G = \omega^G$.

Comme ω^H est une forme mixte, il suffit de montrer que ω^H est invariante pour des couples (X, Y) avec $X = X_p$ et $Y = Y_n$. On a alors :

$$\begin{aligned}g^*\omega^H_{(m,\xi)}(X_p, Y_n) &= \omega^H_{g(m,\xi)}(r(X_p), r(Y_n)) \\ &= (\epsilon'_1 \wedge \tilde{\epsilon}'_2 + \tilde{\epsilon}'_1 \wedge \epsilon'_2)(r(X_p), r(Y_n)) \\ &= \epsilon'_1.r(X_p)\ \tilde{\epsilon}'_2.r(Y_n)\ -\ 0\ +\ 0\ -\ \tilde{\epsilon}'_1.r(Y_n)\ \epsilon'_2.r(X_p) \\ &= e'_1.r(X_p)\ e'_2.r(Y_n)\ -\ 0\ +\ 0\ -\ e'_1.r(Y_n)\ e'_2.r(X_p) \\ &= e'_1 \wedge e'_2(r(X_p), r(Y_n)) \\ &= e_1 \wedge e_2(X_p, Y_n)) \\ &= \omega^H_{(m,\xi)}(X_p, Y_n),\end{aligned}$$

ce qui implique donc que $g^*\omega^H = \omega^H$.

De même, Ω est une forme mixte et on a :

$$\begin{aligned} g^*\Omega_{(m,\xi)}(X_p, Y_n) &= \Omega_{g(m,\xi)}(r(X_p), r(Y_n)) \\ &= r(X_p).r(Y_n) \\ &= X_p.Y_n \\ &= \Omega_{(m,\xi)}(X_p, Y_n). \end{aligned}$$

4.4 Preuve du Théorème 9

On considère le point particulier $q = (m, \xi) = ((0,0,0),(0,0,1)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$. On prend alors $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. Si ω est une 2-forme différentielle de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ invariante par déplacement, alors on note $L(\omega)$ la restriction de la forme bilinéaire alternée ω_q à l'espace engendré par $(\epsilon_1, \epsilon_2, \tilde{\epsilon_1}, \tilde{\epsilon_2})$. Il est clair que $\alpha = L(\omega)$ est invariant par l'action diagonale de $SO(2)$, c'est à dire que l'on a :

$$\forall r \in SO(2),\ \forall u, v \in (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)^2 \alpha(r(u), r(v)) = \alpha(u, v),$$

où $r(u) = r(u_1, u_2) = (r(u_1), r(u_2))$.

On note alors $\mathcal{A}^2_{Inv}(< \epsilon_1, \epsilon_2, \tilde{\epsilon_1}, \tilde{\epsilon_2} >)$ l'ensemble des formes bilinéaires alternées sur l'espace engendré par $\epsilon_1, \epsilon_2, \tilde{\epsilon_1}, \tilde{\epsilon_2}$ invariante par l'action diagonale de $SO(2)$.

Le résultat découle directement des deux lemmes suivants :

Lemme 4 *L'application*

$$\begin{array}{rcl} L : \mathcal{D}^2_{Inv}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2) & \to & \mathcal{A}^2_{Inv}(< \epsilon_1, \epsilon_2, \tilde{\epsilon_1}, \tilde{\epsilon_2} >) \\ \omega & \mapsto & \alpha \end{array}$$

est une application linéaire injective.

Preuve :
L'application L est clairement linéaire. Prenons maintenant $\omega \in \mathcal{D}^2_{Inv}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2)$ tel que $\alpha = L(\omega)$ soit la forme bilinéaire nulle. Remarquons tout d'abord que α se prolonge en une forme bilinéaire alternée ω_q de $T_q\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ invariante par l'action des rotations $r \in SO(3)$ qui vérifient $r(\epsilon_3) = \epsilon_3$. Cette forme ω_q est forcément nulle, sinon cela impliquerait qu'il existe x dans le plan engendré par $(\epsilon_1, \epsilon_2, \tilde{\epsilon_1}, \tilde{\epsilon_2})$ tel que $\omega_q(\epsilon_3, x) \neq 0$. Prenons r la rotation d'angle π et d'axe e_3. On a alors :

$$\omega_q(\epsilon_3, x) = \omega_q(r(\epsilon_3), r(x)) = \omega_q(\epsilon_3, r(x)) = \omega_q(\epsilon_3, -x),$$

ce qui contredit la bilinéarité.
Le fait que ω soit invariant par déplacement implique que ω est nulle. L'application L est donc injective. □

Lemme 5 *L'espace vectoriel des formes bilinéaires alternées de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, invariantes par l'action diagonale de $SO(2)$ est un espace vectoriel de dimension 4 et est engendré par :*

$$\epsilon_1 \wedge \epsilon_2\ ,\ \epsilon_1 \wedge \tilde{\epsilon}_2 + \tilde{\epsilon}_1 \wedge \epsilon_2\ ,\ \tilde{\epsilon}_1 \wedge \tilde{\epsilon}_2\ ,\ \epsilon_1 \wedge \tilde{\epsilon}_1 + \epsilon_2 \wedge \tilde{\epsilon}_2,$$

où (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\epsilon_1 = (e_1, 0)$, $\epsilon_2 = (e_2, 0)$, $\tilde{\epsilon}_1 = (0, e_1)$ et $\tilde{\epsilon}_2 = (0, e_2)$.

Preuve :
Une base de l'ensemble des formes bilinéaires alternées de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ est donnée par :

$$\epsilon_1 \wedge \epsilon_2 \quad \tilde{\epsilon_1} \wedge \tilde{\epsilon_2} \quad \epsilon_1 \wedge \tilde{\epsilon_2} \quad \epsilon_2 \wedge \tilde{\epsilon_1} \quad \epsilon_1 \wedge \tilde{\epsilon_1} \quad \epsilon_2 \wedge \tilde{\epsilon_2}.$$

Soit $r \in SO(2)$ la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. La matrice de l'action de r dans la base donnée ci-dessus est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, on a par exemple :

$$(r.(\epsilon_1 \wedge \tilde{\epsilon_2}))(u,v) \stackrel{def}{=} \epsilon_1 \wedge \tilde{\epsilon_2}(r(u), r(v)) = \epsilon_2 \wedge \tilde{\epsilon_1}(u,v).$$

L'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 4 et est engendré par :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui correspond aux 4 formes citées dans l'énoncé. Ces 4 formes étant invariantes par l'action diagonale de $SO(2)$, elles forment une base de l'espace vectoriel des formes bilinéaires alternées de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, invariantes par l'action diagonale de $SO(2)$. $\square$

Fin de la preuve du théorème 9
Le lemme 4 nous dit que L est injective. Le lemme 5 implique que L est surjective et que la dimension de $\mathcal{A}^2_{Inv}(< \epsilon_1, \epsilon_2, \tilde{\epsilon_1}, \tilde{\epsilon_2} >)$ vaut 4, ce qui conclut la preuve.

