Mathématiques et perplexité

Trans-Disciplines n°2, Avril-Mai 1992

1 Introduction

On peut schématiser le discours habituel sur les mathématiques en deux tendances. La première, idéaliste et dominante, voit dans les objets mathématiques des réalités suprahumaines que l'homme découvre peu à peu. L'essence quasi divine de ces objets induit une supériorité intrinsèque de la discipline par rapport aux autres domaines de pensée, et justifie le rôle fondamental des mathématiques dans la société. Pour la seconde tendance au contraire, les mathématiques ne sont, à l'égal de toute autre activité intellectuelle, qu'une production de l'esprit humain. Leur apparente domination n'est que circonstancielle et liée au développement technologique de la société occidentale. Ce vieux débat entre idéalistes et matérialistes est illustré en particulier par le livre récent de J.P. Changeux et A. Connes. Les principaux arguments sont également détaillés dans les livres de P.J. Davis et R. Hersh.

Cet article n'a pas la prétention de trancher, ni même de renouveler ce débat. Il n'a pour but que d'exposer la perplexité de son auteur qui, on le constatera au manque d'objectivité avec lequel il présente les différents arguments, pencherait plutôt pour la deuxième tendance, sans pour autant être capable de réfuter tous les arguments de la première.

2 Nature des mathématiques

Est-ce une découverte ou une invention ?

2.1 Découverte

Les mathématiques sont une sorte de jeu de construction qui à partir de "briques" (les axiomes) et de règles du jeu, échafaude des théories, totalement indépendantes de leurs auteurs. De nombreux mathématiciens pensent que si les briques et la règle du jeu étaient présentées à des habitants d'une autre galaxie, ceux-ci reconstruiraient les mathématiques telles qu'elles existent en découvrant les mêmes théorèmes. Ceux-ci correspondent donc bien à des réalités suprahumaines. C'est d'ailleurs l'expérience que chaque chercheur a du processus de création qui lui fait considérer sa production comme une découverte. Ce processus, décrit par de nombreux mathématiciens de H. Poincaré à A. Connes en des termes pratiquement identiques, peut se décomposer en trois phases. Au cours de la phase d'apprentissage, on emmagasine des connaissances qui ne sont pas encore reliées entre elles. Suit une période d'incubation pendant laquelle les idées "tournent", mûrissent et se renforcent en permanence, souvent même en dehors des périodes de réflexion consciente. Survient enfin l'étincelle, l'illumination brusque et extrêmement jouissive : on se trouve soudain devant la Vérité Révélée. Le résultat est là, aveuglant de beauté et de nécessité. L'heureux chercheur sait qu'il a dévoilé, découvert, une partie de la Connaissance. Son théorème, qu'il va s'empresser de communiquer à ses collègues jaloux, leur apparaîtra également vrai, aussi éloignés de lui fussent-ils par la langue et la culture. Mais auparavant il devra affronter la dure épreuve du comité de lecture : un spécialiste choisi par la revue à laquelle il aura soumis son travail devra déterminer s'il est correct bien sûr, mais aussi s'il est original. "Son" théorème peut très bien avoir été déjà découvert par quelqu'un d'autre. Cela arrive fréquemment et des exemples célèbres jalonnent l'histoire des mathématiques (en géométrie hyperbolique avec Lobatchevsky, Bolyaï et Gauss, pour les intégrales de fonctions algébriques avec Galois et Riemann). Si les résultats mathématiques n'étaient que pure invention de leurs auteurs, comment pourraient-ils apparaître comme vrais à d'autres, comment serait-il possible qu'ils surgissent indépendamment chez plusieurs mathématiciens ? Un théorème a bien une réalité intrinsèque, et de plus éternelle. Des théories peuvent passer de mode, disparaître des manuels d'enseignement, elles n'en restent pas moins justes.

Voici un exemple classique. Aussitôt définie la notion de longueur, s'impose celle de polygone régulier (triangle équilatéral, carré, pentagone régulier, etc...). Il est alors naturel, en passant à la dimension supérieure, de chercher des polyèdres réguliers (volumes dont toutes les faces sont des polygones réguliers identiques). Or il n'en existe que cinq : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre. Ils sont connus depuis l'antiquité (on a découvert des dés dodécaédriques chez les babyloniens), ils sont présents dans la nature (cubes de pyrite, formes icosaédriques de certains virus) et chacun peut en construire avec du carton et de la colle. On sait de plus démontrer qu'il n'en existe que cinq. N'ont-ils pas une réalité intrinsèque ?

