Le pouvoir des mathématiques

1 Introduction

La question du rapport entre mathématiques et réalité, pour ancienne et rebattue qu'elle soit, n'a toujours pas été tranchée de façon satisfaisante. Schématiquement, deux thèses sont en présence, incarnées par J.P. Changeux et A. Connes dans Matière à Pensée (Ed. O. Jacob, 1989). Soit les mathématiques sont une création de l'esprit humain (Changeux), soit elles existent indépendamment de lui (Connes). Il est impossible pour quelqu'un qui exerce en mathématiques appliquées de n'être pas tenté de prendre partie, ou au moins de participer au débat. J'avais il y a quelques années exprimé dans "Trans-Disciplines" (n°2, mai 1992), mon irrésolution. Partagé entre ma pratique quotidienne des mathématiques qui est une découverte permanente, et mon raisonnement sur leur histoire qui semble contenir plus d'invention que de découverte, je penchais pour Changeux tout en me sentant proche de Connes (révérence gardée). La parution récente d'articles de "Science et Vie" (n°984, septembre 1999), m'a conduit à réfléchir à nouveau au problème, et en particulier à ce qui me semblait jusque-là être le principal argument "platonicien" : si les mathématiques n'ont aucune réalité indépendante de l'homme, d'où vient que, grâce à elles, nous ayons acquis un tel pouvoir sur la nature ? Au vu du progrès scientifique de ces trois derniers siècles, n'est-il pas évident, comme le disait déjà Galilée que "*le grand livre de la nature est écrit en caractères mathématiques*" ? C'est le résultat de ces réflexions que je présente ici, dans l'espoir qu'une discussion s'ensuive qui me permettra de mettre enfin sans regret mon bulletin dans l'urne.

2 Pouvoir c'est prédire

A la base de notre formidable succès, il y a deux capacités qui, combinées, nous ont conféré un pouvoir quasi illimité sur notre environnement. La première est la possibilité d'associer ce qui se ressemble, de ranger des objets perçus comme ayant un caractère commun dans des boîtes fictives, les concepts. Un concept est une image mentale, une abstraction. Ce sont ces abstractions qui permettent à un individu d'agir sur la réalité qui l'entoure. Le concept de "table" correspond à de nombreux objets distincts, plus ou moins larges, plus ou moins décorés. Il est impossible de matérialiser l'image mentale qu'un individu donné a du concept "table". Mais chacun sait quelles qualités lui sont liées. Personne, reconnaissant un objet comme faisant partie du concept "table", n'hésitera à poser une carafe dessus. De manière cruciale, notre capacité à associer des objets vaut aussi pour des situations ou des enchaînements d'actions, permettant ainsi la prévision. Pour rester dans le registre de la gravitation, chacun peut imaginer qu'une carafe placée trop près du bord de la table court un risque. Le même risque qu'un animal approchant d'une falaise. Et cette capacité à associer des situations en images mentales a permis à des chasseurs préhistoriques de tuer d'un coup plusieurs animaux en les amenant à se jeter du haut d'une falaise. Quel prestige pour le premier à réaliser ce plan !

Notre second atout est notre capacité à inventer et utiliser des langages pour combiner et transmettre des concepts. Quand une boîte contenant des objets ou des situations présentant un caractère commun a été constituée, le langage permet de lui associer une étiquette. Ces étiquettes deviennent alors de nouveaux objets que l'on peut mettre à leur tour dans de nouvelles boîtes, qui recevront une étiquette, prête à être combinée avec d'autres. Qu'il s'agisse des langues parlées ou écrites, de la musique, du dessin ou des mathématiques, les langages permettent tous de combiner des concepts pour en former de nouveaux, et de transmettre des concepts à tout individu partageant la même langue. Le premier homme à pousser des chevaux ou des bisons en haut d'une falaise, à Solutré ou ailleurs, a nécessairement expliqué sa découverte à ses enfants. Conte, légende, récit romancé, dessin, sculpture, peu importe le moyen. L'important est que l'astuce ait été transmise, puis combinée avec d'autres pour être améliorée. Qui a imaginé ensuite de faire rouler une pierre d'une autre falaise en la poussant à l'aide d'un levier ?