5 Le cycle normal

5.1 Cycle normal d'une surface lisse

Soit M une surface $\mathcal{C}^2$ orientée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. On suppose dans la suite que M est le bord d'un compact $V \subset \mathbb{R}^3$. Le fibré normal unitaire de V est donné par :

$$S(V) = \{(p, n(p)),\ p \in M\} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2,$$

où $n(p)$ est la normale unitaire à M en p. L'application suivante est alors un difféomorphisme :

$$\begin{array}{rcl} i : M & \mapsto & S(V) \\ p & \to & (p, n(p)) \end{array}.$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 10 *Soit B un borélien de $\mathbb{R}^3$. On a alors $i(B \cap M) \subset S(V)$ et*

$$\int_{i(B\cap M)} \omega^G = \int_{B\cap M} G(p)dp$$

$$\int_{i(B\cap M)} \omega^H = \int_{B\cap M} H(p)dp$$

$$\int_{i(B\cap M)} \omega^A = \int_{B\cap M} dp = Aire(B \cap M).$$

$$\int_{i(B\cap M)} \Omega = 0.$$

Preuve :
La formule du changement de variable donne :

$$\int_{i(B\cap M)} \omega^G = \int_{B\cap M} i^*\omega^G.$$

Il suffit donc de montrer que $i^*\omega^G = G\ da_M$, où da_M est la forme d'aire sur M.

Soit $p \in B \cap M$. On prend (e_1, e_2) une base orthonormale de T_pM. Alors $i(p) \in S(V) \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ et on construit comme précédemment la base $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \tilde{\epsilon_1}, \tilde{\epsilon_2})$ de $T_{i(p)}\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$. On a alors :

$$\begin{aligned} i^*\omega^G p(e_1, e_2) &= \omega^G_{i(p)}(Di(p)e_1, Di(p)e_2) \\ &= \omega^G_{i(p)}((e_1, Dn(p)e_1), (e_2, Dn(p)e_2)) \\ &= \tilde{\epsilon_1} \wedge \tilde{\epsilon_2}((e_1, Dn(p)e_1), (e_2, Dn(p)e_2)) \\ &= \begin{vmatrix} e_1.Dn(p)e_1 & e_2.Dn(p)e_1 \\ e_1.Dn(p)e_2 & e_2.Dn(p)e_2 \end{vmatrix} \\ &= det(Dn(p)) \\ &= G(p). \end{aligned}$$

De la même manière, on peut montrer que $i^*\omega^H_p(e_1, e_2) = H(p)$ et $i^*\omega^A_p(e_1, e_2) = 1$, ce qui permet de conclure. $\square$

On introduit alors la définition suivante :

Définition 22 *Le cycle normal $N(V)$ de V est le 2-courant associé au fibré normal unitaire orienté $S(V)$.*

La proposition 10 se lit alors :

$$N(V)(\omega^G_{|i(B\cap M)}) = \int_{B\cap M} G(p)dp$$

$$N(V)(\omega^H_{|i(B\cap M)}) = \int_{B\cap M} H(p)dp$$

$$N(V)(\omega^A_{|i(B\cap M)}) = Aire(B\cap M).$$

En particulier, on a :

$$N(V)(\omega^G) = \int_M G(p)dp$$

$$N(V)(\omega^H) = \int_M H(p)dp$$

$$N(V)(\omega^A) = Aire(M).$$

5.2 Cas convexe

Il est aussi possible de définir le cycle normal de V quand V est convexe, même si son bord M n'est pas lisse. On considère pour cela le cône normal $CN_V(p)$ en un point p de V :

$$CN_V(p) = \{v,\ \|v\| = 1 \text{ et } \forall q \in V\ \overrightarrow{pq}.v \leq 0\}.$$

D'après un résultat de Federer [8], comme V est convexe (ou plus généralement à reach positif), nous savons que pour ϵ petit, l'ensemble V^ϵ des points à distance égale à ϵ de V est une surface orientée de classe $\mathcal{C}^{1,1}$. Cela permet de montrer que l'ensemble

$$\{(p,n),\ p \in \partial V \text{ et } n \in CN_V(p)\}$$

est une surface régulière de classe $\mathcal{C}^1$ dont l'orientation est induite par celle de V^ϵ. On a alors la définition suivante

Définition 23 *Le cycle normal $N(V)$ de V est le courant associé à l'ensemble orienté*

$$\{(p,n),\ p \in \partial V \text{ et } n \in CN_V(p)\}.$$

On remarque que quand $M = \partial V$ est lisse, cette définition coincide avec celle du cas lisse.

La formule d'additivité suivante est fondamentale :

Proposition 11 *Si V_1 et V_2 sont deux ensembles convexes de $\mathbb{R}^3$ tels que $V_1 \cup V_2$ est convexe, alors*

$$N(V_1 \cup V_2) = N(V_1) + N(V_2) - N(V_1 \cap V_2).$$

Preuve :
Il suffit de montrer que la multiplicité d'un point (p,n) est la même pour $N(V_1 \cup V_2) + N(V_1 \cap V_2)$ et $N(V_1) + N(V_2)$. Si $p \notin \partial V_1 \cap \partial V_2$, c'est clair. Sinon, cela provient du fait que $CN_{V_1 \cap V_2}(p) = CN_{V_1}(p) \cup CN_{V_2}(p)$ et $CN_{V_1 \cup V_2}(p) = CN_{V_1}(p) \cap CN_{V_2}(p)$. La seule inclusion qui utilise la convexité est la suivante :

$$CN_{V_1 \cap V_2}(p) \subset CN_{V_1}(p) \cup CN_{V_2}(p).$$

Pour la montrer, prenons $v \notin CN_{V_1}(p) \cup CN_{V_2}(p)$. Alors il existe $q_1 \in V_1$, il existe $q_2 \in V_2$ tels que $\overrightarrow{pq_1}.v > 0$ et $\overrightarrow{pq_2}.v > 0$. Si $q_1 = q_2$ alors $v \notin CN_{V_1 \cap V_2}(p)$. Sinon, comme V_1, V_2 et $V_1 \cup V_2$ sont convexes, le segment $[q_1, q_2]$ coupe V_1, V_2 et $V_1 \cup V_2$ suivant des segments. Comme V_1 et V_2 sont fermés, il existe $\lambda \in [0,1]$, tel que $q = (1-\lambda)q_1 + \lambda q_2 \in V_1 \cap V_2$ qui vérifie $\overrightarrow{pq}.v > 0$, donc $v \notin CN_{V_1 \cap V_2}(p)$.
Les 3 autres inclusions sont directes. $\square$