2.2 Invention

A la base des mathématiques, comme de toute activité intellectuelle se trouvent les concepts. Concept en mathématiques se dit classe d'équivalence : cela désigne une sorte de boîte fictive dans laquelle nous pouvons ranger toutes sortes d'objets, pourvu qu'ils aient une propriété commune. Une fois la boîte remplie, et dûment pourvue d'une étiquette nommant la propriété qu'elle représente, on peut oublier son contenu et ne plus garder que l'étiquette qui pourra d'ailleurs devenir un nouvel objet. Cette faculté d'abstraire des propriétés communes est essentiellement humaine. C'est l'arme qui nous a permis de prendre une telle avance dans la lutte darwinienne pour la survie de l'espèce. C'est sans doute parce que l'homme préhistorique voyait un rapport entre un bras qui frappe et une branche qui tombe qu'il a été capable d'inventer la massue. C'est aussi la base du langage. Tout mot est une classe d'équivalence : "bleu" ou "table" ne sont que des boîtes pouvant contenir des objets différents. Le miracle est que ces classes d'équivalence soient transmissibles : que deux humains différents puissent être globalement d'accord sur les contenus de leurs boîtes. Revenons alors aux mathématiques. Leur activité de base consiste à combiner entre elles des classes d'équivalence, vidées de leurs contenus, pour en former de nouvelles. Les nombres sont des classes formées d'ensembles d'objets que l'on peut mettre en correspondance élément par élément : deux est la classe d'équivalence de toutes les paires. On peut ajouter, multiplier des nombres, et se dégage bientôt la notion d'opération qui est elle-même une classe d'équivalence. Des propriétés communes d'ensembles munis de certaines opérations provient la notion de groupe. Certains ensembles pouvant être munis de deux opérations forment la classe des anneaux, certains anneaux particuliers sont des corps, ou des algèbres, etc... Comme ces combinaisons se font en oubliant tout contenu concret des classes considérées, il ne s'agit que de pousser le plus loin possible la logique interne de cette faculté humaine consistant à morceler la complexité de la nature pour mieux la dominer. Et le fait même de ne pas prendre en compte la diversité de perception de chaque individu garantit une plus grande transmissibilité. Davis et Hersh traduisent ceci en définissant les mathématiques comme "*l'étude des propriétés reproductibles du cerveau humain*".

Reproductibles ? Voire. On peut évaluer la population humaine depuis ses débuts à quelques milliards. Disons vingt pour donner un ordre de grandeur. Le nombre de personnes qui se soient jamais livrées à une activité de recherche en mathématiques est certainement bien inférieur à un million. Force est de constater que la reproductibilité des mathématiques est relativement restreinte. Même les notions les plus élémentaires de numération sont loin de faire l'unanimité. Il existe encore des tribus qui n'ont de mot dans leur langage que pour "un", "deux" et "beaucoup". La difficulté avec laquelle s'est propagée la numération de position dans l'Europe du moyen-âge montre bien que même une invention aussi fondamentale que celle du zéro n'est pas directement accessible à tous (cf. G. Ifrah). La solution de facilité consiste à déclarer à priori que ceux qui comprennent les mathématiques sont intellectuellement supérieurs et à ignorer les autres. Cela peut être utile comme argument de pouvoir, nous y reviendrons. Une expérience scientifique simple peut permettre de trancher. Lâchons dans la jungle, vêtus d'un arc et de flèches, un membre d'une des tribus citées plus haut, et un mathématicien professionnel. Qui sera le plus performant ?...

Même la facilité avec laquelle les mathématiciens communiquent entre eux n'est qu'apparente. En dehors du cercle (restreint à quelques centaines de personnes) des spécialistes d'un domaine donné, il est rare de se comprendre sans un long apprentissage. Lire à fond l'article d'un collègue dans sa propre spécialité demande la plupart du temps des heures d'efforts. Quant à lire des textes vieux de plus d'un siècle, c'est quasiment réservé à quelques spécialistes.

