

# Séminaires & Congrès

C O L L E C T I O N   S M F



## QUELQUES EXEMPLES ET RÉFLEXIONS SUR LA PLACE DES IMAGES EN MATHÉMATIQUE

Vincent Borrelli & Francis Lazarus & Boris Thibert

**SMF 2018 : CONGRÈS DE LA  
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE  
DE FRANCE**

**Numéro 32**

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

## QUELQUES EXEMPLES ET RÉFLEXIONS SUR LA PLACE DES IMAGES EN MATHÉMATIQUE

*par*

Vincent Borrelli, Francis Lazarus & Boris Thibert

---

*Mathematicians usually have fewer and poorer figures  
in their papers and books than in their heads*

William THURSTON [45]

### 1. Introduction

Le rôle des images en mathématiques est ambigu. Selon l'époque et le lieu, le statut des images dans le raisonnement mathématique peut radicalement varier [35]. Le développement de l'informatique au  $XX^e$  siècle a renforcé ce rôle, accroissant de manière troublante l'imbrication entre raisonnement, intuition et figuration. La puissance de calcul des ordinateurs, désormais hors d'atteinte de l'entendement humain, permet de démontrer des résultats mathématiques encore inaccessibles par les moyens traditionnels, parfois au grand désarroi des mathématiciens eux-mêmes. Alliée à des capacités graphiques tout aussi impressionnantes, cette puissance donne accès à des simulations numériques dont les visualisations génèrent un flux sans précédent de nouvelles images ou de vidéos. Cette avalanche d'images n'a pourtant pas apporté de clarification quant à la place de la visualisation au sein des mathématiques. Elle reste disputée et discutée ; indue et marginale pour les uns, incontournable et insuffisamment étendue pour les autres [17].

Lors de la demi-journée grand public du congrès national de la Société Mathématique de France, l'un des auteurs a présenté une conférence intitulée *Trois sphères qui défient l'impossible*<sup>(1)</sup> dont l'objet était l'histoire de la visualisation des solutions de trois problèmes célèbres relatifs à la sphère : celles de la surface de Boy, du retournement de la sphère de Smale et des plongements  $C^1$  de Nash-Kuiper. Nous

---

<sup>(1)</sup> Cette conférence est visible à l'adresse : <http://lille1tv.univ-lille1.fr/collections/video.aspx?id=25aac2d7-3497-4eea-9351-dbabdc9aa15>.

proposons dans ce texte de reprendre l'exposition de ces trois questions historiques. Leurs développements constituent des exemples frappants du rôle multiple de l'image en géométrie différentielle. Nous faisons suivre cette exposition par quelques considérations sur la place de l'image en mathématique.

## 2. La surface de Boy

En 1874, Felix Klein observe que l'espace projectif  $\mathbb{R}P^2$ , c'est-à-dire le quotient de la sphère par l'antipodie  $\mathbb{S}^2/(x \sim -x)$ , est une surface non orientable ce qui implique qu'elle ne peut être plongée dans  $\mathbb{R}^3$ . En effet, l'image par un plongement d'une surface compacte sans bord dans  $\mathbb{R}^3$  sépare l'espace en deux composantes connexes dont l'une est bornée - l'intérieur - et l'autre non. Ceci entraîne que la surface doit être orientable. Rappelons au passage qu'un *plongement* d'une variété compacte  $M$  dans  $\mathbb{R}^n$  est une application injective  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  qui est une immersion en chacun de ses points. Le mot *immersion* signifie que pour tout  $x \in M$  la différentielle  $df_x$  est une application injective.

Si l'on s'autorise une dimension supplémentaire pour l'espace d'arrivée alors il devient possible de plonger  $\mathbb{R}P^2$ . Un tel plongement peut s'obtenir à partir de l'application de Véronèse :

$$\begin{aligned} h : \quad \mathbb{S}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}xy). \end{aligned}$$

Cette application passe au quotient et définit un plongement de  $\mathbb{R}P^2$  dans  $\mathbb{R}^6$  dont l'image est incluse à la fois dans l'hyperplan affine  $X_1 + X_2 + X_3 = 1$  et dans la sphère unité, elle est donc contenue dans une sphère de dimension quatre. En composant  $h$  avec une projection stéréographique convenable, on obtient un plongement de  $\mathbb{R}P^2$  dans  $\mathbb{R}^4$ .

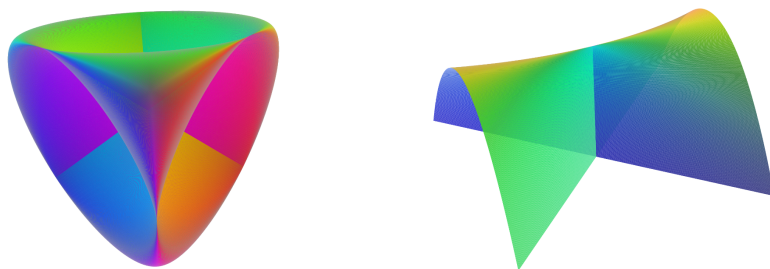


FIGURE 1. À gauche, la surface romane ; à droite, un parapluie de Whitney

Reste la question de l'existence d'une immersion de  $\mathbb{R}P^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  : en 1844, lors d'un voyage à Rome, Jakob Steiner découvre<sup>(2)</sup> une application de  $\mathbb{R}P^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ , appelée depuis *surface romane*, qui manque d'être une immersion en seulement six points. Elle est induite par

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{S}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (yz, xz, xy). \end{aligned}$$

et présente en chacun des points où elle n'est pas immersive une singularité de type *parapluie de Whitney*. La stabilité de ce type de singularité par déformation locale est peut-être la raison qui a conduit David Hilbert à penser qu'il n'existait pas d'immersion de  $\mathbb{R}P^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  et de proposer à son étudiant Werner Boy d'en faire la preuve. Ce dernier montre tout l'inverse et construit en 1901 une immersion de  $\mathbb{R}P^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ , la *surface de Boy* [9].