5.3 Cycle normal d'un polyèdre

En conservant la formule d'additivité, on va pouvoir définir le cycle normal d'un polyèdre V. Si on triangule le polyèdre V en des tétraèdres T_1,...,T_N, alors, d'après le principe d'inclusion-exclusion, le cycle normal de V est forcément :

$$N(V) = \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq N} N(\cap_{j=1}^{n} T_{i_j}).$$

Remarque 11 *Le cycle normal $N(V)$ est bien défini dans le sens où il ne dépend pas de la triangulation choisie. On verra cela en donnant une description géométrique de $N(V)$ qui ne dépend pas de la triangulation.*

Description géométrique du support du cycle normal d'un simplexe
On dit qu'une partie $A \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ du support du cycle normal est au-dessus d'un ensemble $B \subset \mathbb{R}^3$ si la projection de A sur la première composante est inclue dans B. On distingue trois types d'ensembles au-dessus des simplexes :

- au dessus d'une face f de normale n_f : partie planaire de la forme

$$\{(p, n_f),\ p \in f\}.$$

- au-dessus d'une arête e : partie cylindrique de la forme

$$\{(p, n), p \in e, \|n\| = 1, n.e = 0\}.$$

- au dessus d'un sommet p : partie sphérique de la forme

$$\{(p, n),\ \|n\| = 1\}.$$

Description géométrique du support du cycle normal d'un polyèdre

- au-dessus d'une face f : partie planaire $f \times n$ où n est la normale unitaire de f.
- au-dessus d'une arête e : si e est convexe, alors V peut être triangulée de manière à ce que e appartienne à un seul tétraèdre et on a alors une partie cylindrique (d'après la proposition 11, c'est bien défini). Si e est concave, alors on peut trianguler V de telle manière que e appartienne à deux tétraèdres T et T'. Au dessus de e on a alors $N(V) = N(T) + N(T') - N(T \cap T')$. On peut aussi montrer que cela ne dépend pas de la triangulation choisie.
- au-dessus d'un sommet p : Il suffit de compter la multiplicité $\mu(p, n)$ de V au point (p, n) (avec $\|n\| = 1$). On utilise pour cela le lemme 6 et la proposition 12.

Lemme 6

$$\mu(p, n) = \chi(St^+(p, n)),$$

où χ est la caractéristique d'Euler, $St^+(p, n)$ est l'union des intérieurs relatifs des simplexes de la triangulation de V contenant p et inclus dans le demi-espace $\{x,\ \overrightarrow{px}.n \geq 0\}$.

Preuve :
La formule se vérifie aisément lorsque le polyèdre est un simplexe, et se montre ensuite par additivité. □

Le lemme 6 exprime la multiplicité du cycle normal dans la direction n au point p quand p est un sommet du polyèdre V. On peut remarquer que le terme de droite correspond à l'index de Banchoff dans la direction $-n$ (exercice).

Nous montrons maintenant que le terme de droite $\chi(St^+(p, n))$ est additif et ne dépend pas de la triangulation, ce qui valide la définition du courant normal par additivité pour les polyèdres. La caractéristique d'Euler d'un complexe est un invariant topologique et ne dépend donc pas de la triangulation. Mais l'invariance du terme $\chi(St^+(p,n))$ n'est pas tout à fait triviale car l'ensemble triangulé n'est pas un simplexe (il n'est pas fermé) et son support géométrique change avec la géométrie choisie car les cellules "à cheval" sur le plan orthogonal à n ne sont pas comptées et elles varient avec la triangulation.

Soit T une triangulation du polyèdre V. Soit $\rho > 0$ tel que la distance entre deux simplexes non adjacents de T est strictement supérieure à ρ. On appelle $S^+(p,n,\rho)$ la demi sphère fermée centrée en p, de rayon ρ dans la direction n :

$$S^+(p,n,\rho) = \{x \in \mathbb{R}^3, \overrightarrow{px} \cdot n \geq 0, \|\overrightarrow{px}\| = \rho\}.$$

La proposition suivante relie le terme de droite de l'équation du lemme 6, qui pourrait a priori être dépendant de la triangulation T, avec la caractéristique d'Euler d'un ensemble compact qui ne dépend pas de la triangulation T choisie, ce qui montre l'invariance recherchée. De même, si V_1 et V_2 sont deux polyèdres, on a, par additivité de la caractéristique d'Euler :

$$\begin{aligned}
1 - \chi\left[(V_1 \cup V_2) \cap S^+(p,n,\rho)\right] &= 1 - \chi\left[\left(V_1 \cap S^+(p,n,\rho)\right) \cup \left(V_2 \cap S^+(p,n,\rho)\right)\right] \\
&= \left(1 - \chi\left[V_1 \cap S^+(p,n,\rho)\right]\right) \\
&+ \left(1 - \chi\left[V_2 \cap S^+(p,n,\rho)\right]\right) \\
&- \left(1 - \chi\left[(V_1 \cap V_2) \cap S^+(p,n,\rho)\right]\right)
\end{aligned}$$

et la proposition suivante montre donc aussi l'additivité de $V \mapsto \chi(St^+(p,n))$.

Proposition 12 *Si $\rho > 0$ est tel que la distance entre deux simplexes non adjacents de T est strictement supérieure a ρ, on a :*

$$\chi(St^+(p,n)) = 1 - \chi\left(V \cap S^+(p,n,\rho)\right).$$

Preuve :
Etant donné une triangulation T, on définit une nouvelle décomposition convexe (pas forcément une triangulation) $\tilde{T}$ obtenue en coupant la triangulations T par le plan π passant par p et orthogonal à n : chaque simplexe σ de T est découpé en au plus 3 convexes : $\sigma \cap \pi^-$, $\sigma \cap \pi$ et $\sigma \cap \pi^+$; lorsque ces intersections sont non-vides où $\pi-$ et π^+ sont les demi-espaces ouverts de part et d'autres de π.

La trace de $\tilde{T}$ sur $S^+(p,n,\rho)$ correspond à une décomposition de $(V \cap S^+(p,n,\rho))$ en CW-complexes que l'on note, par abus de langage, $\left(\tilde{T} \cap S^+(p,n,\rho)\right)$. L'invariance par rapport à la décomposition en CW-complexes de la caractéristique d'Euler d'un compact entraine que $\chi\left(\tilde{T} \cap S^+(p,n,\rho)\right)$ ne dépend pas de la triangulation T.