Si la faculté de regrouper des situations en concepts permet la prévision, les langages la transforment en prédiction. Je pense que c'est la faculté de prédire qui est à la base du pouvoir scientifique. C'est elle qui nous hausse au niveau des dieux dans les mythes fondateurs de nos religions. Loin de l'interprétation sexuelle ultérieure qui en a été donnée, le péché originel d'Adam est d'avoir voulu "*être comme Dieu et capable de distinguer le Bien du Mal*" (III 5), en fait "*être rendu intelligent*" (III 6) (voir "l'Histoire", HS n°5, juin 1999 p. 34). La capacité de prévoir l'avenir, est le "feu sacré", volé par Prométhée. C'est aussi le principal critère de qualité et de validation de toute discipline scientifique. Sans prédiction pas de science, pas de pouvoir technologique.

Les facultés d'abstraction et de transmission ne sont certes pas propres à l'homme. La survie de la plupart des espèces passe par la faculté de reconnaître les situations potentiellement dangereuses, les aliments consommables etc ... Tout animal saura qu'il ne faut pas s'attaquer à un animal beaucoup plus gros que lui, même s'il ne l'a pas déjà vu. De nombreux mammifères savent éduquer leurs jeunes et leur transmettre des compétences. Mais aucun n'a poussé aussi loin que l'homme la faculté de combiner des concepts. Beaucoup d'espèces sont capables de sauter. Seule la puce est capable de sauter 100 fois sa propre hauteur, et cela lui a permis d'assurer la survie de son espèce. Il en est de même je crois pour les capacités humaines. Aucune autre espèce n'est capable d'aller aussi loin que nous dans la prédiction. De même qu'aux échecs le joueur capable d'anticiper plus de coups que son adversaire gagnera la partie, de même notre capacité d'anticipation nous a permis de transmettre nos gènes jusqu'à aujourd'hui, malgré notre faiblesse physique évidente.

3 Le langage mathématique

Dans le processus de création et d'accumulation du savoir par les langages, les mathématiques ne sont apparues que relativement tard. Inventé par les grecs quelque 5 siècles avant notre ère, dans une société où celui qui maîtrisait le discours dominait également la scène politique, le langage mathématique est apparu d'abord comme une manière d'exclure, par une argumentation irréfutable, la contradiction. Préoccupé uniquement de combiner des concepts débarrassés de leur contenu, le mathématicien exerce ses compétences dans la recherche des propriétés des concepts abstraits qu'il formule. Ces propriétés, dites théorèmes ou lois mathématiques, restent évidemment disponibles quand un concept mathématique se trouve relié avec un aspect de la réalité abordé par une autre science. Un modèle mathématique est un concept qui présente un caractère d'analogie avec une réalité. Les conséquences mathématiques de ses propriétés sont évidemment disponibles pour être utilisées comme prédictions à propos de la réalité modélisée. Si ces prédictions s'avèrent vraies après suffisamment d'expériences (la validation du modèle), elles seront résumées en une loi, de portée plus ou moins générale. Le succès du modèle sera alors porté au crédit des mathématiques, de manière à mon avis largement injuste. L'important est la capacité de prédire, pas le langage dans lequel les prédictions sont écrites. Il ne viendrait à personne devant la beauté d'une symphonie, d'en créditer la notation musicale. Si les mathématiques conduisent à des prédictions scientifiques c'est parce qu'elles formalisent et en quelque sorte automatisent des raccourcis de pensée qui pourraient être exprimés autrement.

D'autant que les mathématiques ne montrent leur puissance que dans un certain type de discours. Voici deux affirmations scientifiques en langage courant :

Sur une table, on peut poser une carafe sans qu'elle se renverse.

Sur une pointe d'aiguille, on ne peut pas poser une carafe sans qu'elle se renverse.