Car de plus les mathématiques, comme les autres sciences, ont évolué dans leur langage et leur objet. A. Lichnérowicz remarque : "*Il n'est peut-être pas indifférent de constater que Boltzmann, père de la mécanique statistique qui dissout l'objet en ses constituants, et l'impressionisme sont rigoureusement contemporains... Il y a comme une traduction de l'air du temps, quelque chose de commun aux esprits humains à un certain moment.*" Il aurait pu ajouter qu'au moment où les impressionistes et Boltzmann décomposaient le tout en constituants élémentaires, l'invention du cinéma découpait le mouvement en successions d'images fixes, Planck proposait la théorie des quantas... et les mathématiciens n'échappaient pas à l'air du temps avec la définition de l'intégrale par Riemann puis Lebesgue, les travaux sur les nombres de Dedekind et Cantor.

Ce n'est décidément pas du côté des mathématiques qu'il faut chercher le Langage Universel. A. Gheerbrant rapporte qu'après avoir fait écouter une symphonie de Mozart à une tribu d'indiens Maquiritares, le chef lui a déclaré : "*Puisque vous avez vous aussi une musique sacrée, je vais te révéler nos secrets*". Et Gheerbrant de conclure : "*...je ne pourrai jamais oublier que nous devons à une symphonie de Mozart les rares moments où se combla presque totalement le fossé que les siècles et notre évolution ont creusé entre nous.*" Il y a fort à parier que le théorème de X. sur la convergence des super-processus de branchements renormalisés n'aurait pas eu le même succès.

Reste tout de même à comprendre pourquoi tous les mathématiciens éprouvent la même sensation de découverte d'une vérité universelle. La théorie de Changeux sur les résonances de trains d'ondes, véhiculés par les neurones et échangés au niveau des synapses, est certainement un élément important de réponse. Elle ne suffit pas encore à expliquer pourquoi il n'existe que cinq polyèdres réguliers.

3 Place des mathématiques dans la pensée humaine

Est-elle dominante ou marginale ?

3.1 Dominante

Il est inutile de refaire ici l'historique des arguments de ceux qui, de Pythagore à Comte en passant par Descartes et Kant ont placé les mathématiques au sommet de leur échelle des valeurs intellectuelles. Cette supériorité des mathématiques tient à leurs objets, à leur méthode et à l'universalité de leurs applications.

La conséquence logique de l'universalité des objets mathématiques est que leur essence est nécessairement de nature divine. C'est le langage de la Vérité Révélée depuis Pythagore jusqu'aux adeptes actuels de la numérologie. Les mathématiques étant uniquement préoccupées de cette Vérité sont nécessairement supérieures à toute autre activité intellectuelle.

Dans une de ses nouvelles, Conan Doyle fait dire à Sherlock Holmes que son idéal d'enquête policière n'est autre qu'une démonstration mathématique. La méthode mathématique est, elle aussi, supérieure. Elle constitue l'idéal de rigueur vers lequel tout raisonnement doit tendre. Reprenons la célèbre phrase de Descartes : "*Ces longues chaînes de raisons , toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations, m'avaient donné occasion de m'imaginer que toutes les choses qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes, s'entre-suivent en même façon.*" Tout raisonnement, pour être valable, doit donc être exprimé sous forme hypothético-déductive.

Toutes les autres sciences utilisent des mathématiques. En retour, s'il est vrai que la physique, la chimie ou la biologie ont donné matière à des avancées mathématiques importantes, il n'y a pas d'exemple de théorème démontré par un raisonnement de physique. Une telle démonstration ne serait d'ailleurs pas considérée comme valable. Par ailleurs les "lois mathématiques" découvertes par les autres sciences sont bien l'expression d'une vérité profonde. "*Le grand livre du monde est écrit en caractères mathématiques*" (Galilée). Comment sans cela aurions-nous acquis un tel pouvoir sur la nature ? Sans "$E = mC^2$" , pas de centrales nucléaires ni de bombes atomiques. Il serait exagéré de prétendre que tous les théorèmes mathématiques sont des vérités naturelles immédiatement applicables. Mais ils serviront certainement un jour. Un mathématicien du siècle dernier s'était flatté de travailler sur les carrés latins qui, selon lui, n'auraient jamais aucune utilité. Ils sont de nos jours couramment employés de façon très concrète pour construire des plans d'expériences et sont enseignés dans les cours de statistique.