Si on compare $\chi(St^+(p,n))$ avec $1 - \chi\left(\tilde{T} \cap S^+(p,n,\rho)\right)$, on s'aperçoit que si le 1 du terme de droite correspond au 1 du sommet p dans le décompte $\chi(St^+(p,n))$ et que chaque simplexe de dimension $k > 0$ compté dans $(St^+(p,n))$ se retrouve avec une dimension $k-1$, et donc un signe opposé, dans $\chi\left(\tilde{T} \cap S^+(p,n,\rho)\right)$.

Finalement, en comparant $\chi(St^+(p,n))$ avec $1-\chi\left(\tilde{T} \cap S^+(p,n,\rho)\right)$ on s'aperçoit que ce dernier terme contient simplement en plus le décompte des cellules de $\left(\tilde{T} \cap S^+(p,n,\rho)\right)$ qui sont de la forme $\sigma \cap \pi$ et $\sigma \cap \pi^+$ pour tous les σ dans T tels que $\sigma \cap \pi^- \neq \emptyset$ et $\sigma \cap \pi^+ \neq \emptyset$. Une telle cellule σ ne peut être qu'un triangle ou un tétraèdre.

Si un tel σ est un triangle, il donne précisément naissance, dans $\left(\tilde{T} \cap S^+(p,n,\rho)\right)$, à un sommet $\sigma \cap \pi$ et une arête $\sigma \cap \pi^+$. Si c'est un tétraèdre, il donne précisément naissance, dans $\left(\tilde{T} \cap S^+(p,n,\rho)\right)$, à une arête $\sigma \cap \pi$ et une cellule homéomorphe à un disque $\sigma \cap \pi^+$. Dans chacun des cas cela ne change pas la somme alternée et achève la preuve de la proposition. □

5.4 Mesures de courbures discrètes

Maintenant que l'on a construit le cycle normal $N(V)$ d'un polyèdre V, il est assez naturel de définir les mesures de courbure suivantes sur $M = \partial V$:

Définition 24 *Soit B un borélien de $\mathbb{R}^3$.*
- *La mesure de courbure moyenne : $\phi_V^H(B) = N(V)(\omega^H_{|(B\cap M)\times\mathbb{S}^2})$.*
- *La mesure de courbure de Gauss : $\phi_V^G(B) = N(V)(\omega^G_{|(B\cap M)\times\mathbb{S}^2})$.*

Nous allons maintenant décrire le comportement des formes invariantes sur les parties planaires, cylindriques et sphériques.

Parties planaires

Le plan tangent à une partie planaire est engendré par deux vecteurs de $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$. Les formes ω^H et ω^G s'annullent donc et ω^A correspond à la forme d'aire.

Parties cylindriques

Le plan tangent en un point (p, n) d'une partie cylindrique est engendré par un vecteur de $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ et un vecteur de $\{0\} \times \mathbb{R}^3$. Les formes non mixtes ω^A et ω^G s'annullent donc. Prenons maintenant e_1 un vecteur colinéaire à l'arête correspondante, e_2 tel que $(e_1, e_2, e_3 = n)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Alors, on a :

$$\omega^H_{(p,n)}(\epsilon_1, \tilde{\epsilon_2}) = \epsilon_1 \wedge \tilde{\epsilon_2}(\epsilon_1, \tilde{\epsilon_2}) + \tilde{\epsilon_1} \wedge \epsilon_2(\epsilon_1, \tilde{\epsilon_2}) = 1,$$

ce qui implique que ω^H correspond à la forme d'aire sur les parties cylindriques.

Parties sphériques

Le plan tangent en un point (p, n) d'une partie sphérique est engendré par deux vecteurs de $\{0\} \times \mathbb{R}^3$. Les formes ω^A et ω^H s'annullent donc. On peut aussi montrer aisément que ω^G correspond à la forme d'aire sur les parties sphériques.

On obtient donc les formules suivantes qui permettent de calculer les mesures de courbure moyenne et gaussienne sur un polyèdre "manifold" :

Proposition 13 *On a les résultats suivants :*

$$\phi_V^H(B) = \sum_{e \text{ arête de } \partial V} long(e \cap B)\beta(e),$$

où $|\beta(e)|$ est l'angle entre les normales des deux triangles de ∂V contenant e. $\beta(e)$ est positif si l'arête est convexe, négative sinon.

$$\phi_V^G(B) = \sum_{p \text{ sommet de } \partial V\cap B} (2\pi - \alpha(p)),$$

où $\alpha(p)$ est la somme des angles de ∂V en p.
D'autre part, on retrouve naturellement l'aire :

$$Aire(B \cap M) = N(V)\left(\omega^A_{|(B\cap M)\times\mathbb{S}^2}\right).$$

Preuve :

• La mesure de courbure $\phi_V^H(B)$ est la somme des aires des parties cylindriques de $N(V)$ comptées avec leurs ordre de multiplicité (égales à ± 1). On obtient donc directement la formule.

• La forme $\omega^A_{|(B\cap M)\times\mathbb{S}^2}$ s'annulle sur les parties non planaires et correspond à la forme d'aire sur les parties planaires. On retrouve donc l'aire de $M \cap B$.

• La mesure de courbure $\phi_V^G(B)$ est la somme des aires des parties sphériques de $N(V)$ comptées avec leurs ordre de multiplicité. On s'inspire ici du point de vue utilisé dans Banchoff (*c.f.* partie 2). Soit p un sommet de $\partial V \cap B$. Par le le lemme 6, on a :

$$\phi_V^G(B) = \sum_{p \text{ sommet de } \partial V\cap B} \int_{n\in\mathbb{S}^2} \chi(St^+(p, n)).$$

Pour un simplexe σ de la triangulation de V, on note $A(\sigma, p, n)$ la fonction égale à 1 si σ contient p et si la fonction $x \mapsto < x, n >$ atteint son minimum en p sur σ et 0 sinon (c'est la fonction introduite par Banchoff, si on remplace n par $-n$). On note Γ_k l'ensemble des simplexes de dimention k dans la triangulation de V contenant p. Comme $St^+(p, n)$ est l'union des intérieurs relatifs des simplexes de la triangulation de V contenant p et inclus dans le demi-espace $\{x,\ \overrightarrow{px}.n \geq 0\}$, on a :

$$\chi(St^+(p,n)) = \sum_{k=0,\dots,3} (-1)^k \sum_{\sigma \in \Gamma_k} A(\sigma, p, n).$$