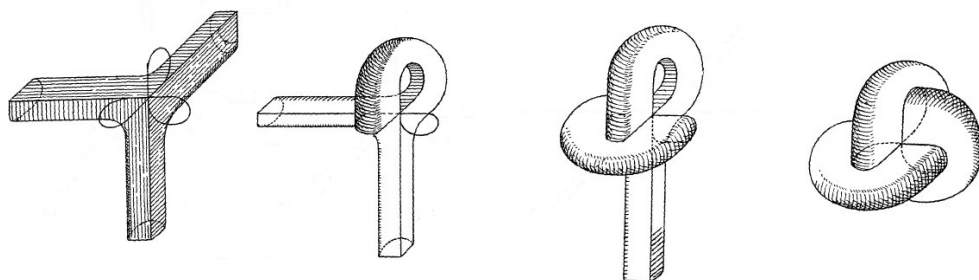


FIGURE 2. Schéma de construction d'une surface de Boy. Images extraites de [9].

De nombreux textes [22, 2, 15, 36, 3, 38] explorent en détail cette surface fascinante, nous ne le ferons pas ici. Le lecteur désireux d'en avoir rapidement une première compréhension pourra regarder deux vidéos particulièrement éclairantes, l'une de l'académie des sciences et des arts de Serbie<sup>(3)</sup> et l'autre réalisée par Rob Kusner et Robert Bryant<sup>(4)</sup>. Il pourra également contempler un modèle 3D de toute beauté dû à Arnaud Cheritat sur le site d'*Imaginary*<sup>(5)</sup>.

La construction de Werner Boy s'appuie sur de nombreux dessins, elle ne constitue pas une démonstration. Il faudrait pour cela produire une paramétrisation explicite de la surface dont on pourrait vérifier ensuite par un calcul direct qu'elle est bien une immersion. Werner Boy était conscient de ce défaut. Dans sa thèse, il suggère une méthode pour approximer sa surface avec des polynômes mais la tâche va s'avérer très ardue et ce n'est que bien plus tard, en 1978, que Bernard Morin, mathématicien ayant

<sup>(2)</sup> L'histoire de cette découverte est racontée dans [41].

<sup>(3)</sup> <https://www.youtube.com/watch?v=9gRx66xKXek>.

<sup>(4)</sup> <http://www.indiana.edu/~minimal/archive/NonOrientable/NonOrientable/Bryant-anim/web/qt.mov>.

<sup>(5)</sup> <https://imaginary.org/fr/node/860>.

la particularité d'être aveugle, publiera la première paramétrisation d'une surface ressemblant raisonnablement aux dessins de Werner Boy [32]. La voici<sup>(6)</sup> :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto r^{-1}(f_1, f_2, f_3) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} r &= (x^2 + y^2)(3x^4 - 6x^2y^2 - y^4 + 2zx^3 + 2zxy^2) \\ f_1 &= 8y(x^2 + y^2)(4xy^2 - x^2z - y^2z) \\ f_2 &= -5x^6 + 57x^4y^2 - 63x^2y^4 + 3y^6 + g \\ f_3 &= 2s^{-1}\rho^6h \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ s &= 2\rho^6 + y(y^2 - 3x^2)(z^3 + zx^2 + zy^2 + x^2 - 3xy^2) \\ g &= -12x^5z + 24x^3y^2z + 36xy^4z - 4x^4z^2 - 8x^2y^2z^2 - 4y^4z^2 \\ h &= 13x^6 - 33x^4y^2 + 87x^2y^4 + 5y^6 - g \end{aligned}$$

La restriction à  $\mathbb{S}^2$  de cette application induit une immersion de  $\mathbb{R}P^2$  mais, outre la complexité de son expression analytique, elle souffre d'un défaut, elle n'est pas  $C^2$  lorsque  $x^2 + y^2 = 0$ . Avec le développement de l'informatique, de nombreuses autres tentatives vont être menées conduisant à des paramétrisations aux expressions improbables et sophistiquées. Elles sont présentées et rassemblées dans une perspective historique par François Apéry qui consacre un ouvrage entier à la question des immersions de  $\mathbb{R}P^2$  [2]. Ce même auteur obtient en 1986 une immersion de  $\mathbb{R}P^2$  dont l'expression algébrique est particulièrement compacte : les fonctions coordonnées se réduisent à des polynômes de degré quatre. Dans l'article [1] où il présente ses résultats, on peut lire et méditer ceci : *Il est à signaler qu'une étude systématique des surfaces rationnelles du sixième degré engendrées par une famille à un paramètre de coniques était déjà faite par T. Reye en 1896 [40] et que bien que notre famille corresponde à un cas singulier [...] W. Boy aurait pu y trouver sa surface.*