Ces deux affirmations ont bien un caractère prédictif. Nous réalisons la première si souvent que nous n'en tirons plus qu'un émerveillement modéré. J'engage le lecteur à vérifier la seconde, ce qui ne manquera pas de hausser mon prestige de scientifique. Pour les besoins de mon propos, j'avais envisagé d'écrire ici en langage mathématique "sur une table, on peut poser une carafe sans qu'elle se renverse". Au bout de trois pages, j'avais terminé de définir rigoureusement tables et carafes comme des parties connexes et compactes de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, et j'allais passer à la définition du fait de se renverser comme l'existence d'un instant $t > t_0$ pour lequel $\phi(C(t))$ (le fond de la carafe à l'instant t) n'était plus strictement inclus dans $\delta(t)$ (le dessus de la table), quand j'ai brutalement décidé d'épargner au lecteur la démonstration du théorème principal et de la réserver à une revue spécialisée, augmentant ainsi ma liste de publications en mathématiques appliquées.

L'ironie est facile. J'ai conscience de la puissance des mathématiques dans l'étude du phénomène de gravitation, et mon émerveillement devant l'élégance des lois de Kepler quand on les déduit de $f = mm'/d^2$ reste entier. La prédiction à la seconde près de l'éclipse du 11 août 1999 est apparue à chacun, à juste titre, comme un succès de plus des calculs mathématiques en astronomie. Le langage mathématique est bien le plus puissant pour l'appréhension de certaines réalités. Il fonctionne d'autant mieux qu'il intervient après que la réalité modélisée a déjà été en quelque sorte distillée par d'autres langages, pour en extraire les concepts les plus épurés. Mais ce n'est qu'un des langages sur lequel nous fondons notre pouvoir. De même qu'aucune des quelques milliers de langues vernaculaires apparues sur terre n'a de statut supra-humain, de même le langage mathématique n'existe pas hors de nos cerveaux. Prétendre le contraire me semble relever d'une attitude religieuse, comme diviniser l'hébreu, l'araméen ou le latin. La réalité de l'eau ne prouve évidemment pas que le mot "eau", pas plus que les mots "water", "agua", etc ... aient une réalité indépendante de l'homme. Grâce au langage scientifique, nous avons appris que combiner de l'oxygène et de l'hydrogène produit de l'eau. C'est une réalité, qui ne donne aucune valeur supra-humaine à la formule "H_20".

Nombreux sont les mathématiciens qui pensent que des êtres doués d'intelligence sur une autre planète, si on leur donnait quelques axiomes des mathématiques, reconstruiraient nécessairement l'ensemble de l'édifice, découvrant les mêmes définitions et les mêmes théorèmes. Je ne le crois pas. Il existe peut-être ailleurs dans l'univers des êtres doués de nos facultés d'abstraction et de transmission. Ils ont peut-être acquis sur leur environnement un pouvoir supérieur au nôtre. Mais ils ont très probablement utilisé pour cela d'autres supports, d'autres langages. Peut-être sont-ils capables comme nous de quitter leur planète, donc de prévoir des trajectoires dans l'espace, mais rien ne dit qu'ils utilisent des équations différentielles pour calculer ces trajectoires.

4 Est prédictible ce qui est ordonné

Dire que nous avons un pouvoir dans la mesure où nous savons prédire semble ne faire que déplacer le problème épistémologique : peut-être les mathématiques ne sont-elles qu'un des multiples moyens d'accéder à ce pouvoir de prédiction, mais qu'est-ce qui fait que la prédiction est possible ?

C'est probablement l'existence de l'ordre. Dans un accès d'auto-référence du discours pour lequel je demande l'indulgence du lecteur, j'aurai recours ici à une métaphore tirée du langage mathématique pour illustrer l'idée, maintenant universellement acceptée, de l'identité entre prédictibilité, contenu d'information, et ordre.

Un des problèmes des mathématiques est de définir rigoureusement la notion de hasard. Qu'est-ce qui distingue une suite de tirages de pile ou face d'une autre suite binaire ? Une des réponses les plus convaincantes est celle apportée par Kolmogorov. La définition la plus intuitive du hasard, celle des dictionnaires, associe "aléatoire" à "imprévisible". Une suite de 0 et de 1 (ou de Pile et Face) serait donc aléatoire si on ne pouvait pas prévoir son $n+1$-ème terme connaissant les n premiers. La suite

0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1

n'est pas aléatoire car sans avoir écrit les 999 premiers termes, on peut prévoir que le 1000-ème sera 1 et le suivant 0. En d'autres termes, elle contient une certaine régularité, un certain ordre. La suite

0 1 1 0 1 0 1 1 1 0 0 1 0 1,

en revanche ne semble pas présenter de régularité, de configuration qui permettrait d'en prévoir les termes suivants. Une suite est donc aléatoire si elle n'a pas de règle de construction simple. On peut voir une règle de construction comme un moyen de compresser une suite en un algorithme qui l'engendre. Par exemple :

Répéter 500 fois
Ecrire 0 puis 1
Fin.