Calculons les quantités $\int_{n \in \mathbb{S}^2} A(\sigma, p, n)$ pour les différentes dimensions de σ. On a trivialement :

- Si $\sigma = p$, alors :
$$\int_{n \in \mathbb{S}^2} A(p, p, n) = 4\pi.$$
- Si σ est une arête e on a :
$$\int_{n \in \mathbb{S}^2} A(e, p, n) = 2\pi.$$
- Si σ est un triangle t, si α_t est l'angle de t en p on a facilement :
$$\int_{n \in \mathbb{S}^2} A(t, p, n) = 2(\pi - \alpha_t).$$
- Si σ est un tétraèdre T, on peut remarquer que l'ensemble des $n \in \mathbb{S}^2$ pour lesquels $A(T, p, n) = 1$ est un triangle sphérique dont chaque coté est un arc de grand cercle orthogonal à une arête de T contenant p. L'aire d'un triangle sphérique, par le théorème de Gauss-Bonnet est 2π diminué de la somme des angles externes entre les arcs. Donc, si on note $t_1(T)$, $t_2(T)$ et $t_3(T)$ les trois faces de T qui partagent p, on a :
$$\int_{n \in \mathbb{S}^2} A(T, p, n) = 2\pi - \alpha_{t_1} - \alpha_{t_2} - \alpha_{t_3},$$
ce qui donne :
$$\begin{aligned}\int_{n \in \mathbb{S}^2} \chi(St^+(p,n)) = \quad & 4\pi - \sum_{e \in \Gamma_1} 2\pi + \sum_{t \in \Gamma_2} 2(\pi - \alpha_t) \\ & - \sum_{T \in \Gamma_3} (2\pi - \alpha_{t_1(T)} - \alpha_{t_2(T)} - \alpha_{t_3(T)}).\end{aligned} \tag{2}$$

On suppose maintenant que le sommet p est manifold, c'est à dire que l'ensemble des simplexes de dimension strictement positive contenant p est un cône dont le sommet est p et dont la base est un disque topologique triangulé. La caractéristique d'Euler d'un disque est 1 ce qui donne :

$$\sharp(\Gamma_1) - \sharp(\Gamma_2) + \sharp(\Gamma_3) = 1 \tag{3}$$

De plus, on peut distinguer dans Γ_2 les triangles appartenant au bord du polyèdre et ceux qui sont internes : $\Gamma_2 = \Gamma_2^{\text{bord}} \cup \Gamma_2^{\text{internes}}$. Chaque triangle de $\Gamma_2^{\text{interne}}$ est partagé par exactement 2 tétraèdres de Γ_3 et chaque triangle de Γ_2^{bord} par exactement 1 tétraèdre de Γ_3, ce qui donne :

$$\sum_{T \in \Gamma_3} \alpha_{t_1(T)} + \alpha_{t_2(T)} + \alpha_{t_3(T)} = 2 \sum_{t \in \Gamma_2^{\text{interne}}} \alpha_t + \sum_{t \in \Gamma_2^{\text{bord}}} \alpha_t. \tag{4}$$

En mettant ensemble les équations (2), (3) et (4) on obtient :

$$\int_{n \in \mathbb{S}^2} \chi(St^+(p,n)) = 2\pi - \sum_{t \in \Gamma_2^{\text{bord}}} \alpha_t.$$

□

6 Deuxième forme fondamentale

6.1 Deux nouvelles formes différentielles

On peut définir pour chaque paire de vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^3$, deux formes différentielles :

Définition 25 *Soit $(m,\xi) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. On pose :*

$$\omega^{X,Y}_{(m,\xi)} = (0,Y) \ \wedge (\xi \times X, 0)$$

et

$$\widetilde{\omega}^{X,Y}_{(m,\xi)} = (X,0) \ \wedge (0, \xi \times Y),$$

où $\times$ représente ici le produit vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On peut remarquer que ces deux formes différentielles sont bilinéaires en X et Y, mais ne sont pas symétriques.

6.2 Cas lisse

En intégrant ces formes différentielles sur le cycle normal d'une surface lisse, on retrouve la deuxième forme fondamentale. Pour pouvoir intégrer, on a en fait besoin d'étendre la deuxième forme de la manière suivante : soit $p \in M$. La deuxième forme fondamentale $II_M(p)$ en p est une forme bilinéaire symétrique sur T_pM. On étend cette forme bilinéaire en une forme $\overline{II}_V(p)$ sur $\mathbb{R}^3$ en posant $\overline{II}_V(p)(X,Y) = 0$ si X ou Y est orthogonal à T_pM.

Il est aussi pratique (comme on le verra par la suite), de considérer une autre forme bilinéaire : $\widetilde{II}_V(p)$ est la forme bilinéaire sur T_pM qui correspond à $II_M(p)$, mais avec les valeurs propres inversées. On peut également étendre cette forme bilinéaire en une forme $\overline{\widetilde{II}}_V(p)$ sur $\mathbb{R}^3$ en posant $\overline{\widetilde{II}}_V(p)(X,Y) = 0$ si X ou Y est orthogonal à T_pM.

Proposition 14 *Si M est une surface lisse, alors on a :*

$$N(V)(\omega^{X,Y}_{|i(B\cap M)}) \overset{def}{=} \int_{i(B\cap M)} \omega^{X,Y} = \int_{B\cap M} \overline{II}_V(p)dp$$

et

$$N(V)(\widetilde{\omega}^{X,Y}_{|i(B\cap M)}) \overset{def}{=} \int_{i(B\cap M)} \widetilde{\omega}^{X,Y} = \int_{B\cap M} \overline{\widetilde{II}}_V(p)dp.$$

Preuve :
Soit $p \in M$. On considère une base orthonormée directe (e_1, e_2, ξ) de $\mathbb{R}^3$ telle que e_1 et e_2 soient les directions principales de M en p (et ξ est la normale unitaire orientée à M en p). Comme précédemment, on a :

$$\begin{aligned}
i^*\omega^{X,Y}_p(e_1,e_2) &= \omega^{X,Y}_{(p,\xi)}(Di(p)e_1, Di(p)e_2) \\
&= (0,Y) \ \wedge (\xi \times X, 0)((e_1, \lambda_1 e_1), (e_2, \lambda_2 e_2)) \\
&= \begin{vmatrix} (0,Y).(e_1,\lambda_1 e_1) & (\xi \times X, 0).(e_1, \lambda_1 e_1) \\ (0,Y).(e_2,\lambda_2 e_2) & (\xi \times X, 0).(e_2, \lambda_2 e_2) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda_1 Y_1 & \det(\xi, X, e_1) \\ \lambda_2 Y_2 & \det(\xi, X, e_2) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda_1 Y_1 & \det(\xi, X_2 e_2, e_1) \\ \lambda_2 Y_2 & \det(\xi, X_1 e_1, e_2) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda_1 Y_1 & -X_2 \\ \lambda_2 Y_2 & X_1 \end{vmatrix} \\
&= \lambda_1 X_1 Y_1 + \lambda_2 X_2 Y_2 \\
&= \overline{II}_V(p)(X,Y),
\end{aligned}$$

avec $X = X_1 e_1 + X_2 e_2$ et $Y = Y_1 e_1 + Y_2 e_2$.