Parallèlement, en étudiant l'énergie de Willmore des surfaces  $\Sigma$  immergées dans  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire l'intégrale du carré de leur courbure moyenne

$$W(\Sigma) = \int_{\Sigma} H^2 dA,$$

Rob Kusner construit une famille d'immersions  $f_p : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $p \geq 3$ ,  $p$  impair, dont tous les éléments sont critiques pour la fonctionnelle de Willmore [28]. La construction de cette famille s'inspire d'un travail antérieur dû à Robert Bryant [10]. Elle s'obtient en faisant une inversion sur certaines surfaces minimales de  $\mathbb{R}^3$  ayant une symétrie d'ordre  $p$ . Lorsque  $p = 3$ , l'immersion obtenue réalise le minimum de la fonctionnelle de Willmore parmi toutes les immersions de  $\mathbb{R}P^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  et il s'avère que son image est très proche des dessins de Boy. L'application  $f_3$  porte désormais le nom de

<sup>(6)</sup> Plus exactement, il s'agit d'une version que l'on trouve dans [2].

*paramétrisation de Bryant-Kusner* de la surface de Boy. C'est elle qui est représentée à l'entrée de l'Institut de recherches mathématiques d'Oberwolfach.

La famille  $(f_{2k+1})_{k \geq 1}$  de Rob Kusner montre que la surface de Boy n'est évidemment pas la seule façon d'immerger<sup>(7)</sup>  $\mathbb{R}P^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Il en existe de nombreuses autres qui s'en éloignent visiblement. Par exemple, la paramétrisation de Bernard Morin n'est qu'un cas particulier d'une famille dépendant d'un paramètre entier. Les images de  $\mathbb{R}P^2$  obtenues par cette famille sont appelées des *blagues à tabac* en raison de leur ressemblance avec ces objets. On en trouvera des représentations dans le livre de George Francis [15] ainsi que d'autres familles d'immersions. La création ou l'étude de nouvelles immersions de  $\mathbb{R}P^2$  est un sujet encore actif. Récemment, en s'intéressant aux immersions n'ayant qu'un seul point triple, Sue Goodman<sup>(8)</sup> et Greg Howard découvrent une nouvelle façon d'immerger  $\mathbb{R}P^2$  qu'ils appellent malicieusement la *surface de Girl* [25]. Il s'avérera ensuite que cette surface était connue de François Apéry mais elle n'avait que très peu attiré l'attention. Cette omission est réparée désormais, ses propriétés sont scrutées en détails dans [18]. Encore plus récemment, Mélanie Theillièrre a construit des immersions de  $\mathbb{R}P^2$  au moyen de la théorie de l'intégration convexe. Les expressions analytiques sont particulièrement simples et les images qu'elles génèrent évoquent la famille des blagues à tabac [44].

### 3. Le retournement de la sphère

Lorsqu'il publie la première paramétrisation de la surface de Boy, Bernard Morin ne cherche pas à combler la démonstration de Werner Boy, il est en réalité mû par un tout autre problème : réaliser un retournement explicite de la sphère. De quoi s'agit-il ? Étant données deux variétés  $M$  et  $N$ , on aimerait connaître la topologie de l'espace des immersions  $I(M, N)$  de  $M$  dans  $N$  et en particulier distinguer ses composantes connexes par arcs. Le cas  $M = \mathbb{S}^2$  et  $N = \mathbb{R}^3$  est exploré par Stephan Smale au milieu des années 50 et sa conclusion est restée célèbre tant elle était inattendue : l'espace  $I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)$  est connexe par arcs [42]. Ceci signifie que deux immersions quelconques peuvent être jointes par une famille continue d'immersions, on dit alors qu'elles sont *régulièrement homotopes*. En particulier si l'on choisit pour ces deux immersions l'inclusion naturelle  $i : \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  et son opposé  $-i$ , la famille les joignant réalise un *retournement de la sphère*.

La démonstration de Stephan Smale est constructive, sa rédaction est au niveau des standards de rigueur contemporain et actuel, son argument principal – appelé dans le jargon des topologues différentiels *le théorème de recouvrement homotopique pour les immersions* – est persuasif, son raisonnement est passé au crible par les spécialistes du domaine et rapidement généralisé<sup>(9)</sup>. Bref, il n'est décemment pas possible de douter.

<sup>(7)</sup> Signalons au passage que l'on distingue deux surfaces de Boy image miroir l'une de l'autre.

<sup>(8)</sup> Enfin une mathématicienne dans cette histoire !

<sup>(9)</sup> René Thom présente les résultats de Stephan Smale à l'exposé 157 du Séminaire Bourbaki en 1957, Morris Hirsch classe les immersions pour  $M$  et  $N$  quelconques en 1959 [24].

Pourtant, la nécessité d'une visualisation s'impose immédiatement, non pas que l'on soit méfiant mais plutôt que l'on aspire à une perception directe et essentielle du résultat de Smale. En effet, en dépit de son caractère constructif, la démonstration ne donne que très peu d'indices sur la façon dont le retournement pourrait s'effectuer concrètement. Smale lui-même n'en a aucune idée, il écrit sobrement en commentaire de son théorème : *It is not trivial to see that a reflexion in  $\mathbb{E}^3$  is regularly homotopic to the identity on the unit sphere*. La visualisation d'une telle homotopie régulière va mobiliser un certain nombre de mathématiciens de renom dont René Thom et William Thurston. Son histoire, au moins pour la période 1958-1995, est bien documentée [29, 15]. Nous nous contenterons ici d'en souligner quelques points.