Il y a bien compression dans la mesure où l'algorithme requiert beaucoup moins de place que la chaîne qu'il engendre. A la notion de prédiction est donc associée la notion de compression, de résumé. Un langage (dont le rôle est ici joué par l'algorithme) permet de compresser une information ou de prédire des résultats futurs sans passer par toute la chaîne d'événements qui y conduisent. La complexité d'une suite de bits est la quantité minimale d'information qu'il faut donner à un algorithme pour produire la suite. Pour Kolmogorov une suite aléatoire est une suite qu'il est impossible de compresser, c'est-à-dire pour laquelle le meilleur algorithme qui engendre ses n premiers termes consiste à les écrire un par un. Une suite aléatoire est une suite de complexité maximale, ou d'entropie maximale. Les concepts de complexité et d'entropie, au sens mathématique, sont liés au concept d'information. Plus une suite est complexe, plus son entropie est élevée, moins elle contient d'information, moins elle est prédictible. Inversement, une suite sera d'autant plus prédictible qu'il existera un algorithme court pour l'engendrer.

Dire que le résultat d'une expérience est prédictible, c'est dire qu'on peut compresser la chaîne d'événements qu'elle implique, donc qu'il existe un langage qui conduit à cette compression. En général l'algorithme optimal de compression d'une suite n'est pas unique. De même il n'y a pas qu'un seul langage pour une prédiction scientifique. Le monde est partiellement prédictible dans la mesure où les langages y ont un pouvoir de concentration de l'information. Ce n'est possible que parce qu'il contient effectivement de l'information, c'est-à-dire que sa complexité (au sens de Kolmogorov) est faible, donc qu'il contient de l'ordre.

Entropie et information sont les deux faces opposées d'un même concept. Diminuer l'entropie d'un système, c'est augmenter l'information qu'il contient. La thermodynamique nous enseigne que l'entropie augmente. Mais cette augmentation générale s'accompagne de diminutions locales, correspondant à autant d'étapes de structuration de l'univers. Dans un univers désordonné, celui des premiers millionièmes de seconde après le big-bang, peu de prédiction possible, presque tous les futurs étaient en germe. A partir du moment où l'entropie a suffisamment diminué localement pour que des nuages de poussières se distinguent du vide, puis pour qu'émergent galaxies, planètes et finalement êtres vivants, l'information a augmenté, et le monde est devenu, au moins partiellement, intelligible.

Dire que le monde est intelligible parce qu'il est ordonné est une tautologie. La question est donc de savoir pourquoi le monde est ordonné. N'étant pas croyant, j'ignore qui a fait émerger l'ordre du chaos. Mais je suis sûr d'une chose : si le monde était resté chaotique, s'il n'était pas prédictible, je ne serais pas là pour me poser la question.

5 Conclusion

Le grand livre de la nature n'est pas écrit en caractères mathématiques, mais il est lisible. Le pouvoir que nous avons acquis sur la nature n'est pas une preuve de la réalité supra-humaine des mathématiques, ni même des lois scientifiques. La nature est domptable parce qu'elle est (partiellement) prédictible. Elle est prédictible parce qu'elle est intelligible, c'est-à-dire qu'elle contient de l'information. Les mathématiques sont un des moyens de transformer cette information en prédictions, moyen d'autant plus puissant qu'il n'intervient qu'après que d'autres schémas de pensée, d'autres langages ont déjà pré-traité l'information. Dire que la nature contient de l'information équivaut à dire qu'elle contient de l'ordre. L'ordre a commencé à émerger du chaos il y a 15 milliards d'années. Peut-être Dieu est-il responsable de cette émergence, peut-être pas. Mais seul un monde ordonné, donc intelligible, pouvait engendrer des êtres capables de le comprendre.