Le calcul de l'autre égalité est similaire. $\square$

6.3 Cas polyédrique

Par analogie avec les cas lisse, on va définir les mesures de courbures anisotropes suivantes :

Définition 26 *Les mesures courbures anisotropes $\overline{II}_V$ et $\overline{\widetilde{II}}_V$ associent à chaque borélien B de $\mathbb{R}^3$ les formes bilinéaires symétriques suivantes :*

$$\overline{II}_V(B)(X,Y) = N(V)(\omega^{X,Y}_{|(B\cap M)\times\mathbb{S}^2})$$

et

$$\overline{\widetilde{II}}_V(B)(X,Y) = N(V)(\widetilde{\omega}^{X,Y}_{|(B\cap M)\times\mathbb{S}^2})$$

Il est possible de calculer ces mesures de courbures anisotropes et on obtient les formules suivantes :

Proposition 15

$$\overline{II}_V(B) = \sum_{e \text{ arête de } M} \frac{long(e\cap B)}{2} \left[(\beta(e) - \sin\beta(e))\overrightarrow{e^+}\otimes\overrightarrow{e^+} + (\beta(e)+\sin\beta(e))\overrightarrow{e^-}\otimes\overrightarrow{e^-}\right]$$

et

$$\overline{\widetilde{II}}_V(B) = \sum_{e \text{ arête de } M} \beta(e)\ long(e\cap B)\ \overrightarrow{e}\otimes\overrightarrow{e},$$

avec $\overrightarrow{e}$ un vecteur unitaire colinéaire à l'arête e, $\overrightarrow{e^+}$ et $\overrightarrow{e^-}$ respectivement la somme normalisée et la différence normalisée des normales unitaires aux deux triangles adjacents à e, et $(\overrightarrow{e}\otimes\overrightarrow{e})(X,Y) = X.\overrightarrow{e}\ Y.\overrightarrow{e}$.

Preuve :
La forme $\omega^{X,Y}$ est une forme mixte. Elle s'annulle donc sur les parties planaires et les parties sphériques. Regardons ce qui se passe sur une partie cylindrique PC au dessus d'une arête e de ∂V : on prend $(p,\xi)\in PC$ et on a que le plan tangent à PC en (p,ξ) est engendré par deux vecteurs $(e_1,0)$ et $(0,e_2)$ (avec e_1 parallèle à l'arête e et e_2 tel que (e_1,e_2) soit une base orthonormée directe). On a alors :

$$\begin{aligned}
\omega^{X,Y}_{(p,\xi)}((e_1,0),(0,e_2)) &= (0,Y)\ \wedge(\xi\times X,0)((e_1,0),(0,e_2)) \\
&= \begin{vmatrix} (0,Y).(e_1,0) & (\xi\times X,0).(e_1,0) \\ (0,Y).(0,e_2) & (\xi\times X,0).(0,e_2) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & \det(\xi,X,e_1) \\ Y.e_2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= X.e_2 Y.e_2 \\
&= (e_2\otimes e_2)(X,Y).
\end{aligned}$$

On pose $\beta = |\beta|$. On peut exprimer e_2 en fonction de e^+ et e^- de la manière suivante :

$$e_2 = \cos\theta e^- - \sin\theta e^+,$$

avec $\theta \in [\frac{-\beta}{2}, \frac{\beta}{2}]$. On note $l = long(e)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{PC} \omega^{X,Y}_{(p,\xi)} &= \int_0^l \int_{\frac{-\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} X.e_2 Y.e_2 \\
&= \int_0^l \int_{\frac{-\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} X.(\cos\theta e^- - \sin\theta e^+) Y.(\cos\theta e^- - \sin\theta e^+) \\
&= X.e^+ Y.e^+ \int_0^l \int_{\frac{-\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} \sin^2\theta + X.e^- Y.e^- \int_0^l \int_{\frac{-\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} \cos^2\theta + 0 \\
&= X.e^+ Y.e^+ l \frac{\beta - \sin\beta}{2} + X.e^- Y.e^- l \frac{\beta + \sin\beta}{2}
\end{aligned}$$

Le calcul de l'autre égalité est plus simple. □

7 Convergence des mesures de courbure

On montre dans cette section, que si une surface polyédrique est proche, en un certain sens, d'une surface lisse, alors son cycle normal est proche de celui de la surface lisse.

7.1 Un résultat de convergence général

Pour pouvoir comparer les deux surfaces , nous avons tout d'abord besoin d'introduire certaines notions. L'*axe médian* d'un sous-ensemble fermé K de $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des points qui ont au moins 2 plus proches points sur K. Le *reach* d'un ensemble fermé K est la distance minimum entre K et son axe médian. Autrement dit, le reach est le supremum des réels d tel que tout point x situé à distance inférieure à d de K a un unique plus proche point sur K noté $\mathrm{pr}_K(x)$. On pose $U_M = \{x \in \mathbb{R}^3, d(x, M) < \mathrm{reach}(M)\}$ et on a que pr_K est une application définie sur U_M.

On considère maintenant un solide V dont le bord M est une surface lisse. En particulier, le reach de M est positif. On a alors le théorème suivant :

Théorème 10 *Soit M une surface lisse de classe C^2 de $\mathbb{R}^3$ qui borde un compact V et $T \subset \mathbb{R}^3$ une triangulation qui est le bord d'un compact W de $\mathbb{R}^3$ et tel que la projection $pr : T \to M$ soit injective. Soit B' un borélien de $\mathbb{R}^3$ et $B = B' \cap \partial C$. Alors*

$$\mathcal{F}(N(W)_{\llcorner(B\times\mathbb{S}^2)} - N(V)_{\llcorner(pr(B)\times\mathbb{S}^2)}) \leq$$

$$\max(\alpha_B, \delta_B) \left(\frac{\sup_B(1, \|II_B\|)}{1 - \delta_B \|II_B\|} \right)^2 \left[M\left(N(W)_{\llcorner(B\times\mathbb{S}^2)}\right) + M\left(\partial\left(N(W)_{\llcorner(B\times\mathbb{S}^2)}\right)\right)\right],$$

où δ_B est la distance de Hausdorff entre B et $pr(B)$; α_B est le maximum sur les points (x, ξ) du support de $N(T)$ restreint à B de l'angle entre ξ et la normale à M en $\mathrm{pr}_M(x)$; $\|II_B\|$ est le maximum de la norme de la deuxième forme fondamentale II de M restreinte à $pr(B)$.