Le tout premier retournement explicite est dû à Arnold Shapiro et date de 1961. Il ne le publie pas considérant qu'il ne dispose pas d'un formalisme adéquat pour traduire ses images mentales en un article de bon aloi, cela ne sera fait que longtemps plus tard par George K. Francis et Bernard Morin dans un texte abondamment illustré [16]. Ses idées finissent cependant par arriver jusqu'à Anthony Phillips qui, en croyant comprendre sa méthode, invente sans le savoir une nouvelle façon d'effectuer le retournement. Il publie ce qu'il croit être la solution d'Arnold Shapiro en 1966 au *Scientific American* et réalise pour l'occasion une série de dessins magnifiques<sup>(10)</sup> [37]. Sa conclusion relègue néanmoins l'image à un rôle dispensable et laisse songeur : *Perhaps even more amazing is the ability of mathematicians to convey these ideas to one another without relying on pictures. This ability is strikingly brought out by the history of Shapiro's description of how to turn a sphere inside out. I learned of its construction from the French topologist René Thom who learned of it from his colleague Bernard Morin, who learned of it from Arnold Shapiro himself*.

Bernard Morin conçoit son propre retournement en 1967. Après plus de six années de labeur, celui-ci est mis en image par Nelson Max dans un des tous premiers films d'animation 3D<sup>(11)</sup> : *Turning a sphere inside out*. Ceci inspire à Silvio Levy la réflexion suivante [29] : *Morin, incidentally, is blind, and the fact that he was one of the first people to understand how a sphere can turn inside out is both a tribute to his ability and a convincing proof that visualization goes far beyond the physical sense of sight*<sup>(12)</sup>.

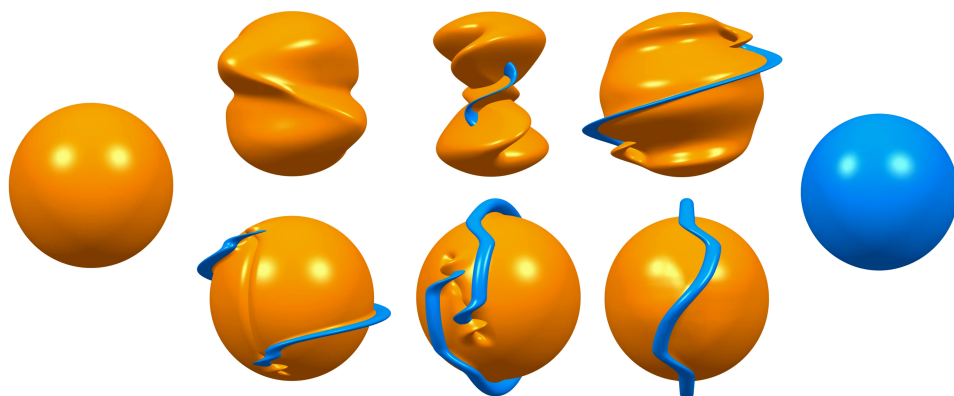
Soixante ans après la publication de la classification des immersions de la sphère par Smale, il serait légitime de penser que le sujet de sa visualisation soit clos ou du moins en nette décroissance. Ces dernières années montrent tout le contraire. Ce ne sont pas moins de quatre nouveaux retournements qui sont apparus en trois petites années. Le premier est l'oeuvre d'Arnaud Chéritat [12], le second est dû à Chris Hills et Erik de Neve<sup>(13)</sup>, le troisième à Mikami Hirasawa et Minoru Yamamoto [23] et le dernier à Adam et Witold Bednorz [5]. Chacun de ces retournements introduit une nouvelle idée, une nouvelle perspective inexplorée

<sup>(10)</sup> Malheureusement entachés de quelques erreurs dues au graphiste de la revue.

<sup>(11)</sup> Voir l'article *History of computer animation* sur *Wikipedia*.

<sup>(12)</sup> Profitons de l'occasion pour recommander la lecture de *The World of Blind Mathematicians*, Notices of the American Mathematical Society, 49 (10) January 2002

<sup>(13)</sup> [www.chrishills.org.uk/ChrisHills/sphereeversion/ASimpleSphereEversion.mp4](http://www.chrishills.org.uk/ChrisHills/sphereeversion/ASimpleSphereEversion.mp4)


 FIGURE 3. Le retournement d'Arnaud Chéritat. *Images : Arnaud Chéritat.*

dans les précédentes approches. Leur diversité témoigne qu'une visualisation ne se réduit pas à une simple illustration desséchante par son évidence le sujet qu'elle éclaire. D'ailleurs, aucune des visualisations jamais produites n'est instantanément évidente, elles réclament toutes une attention soutenue pour être comprises. C'est probablement une des raisons pour lesquelles la question du retournement continue de fasciner : la quête d'une visualisation ultime, immédiatement sensible, n'est pas achevée. Elle ne le sera peut-être jamais mais peu importe. Comme l'écrivent Bernard Morin et Jean-Pierre Petit en conclusion d'un texte paru dans *Pour La Science*, cette quête enrichit l'imagination des mathématiciens, et ce n'est pas là la moindre de ses qualités [33].

#### 4. La sphère réduite

Quelques années avant la découverte de Smale, un autre résultat à la frontière entre topologie différentielle et la géométrie avait fait sensation : la construction de plongements isométriques  $C^1$  par John Nash et Nicolaas Kuiper [34, 27]. Une application  $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$  entre variétés riemanniennes est dite *isométrique* si elle conserve la longueur des courbes i.e.

$$\text{Long}(f \circ \gamma) = \text{Long}(\gamma)$$

pour toute courbe  $\gamma : I \rightarrow M$ . En coordonnées, cette condition se traduit infinitésimalement par un système de  $s_m = \frac{m(m+1)}{2}$  équations différentielles non linéaires du premier ordre :

$$\forall 1 \leq i \leq j \leq m, \quad h(\partial_i f, \partial_j f) = g(\partial_i, \partial_j)$$

où  $m$  est la dimension de  $M$ . Ludwig Schläfli conjecture en 1871 qu'un tel système admet localement une solution analytique dès que la dimension  $n$  de la variété  $N$  est



égale à  $s_m$ . Cette conjecture est démontrée en 1927 par Maurice Janet et Élie Cartan et le nombre  $s_m$  s'appelle depuis *la dimension de Janet* [26, 11].

En cherchant à construire des applications isométriques  $C^\infty$ , John Nash découvre en 1954 un procédé générant des plongements isométriques  $C^1$  qui échappent totalement à la contrainte que constitue la dimension de Janet :

**Théorème (Nash-Kuiper<sup>(14)</sup>).** — *Soit  $f_0 : (M, g) \rightarrow \mathbb{E}^q$  un plongement strictement court avec  $q > m$ . Alors, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un plongement isométrique  $f_\epsilon : (M, g) \rightarrow \mathbb{E}^q$  de classe  $C^1$  dont l'image est contenue dans un  $\epsilon$ -voisinage de  $f_0(M)$ .*

Un plongement  $f_0$  est dit *strictement court* s'il raccourcit la longueur de toutes les courbes, ou plus formellement, s'il existe  $0 < K < 1$  tel que  $h(\partial_i f, \partial_j f) \leq Kg(\partial_i, \partial_j)$  pour  $1 \leq i \leq j \leq m$ . Dans le cas où la variété  $M$  est compacte de tels plongements s'obtiennent facilement, il suffit de composer un plongement quelconque avec une homothétie de rapport suffisamment petit. D'où une première conséquence surprenante du théorème de Nash-Kuiper ; si  $M$  est compact et admet un plongement dans un espace euclidien alors elle admet un plongement isométrique  $C^1$  dans ce même espace. Or, le théorème de plongement de Whitney, connu depuis 1936, assure l'existence d'un plongement dans un espace euclidien de dimension  $q = 2m$  [46]. Toutes les variétés Riemanniennes compactes admettent donc des plongements isométriques  $C^1$  dans  $\mathbb{E}^{2m}$ , une dimension (bien) plus basse que celle de Janet... sauf bien sûr pour les petites valeurs de  $m$ .

Et même pour les petites valeurs de  $m$ , le résultat reste surprenant. Par exemple, dans le cas  $m = 2$ , puisque toutes les surfaces orientables se plongent dans  $\mathbb{R}^3$ , on déduit du théorème de Nash-Kuiper que toutes les surfaces riemanniennes compactes admettent un plongement isométrique  $C^1$  dans l'espace tridimensionnel. En comparaison, le résultat de Janet-Cartan fournit également un plongement isométrique dans  $\mathbb{E}^3$  (la dimension de Janet vaut  $s_2 = 3$ ) mais ce dernier est local et ne peut être étendu à toute la surface en général.

Au delà des aspects dimensionnels, les plongements isométriques construits par Nash-Kuiper ont une autre propriété déroutante : ils sont  $\epsilon$ -proches du plongement court initial. Voyons sur un exemple pourquoi ceci est étonnant. Partons de la sphère unité de  $\mathbb{E}^3$  et considérons pour plongement court l'homothétie de rapport  $\frac{1}{4}$  puis appliquons le théorème de Nash-Kuiper avec  $\epsilon < \frac{1}{4}$ . L'application  $f_\epsilon$  réalise alors un plongement isométrique  $C^1$  de la sphère unité dans une boule de rayon  $\frac{1}{2}$  : elle *réduit* la sphère. Pourquoi est-ce déroutant ? Parce qu'en géométrie  $C^2$ , celle qui nous est la plus familière, une telle application ne pourrait exister. Elle transgresserait l'invariance de la courbure et contredirait le théorème de la rigidité des sphères [30].

Compte tenu de la régularité inhabituelle<sup>(15)</sup> des objets qu'il construit et du caractère déconcertant de ses conclusions, le théorème de Nash-Kuiper a d'abord été accueilli avec perplexité et considéré comme une curiosité [43]. Lors de l'interview

<sup>(15)</sup> Inhabituelle... en géométrie.

qu'il accorde à l'occasion du Prix Abel, Mikhaïl Gromov déclare ceci : *At first, I looked at one of Nash's papers and thought it was just nonsense [...] It was incredible. It could not be true but it was true.* Puis il ajoute *I was thinking about this for several years, trying to understand the mechanism behind [the Nash's proof]* [39]. Le résultat de cette réflexion est la mise en lumière de la notion de  $h$ -principe et la transformation de la méthode de Nash-Kuiper en une technique plus générale de résolution de relations différentielles, l'*intégration convexe* [19].