Remarque 12 *Nous énonçons le théorème 10 dans le cas particulier où $T = \partial W$ est une triangulation, mais il est valable pour tous les ensembles W qui admettent un cycle normal $N(W)$. Joseph Fu a montré que beaucoup d'ensembles admettent un cycle normal, comme par exemple les sous-analytiques, les surfaces à reach positif...*

En utilisant la proposition 8, ce théorème permet de borner la différence entre les mesures de courbure de M et T.

7.2 Preuve du théorème 10

L'*application de Gauss* $G : M \to \mathbb{R}^3 \times S^2$ associe a un point $m \in M$ le couple (m, ξ_m) ou ξ_m est la normale unitaire à M en m, orientée vers l'extérieur de V. Si M est C^2, on a

$$DG = (\mathrm{Id}, -A_{\xi_m}),$$

où A_{ξ_m} est l'endomorphisme de Weingarten ($(X,Y) \mapsto < X, -A_{\xi_m} Y >$ est la deuxième forme fondamentale).

On considère la fonction f définie sur $U_M \times R^3$ et à valeur dans le support $\mathrm{spt}\, N(V)$ du cycle normal $N(V)$ de V par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} U_M \times R^3 & \xrightarrow{f} & \mathrm{spt}\, N(V) \\ \mathrm{p}_1 \downarrow & & \uparrow G \\ U_M & \xrightarrow{\mathrm{pr}_M} & M \end{array}$$

On suppose qu'un polyhèdre W est proche du solide V dans le sens où $\partial W \subset U_M$ et où la restriction de la projection pr_M à ∂W est injective.

La proposition suivante majore, en norme plate, l'écart entre le cycle normal $N(W)$ de W et le cycle normal $N(V)$ de V. En fait, on souhaite "localiser" la comparaison entre les deux cycles normaux. Pour cela, on considère un borélien (ou un fermé) B' et $B = B' \cap \partial W$ ce qui permet définir la restriction de $N(W)$ à $B \times \mathbb{S}^2$, notée $D = N(W)_{\llcorner(B\times\mathbb{S}^2)}$ et la restriction de $N(V)$ à $\mathrm{pr}(B) \times \mathbb{S}^2$, notée $D' = N(V)_{\llcorner(\mathrm{pr}(B)\times\mathbb{S}^2)}$.

Proposition 16

$$\mathcal{F}(D - D') \leq (M(D) + M(\partial D)) \sup_{\mathrm{spt}(D)} |f - \mathrm{Id}\,| \sup_{\mathrm{spt}(D)} \left(\|Df\|, \|Df\|^2, 1\right)$$

La proximité des cycle normaux se mesure ici en norme plate.
Preuve :
Etapes de la preuve
• On montre tout d'abord, en appliquant le théorème 8 (constancy theorem) que $f_\sharp(D) = D'$.
• Ensuite, si h est l'homotopie définie par interpolation linéaire entre l'identité et f :

$$\begin{array}{rccc} h: & (U_M \times \mathbb{R}^3) \times [0,1] & \to & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \\ & ((x,\xi),t) & \mapsto & tf(x,\xi) + (1-t)(x,\xi) \end{array}.$$

La fonction h permet de définir un 3-courant d'intégration $C = h_\sharp(D \times [0,1])$ et un 2-courant $A = h_\sharp(\partial D \times [0,1])$. On rappelle que le pushforward d'un courant appliqué à une forme différentielle est égal au courant appliqué au pullback de la forme :

$$h_\sharp(D \times [0,1])(\phi) = D \times [0,1](h^\star(\phi)).$$

Si (e_1, e_2) désigne une base orthonormée directe du plan tangent de D, on a :

$$D(\omega) = \int_{\mathrm{spt}(D)} \omega(e_1, e_2) d\mathcal{A}.$$

Le support de C n'est pas contenu dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$, mais dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ à cause de l'interpolation linéaire. Le courant C agit donc de la façon suivante sur une 3-formes différentielles ϕ définie dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$:

$$C(\phi) = h_\sharp(D \times [0,1])(\phi) = \int_0^1 \left[\int_{\mathrm{spt}(D)} \phi_{h(x,\xi,t)} \left(Dh(e_1), Dh(e_2), \frac{\partial h}{\partial t} \right) d\mathcal{A} \right] dt.$$

$$D'(\omega) = f_\sharp(D)(\omega) = \int_{\mathrm{spt}(D)} \omega_{f(x,\xi)}\left(Df(e_1), Df(e_2)\right) d\mathcal{A}.$$

On a alors (bord d'un courant et Stokes..)

$$\partial\left(h_\sharp(D\times[0,1])\right) = f_\sharp(D) - D + h_\sharp(\partial D \times [0,1]).$$

C'est à dire :

$$D' - D = \partial C - A.$$

D'après la définition de la norme plate, ca donne :

$$\mathcal{F}(D'-D) \leq M(C) + M(A).$$

Or, on montre que :

$$M(C) \leq M(D) \sup_{\mathrm{spt}(D)} |f - \mathrm{Id}| \sup_{\mathrm{spt}(D)} \left(\|Df\|^2, 1\right)$$

et :

$$M(A) \leq M(\partial D) \sup_{\mathrm{spt}(D)} |f - \mathrm{Id}| \sup_{\mathrm{spt}(D)} \left(\|Df\|, 1\right).$$

$\square$

Proposition 17 *Soit B' un borélien de $\mathbb{R}^3$ et $B = B' \cap \partial T$. Alors*

$$\sup_{spt(D)} |f - Id| \leq \max(\delta_B, \alpha_B)$$

et

$$\forall k \geq 1, \sup_{spt(D)} \|Df\| \leq \frac{\sup(1, \|II_B\|)}{1 - \delta_B \|II_B\|},$$

où δ_B est la distance de Hausdorff entre B et $pr(B)$; α_B est le maximum sur les points (x,ξ) du support de $N(T)$ restreint à B de l'angle entre ξ et la normale à M en $\mathrm{pr}_M(x)$; $\|II_B\|$ est le maximum de la norme de la deuxième forme fondamentale II de M restreinte à $pr(B)$.