Contrairement au retournement de la sphère, la question d'une construction explicite d'un plongement de Nash-Kuiper et de sa visualisation ne semble pas préoccuper les mathématiciens de l'époque. Elle est de toute façon humainement hors d'atteinte et l'usage de l'ordinateur à des fins de visualisation est alors inexistant. À notre connaissance, la première mention d'un intérêt pour une construction explicite figure dans un article de Robert Connelly datant de 1993 : *I know no explicit construction of such a flex or even of an explicit  $C^1$  embedding [of the sphere] other than the original sphere* [13]. Une construction explicite d'un plongement de Nash-Kuiper sera effectivement réalisée par Saïd Jabrane et les trois auteurs de cet article presque vingt ans après, en 2012 [7, 8]. La construction et la visualisation d'une sphère réduite viendront cinq ans plus tard, en 2017 [4].

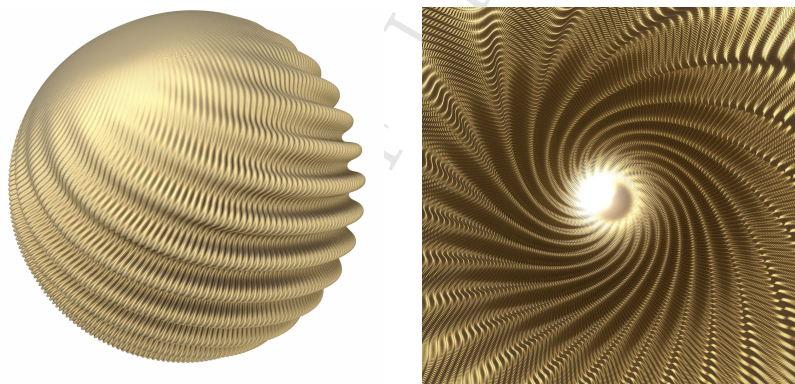


FIGURE 4. Une sphère réduite : vue extérieure et intérieure<sup>(16)</sup> Images : *Projet Hévée*

Les plongements explicites ayant rendu possible ces visualisations ont été élaborés au moyen de l'intégration convexe, montrant ainsi que cette théorie, en dépit d'une certaine réputation d'abstraction, était implémentable. Les images générées ont permis de comprendre la structure géométrique des plongements de Nash-Kuiper et ont conduit à la découverte de la structure  $C^1$ -fractale : l'application isométrique est de classe  $C^1$  tandis que le graphe de sa normale est un objet fractal. Elles ont suggéré une nouvelle approche de la question de la régularité. Jusqu'en 2012, toute l'attention était focalisée sur le caractère  $C^{1,\alpha}$  des plongements de Nash-Kuiper [6, 14], les images invitent désormais à explorer une autre voie où la continuité höldérienne de la

différentielle serait remplacée par des conditions d'auto-similarité [20]. Nous sommes donc dans un cas où, pour reprendre une formulation de Benoît Mandelbrot, *l'image devait intervenir en premier et la question, plus tard, comme une légende* [31].

## 5. Conclusion

Dans un texte célèbre intitulé *On Proof and Progress in Mathematics*, William Thurston souligne le point suivant : les mathématiciens ne recherchent pas une collection de réponses, ils cherchent à *comprendre*. L'objet de l'activité mathématique ne se réduit pas à la seule production de théorèmes. C'est la raison pour laquelle la démonstration du théorème des quatre couleurs, même certifiée par des logiciels d'aide à la preuve, c'est-à-dire avec un niveau de rigueur formelle bien supérieur à celui de la plupart de nos productions, reste insatisfaisante. Nous n'attendons pas seulement un théorème – une réponse certifiée à nos questionnements – nous attendons aussi et surtout de la compréhension [45]. En ce sens, les dessins de W. Boy sont bien plus proches de nos attentes que la démonstration formelle du théorème des quatre couleurs <sup>(17)</sup>.

Les images occupent depuis longtemps un vaste territoire dans les terres de la compréhension mathématique, c'est-à-dire au fond, dans le cœur de ce qu'est l'activité mathématique. En revanche, cet espace est systématiquement escamoté au moment de la rédaction des démonstrations. L'évaluation de l'activité mathématique se focalisant principalement sur le nombre de théorèmes produits, un phénomène de transfert plus ou moins conscient conduit à minimiser, voire à ignorer, la place de l'image. C'est probablement une des raisons pour lesquelles leur rôle paraît ambigu. Il ne l'est pas. C'est plutôt dans la façon dont les différentes facettes de l'activité mathématique sont estompées ou mises en avant que se cache l'ambiguïté.

En préambule du texte présentant ses fameux 23 problèmes pour les mathématiques du XX<sup>e</sup> siècle, David Hilbert fait le constat de l'asymétrie entre le rôle de l'image dans l'élaboration des raisonnements et son absence dans le formalisme mathématique. Il propose un objectif qui, s'il était atteint, changerait radicalement cet état de fait : incorporer directement les figures géométriques dans le *trésor des signes mathématiques* [21]. En dépit de certains succès – on pense en particulier aux diagrammes de la théorie des noeuds – force est de constater que cet objectif est encore loin d'être réalisé et qu'il demeure, comme l'écrit Étienne Ghys dans un texte <sup>(18)</sup> consacré à cette question, *un enjeu pour les mathématiques de demain* [17].

Cependant, le développement spectaculaire de l'outil informatique permet désormais d'envisager cet enjeu avec une perspective différente. Laissons libre cours à notre imagination pour se représenter l'activité de la future mathématicienne ou du futur mathématicien : celle-ci pourrait se concentrer sur la compréhension des

<sup>(17)</sup> Nous ne sommes pas en train de nier la nécessité de cette démonstration formelle bien entendu.

<sup>(18)</sup> Il existe aussi une vidéo disponible sur la toile d'une conférence du même auteur sur ce sujet : <https://www.youtube.com/watch?v=69Hfwmwy510o>.

objets et des phénomènes mathématiques et se délester de la preuve au sens formel. Le rôle du mathématicien serait alors celui d'un architecte élaborant le plan détaillé de l'édifice de sa compréhension tandis que la réalisation de cet édifice, c'est-à-dire la production d'une preuve certifiée, serait confiée à un ordinateur. Bien entendu, dans cette vision, l'interface homme-machine serait suffisamment souple pour accepter les schémas, les graphiques et les images<sup>(19)</sup>. L'ordinateur puiserait ensuite dans le corpus mathématique disponible en ligne pour générer une preuve formelle.

Cette vision peut sembler lointaine voire utopique. Remarquons pourtant qu'elle est quasiment effective dans certains cas, comme par exemple celui de la surface de Boy. Dans ce problème, ce sont les dessins de Werner Boy qui constituent le plan de l'édifice. Ce plan peut aisément être transmis à une machine au moyen d'un logiciel de dessin tridimensionnel qui se charge d'encoder les images sous forme de cartes combinatoires constituées de courbes splines. Les boîtes à outils disponibles sur internet – comme des logiciels de CAO (Conception Assistée par Ordinateur) – permettent ensuite de remplir les « trous » et de transformer la discrétisation de l'image en une véritable immersion.

Tant que nous ne disposerons pas de moyens efficaces pour certifier les images, il sera légitime, et même impératif, de mettre en doute ce qu'elles nous suggèrent. Elles ne pourront être autorisées à franchir la frontière séparant la perception du formalisme, la compréhension de l'explication ; et on se doute que la route sera longue avant de pouvoir lever cet interdit. En attendant, et pour nous prémunir de la tentation du statu quo, gardons en tête ces quelques phrases d'Egbert Brieskorn, découvreur des sphères exotiques éponymes : *There is no doubt that the contemplation and the creation of beautiful geometric figures has been and will be an integral part of creative mathematical thought [...] To separate the ideas from the appearances, the structure from the surface, analytical thinking from holistic perception and science from art does not correspond to the reality of our mind and is simply wrong if it is meant as an absolute distinction*<sup>(20)</sup>.

## Références

- [1] F. APÉRY – « La surface de Boy », *Adv. in Math.* **61** (1986), no. 3, p. 185–266.
- [2] ———, *Models of the real projective plane*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1987.
- [3] B. ARTMANN – « Pictures of the projective plane », *The Montana Mathematics Enthusiast* **3** (2007), p. 3–16.
- [4] E. BARTZOS, V. BORRELLI, R. DENIS, F. LAZARUS, D. ROHMER & B. THIBERT – « An explicit isometric reduction of the unit sphere into an arbitrarily small ball », *Found. Comput. Math.* **18** (2018), no. 4, p. 1015–1042.
- [5] A. BEDNORZ & W. BEDNORZ – « Analytic sphere eversion with minimum of topological events », prépublication arXiv:1711.10466.

<sup>(19)</sup> Le programme *Watson*, conçu par IBM, est capable répondre à des questions formulées en langage naturel. Il est célèbre pour avoir gagné au jeu télévisé *Jeopardy!* en 2011.

<sup>(20)</sup> Citation extraite de la préface de [2].