Les deux propositions précédentes permettent directement de prouver le théorème 10.

7.3 Un résultat spécifique aux triangulations

Théorème 11 *Soit M une surface lisse de classe C^2 de $\mathbb{R}^3$ qui borde un compact V et $T \subset \mathbb{R}^3$ une triangulation qui est le bord d'un compact W de $\mathbb{R}^3$, dont les sommets appartiennent à M, tel que $T \subset U_M$ et tel que la projection $pr : T \to M$ soit injective. Si B est l'intérieur relatif d'une union de triangles de T, alors on a :*

$$\begin{aligned}
|\phi_W^G(B) - \phi_V^G(pr(B))| &\leq C_M K\epsilon \\
|\phi_W^H(B) - \phi_V^H(pr(B))| &\leq C_M K\epsilon \\
\|\overline{II}_W(B) - \overline{II}_V(pr(B))\| &\leq C_M K\epsilon \\
\|\overline{\overline{II}}_W(B) - \overline{\overline{II}}_V(pr(B))\| &\leq C_M K\epsilon,
\end{aligned}$$

où C_M est un nombre réel qui ne dépend que de la courbure maximum de M et

$$K = \sum_{t \text{ triangle de } \bar{B}} r(t)^2 + \sum_{\substack{t \text{ triangle de } \bar{B} \\ t\cap\partial B \neq \emptyset}} r(t)$$

$$\epsilon = \max\{r(t), t \subset B\}.$$

La preuve de ce résultat repose sur le lemme suivant :

Lemme 7 *Soit t un triangle de T. On note α_t le maximum sur les points $x \in t$ de l'angle entre la normale à t et la normale à M en $\mathrm{pr}_M(x)$. On a alors :*

$$\alpha_t = O(r(t)).$$

Preuve :
A faire ou à regarder dans [11]. □

Preuve du théorème 11
On pose

$$s(B) = \sum_{t \text{ triangle de } \bar{B}} r(t)^2 \quad et \quad sd(B) = \sum_{\substack{t \text{ triangle de } \bar{B} \\ t \cap \partial B \neq \emptyset}} r(t).$$

• Bornons la masse $M(N(W)\llcorner_{(B\times\mathbb{S}^2)})$
La masse $M(N(W)\llcorner_{(B\times\mathbb{S}^2)})$ au dessus de B se décompose en trois termes :

– La masse M_t au dessus des faces de T : M_t est égal à l'aire de B ; comme l'aire d'un triangle t est inférieur à $\pi r(t)^2$, on a

$$M_t = \sum_{t \text{ triangle de } \bar{B}} Aire(t) = O\left(s(B)\right).$$

– La masse M_a au dessus des arêtes de T : d'après le lemme 7, l'angle $\beta(e)$ entre deux triangles t et t' adjacents à une arête e est en $O(r(t) + r(t'))$. De même, la longueur de l'arête e est inférieure à $2r(t)$. Donc

$$M_a = \sum_{e \text{ arête de } \bar{B}} |\beta(e)| \; long(e) = O(s(B)).$$

– La masse M_s au dessus des sommets de T : prenons un sommet p de T. On note $n(p)$ la normale à M en p et n_i les normales aux triangles t_i contenant p et ordonnés de manière circulaire. La masse M_s est inférieure à la somme des aires des triangles sphériques $n(p)n_in_{i+1}$. L'aire d'un triangle sphérique étant en $O(l^2)$ (si l est la longueur du plus grand coté) on a directement que

$$M_s = O(s(B)).$$

En résumé, on a donc

$$M(N(W)\llcorner_{(B\times\mathbb{S}^2)}) = O(s(B)).$$

• Bornons la masse $M(\partial(N(W)\llcorner_{(B\times\mathbb{S}^2)}))$
La masse $M(\partial(N(W)\llcorner_{(B\times\mathbb{S}^2)}))$ au dessus de B se décompose en deux termes :

– la masse au dessus des arêtes du bord de B, qui correspond à la longueur de ∂B et qui est donc en $O(sd(B))$.

– la masse aux dessus des sommets du bord de B : pour chaque sommet p de ∂B et pour chaque arête a adjacente à deux triangles t et t' de B contenant p, on a un arc de cercle dont la longueur est en $O(r(t) + r(t'))$. On en conclu que cette masse est en $O(sd(B))$.

• Bornons les autres quantités
La quantité $\max(\alpha_B, \delta_B)$ est en $O(\alpha_B)$ et la quantité

$$\left(\frac{\sup_B(1, \|II_B\|)}{1 - \delta_B \; \|II_B\|}\right)^2$$

est majorée par une quantité qui dépend de la courbure maximum de $M \cap pr(B)$.

8 Quelques remarques sur les applications

Ce dernier résultat peut s'appliquer à la *triangulation de Delaunay restreinte*. L'intérêt est que l'on connaît des algorithmes qui permettent de construire la triangulation de Delaunay resteinte d'un nuage de points sur une surface. Pour plus de détails, on peut se référer par exemple à [4, 6].

D'autre part, le fait de calculer des courbures anisotropes sur une triangulation permet de calculer des directions principales discrètes. Ceci peut être ensuite utilisé pour remailler la triangulation suivant les lignes de courbure discrètes. Pour plus de détails, on peut également se référer par exemple à [4, 5].

Références

[1] T. Banchoff, *Critical points and curvature for embedded polyedra*, J. Diff. Geom 1 (1967) 245-256.

[2] M. P. Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces* (Translated from the Portuguese, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976).

[3] B. Cintract, *Courbures lisses et discrètes*, mémoire de DEA de mathématiques, Lyon 1, 1998.

[4] D. Cohen Steiner, *Quelques problèmes liés à la discrétisation de surfaces*, thèse de l'école polytechnique, 2004.

[5] D. Cohen-Steiner, P. Alliez, M. Desbrun, *Variational Shape Approximation*, In Proceedings SIGGRAPH'04.

[6] D. Cohen Steiner, J.M. Morvan, *Restricted Delaunay Triangulations and Normal Cycle*, SoCG 2003.

[7] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[8] H. Federer, *Curvature measures*, Trans. Amer. Math. Soc **93** (1959) 418-491.

[9] F. Morgan, *Geometric Measure Theory*, Acad. Press, INC, 1987.

[10] J.-M. Morvan, Generalized Curvatures. Geometry and Computing, Vol 2. Springer Verlag, 2008.

[11] J.M. Morvan and B. Thibert, *On the approximation of the normal vector field and the area of a smooth surface*, Discrete and Computational Geometry, vol 32/3 pp 383-400, 2004.

Table des matières