- [6] Y. F. BORISOV – « Irregular surfaces of the class  $C^{1,\beta}$  with an analytic metric », *Sibirsk. Mat. Zh.* **45** (2004), no. 1, p. 25–61.
- [7] V. BORRELLI, S. JABRANE, F. LAZARUS & B. THIBERT – « Flat tori in three-dimensional space and convex integration », *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **109** (2012), no. 19, p. 7218–7223.
- [8] ———, *Isometric embeddings of the square flat torus in ambient space*, Ensaaios Matemáticos, vol. 24, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2013.
- [9] W. BOY – « Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen », *Math. Ann.* **57** (1903), no. 2, p. 151–184.
- [10] R. L. BRYANT – « A duality theorem for Willmore surfaces », *J. Differential Geom.* **20** (1984), no. 1, p. 23–53.
- [11] E. CARTAN – « Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien », *Ann. Soc. Pol. Math.* **6** (1927), p. 1–7.
- [12] A. CHÉRITAT – « Yet another sphere eversion », prépublication arXiv:1410.4417.
- [13] R. CONNELLY – « Rigidity », in *Handbook of convex geometry*, Vol. A, B, North-Holland, 1993, p. 223–271.
- [14] S. CONTI, C. DE LELLIS & L. J. SZÉKELYHIDI – «  $h$ -principle and rigidity for  $C^{1,\alpha}$  isometric embeddings », in *Nonlinear partial differential equations*, Abel Symp., vol. 7, Springer, 2012, p. 83–116.
- [15] G. K. FRANCIS – *A topological picturebook*, Springer, 1987.
- [16] G. K. FRANCIS & B. MORIN – « Arnold Shapiro’s eversion of the sphere », *Math. Intelligencer* **2** (1979/80), no. 4, p. 200–203.
- [17] E. GHYS – *Les images comme symboles mathématiques*, Images des Mathématiques, CNRS Éditions, 2009.
- [18] S. GOODMAN, A. MELLNIK & C. SÉGUIN – « Girls surface », in *Bridges Conference Proceedings*, 2013.
- [19] M. GROMOV – *Partial differential relations*, *Ergebn. Math. Grenz.*, vol. 9, Springer, 1986.
- [20] M. GROMOV – « Geometric, algebraic, and analytic descendants of Nash isometric embedding theorems », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **54** (2017), no. 2, p. 173–245.
- [21] D. HILBERT – « Mathematische Probleme Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris », 1900.
- [22] D. HILBERT & S. COHN-VOSSEN – *Geometry and the imagination*, Chelsea Publishing Company, N. Y., 1952.
- [23] M. HIRASAWA & M. YAMAMOTO – « Sphere eversion from the viewpoint of generic homotopy », *Topology Appl.* **223** (2017), p. 13–29.
- [24] M. W. HIRSCH – « Immersions of manifolds », *Trans. Amer. Math. Soc.* **93** (1959), p. 242–276.
- [25] G. HOWARD & S. GOODMAN – « Generic maps of the projective plane with a single triple point », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **152** (2012), no. 3, p. 455–472.
- [26] M. JANET – « Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien », *Ann. Soc. Pol. Math.* **5** (1927), p. 38–43.
- [27] N. H. KUIPER – « On  $C^1$ -isometric imbeddings. I, II », *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **58** = *Indag. Math.* **17** (1955), p. 545–556, 683–689.

- [28] R. KUSNER – « Conformal geometry and complete minimal surfaces », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **17** (1987), no. 2, p. 291–295.
- [29] S. LEVY – *Making waves*, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1995.
- [30] H. LIEBMANN – « Ueber die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung », *Math. Ann.* **53** (1900), no. 1-2, p. 81–112.
- [31] B. MANDELBROT – *La forme d'une vie : Mémoires (1924–2010)*, Flammarion, 2014.
- [32] B. MORIN – « Équations du retournement de la sphère », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **287** (1978), no. 13, p. A879–A882.
- [33] B. MORIN & J.-P. PETIT – « Le retournement de la sphère », *Pour la science* **15** (1979), p. 34–49.
- [34] J. NASH – «  $C^1$  isometric imbeddings », *Ann. of Math.* **60** (1954), p. 383–396.
- [35] J. PEIFFER – *Rôle des figures dans la transmission et la production des mathématiques*, Images des Mathématiques, CNRS Éditions, 2006.
- [36] J.-P. PETIT – *Le topologicon*, Belin, 1999.
- [37] A. PHILLIPS – « Turning a surface inside out », *Scientific American* **214** (1966), p. 112–120.
- [38] U. PINKALL – « Models of the real projective plane », in *Mathematical Models* (G. Fischer, dir.), Springer, 2017.
- [39] M. RAUSSEN & C. SKAU – « Interview with Mikhail Gromov », *Notices Amer. Math. Soc.* **57** (2010), no. 3, p. 391–403.
- [40] T. REYE – « Ueber quadratische Transformationen und rationale Flächen mit Kegelschnittschaaren », *Math. Ann.* **48** (1896), no. 1-2, p. 113–141.
- [41] D. E. ROWE – *A richer picture of mathematics*, Springer, 2018.
- [42] S. SMALE – « A classification of immersions of the two-sphere », *Trans. Amer. Math. Soc.* **90** (1958), p. 281–290.
- [43] D. SPRING – « The golden age of immersion theory in topology : 1959–1973. A mathematical survey from a historical perspective », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **42** (2005), no. 2, p. 163–180.
- [44] M. THEILLIÈRE – « Convex integration theory without integration », travail en cours de rédaction, 2018.
- [45] W. P. THURSTON – « On proof and progress in mathematics », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **30** (1994), no. 2, p. 161–177.
- [46] H. WHITNEY – « Differentiable manifolds », *Ann. of Math.* **37** (1936), no. 3, p. 645–680.

- 
- V. BORRELLI, Institut Camille Jordan, UMR CNRS 5208, Université Claude-Bernard Lyon 1  
*E-mail* : [borrelli@math.univ-lyon1.fr](mailto:borrelli@math.univ-lyon1.fr) • *Url* : <http://math.univ-lyon1.fr/~borrelli/>
  - F. LAZARUS, Laboratoire Gipsa-Lab, UMR CNRS 5216, Université Grenoble Alpes  
*E-mail* : [Francis.Lazarus@gipsa-lab.grenoble-inp.fr](mailto:Francis.Lazarus@gipsa-lab.grenoble-inp.fr)  
*Url* : <http://www.gipsa-lab.fr/~francis.lazarus/>
  - B. THIBERT, Laboratoire Jean Kuntzmann, UMR CNRS 5224, Université Grenoble Alpes  
*E-mail* : [Boris.Thibert@univ-grenoble-alpes.fr](mailto:Boris.Thibert@univ-grenoble-alpes.fr)  
*Url* : <http://ljk.imag.fr/membres/Boris.Thibert/>