3.2 Marginale

Parlons tout d'abord de la soi-disant supériorité de la méthode hypothético-déductive. S'il est vrai que c'est traditionnellement ainsi que les mathématiciens présentent leurs résultats, ce n'est jamais ainsi qu'ils les produisent. La succession hypothèses → théorème → démonstration n'est en fait que la mise en forme d'une réflexion qui qui est essentiellement analogique et intuitive. G. Choquet dit "*... le chercheur n'a pour se guider vers la découverte puis la preuve d'énoncés intéressants, que l'étroit faisceau de lumière de son savoir et c'est son intuition qui lui fait choisir tels chemins plutôt que d'autres. Le bon usage qu'il fait de son savoir et de son intuition ressemble étonnamment à l'art du peintre : sa découverte est le fruit d'une tenace invention.*" En mathématiques pas plus qu'ailleurs le syllogisme n'est fertile. Il n'est qu'une forme de présentation de la pensée, inventée à l'origine par les mathématiciens grecs qui (A. Lichnérowicz "*... ont conçu un certain type de discours, sans quiproquo ni malentendu dont ils attendaient que sa forme même interdise le refus de son contenu.*"

Il s'agit bien en fait de remplacer l'alternative "d'accord - pas d'accord", si gênante dans la discussion, par "comprend – est un imbécile", nettement plus utile comme instrument de pouvoir. Le succès de la méthode a conduit à une hégémonie parfois néfaste dans l'enseignement. Il est souvent plus facile d'expliquer un concept par analogie que par déduction. C'est bien par analogie que les jeunes enfants apprennent les mots, les couleurs, etc... On définit mieux une classe d'équivalence en donnant quelques éléments de son contenu plutôt qu'en la situant par rapport à d'autres. La plupart des professeurs de mathématiques le savent bien : une définition n'est bien comprise que si elle est accompagnée d'exemples. Ils gardent d'ailleurs un souvenir cuisant des manuels des années 70 où la définition d'une droite prenait une demi-page !

Passons maintenant à la place à donner aux mathématiques par rapport aux autres activités intellectuelles. La figure 1 ci-après n'a évidemment pas la prétention d'être une représentation fidèle. Elle nous servira seulement à illustrer quelques idées simples.

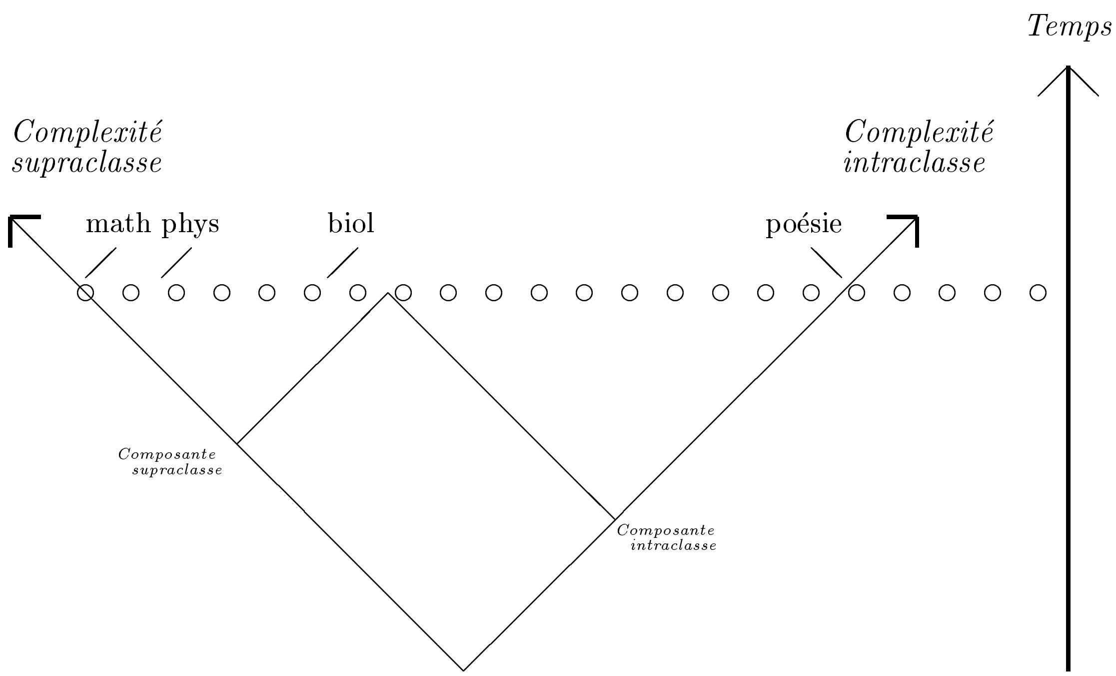

Figure 1: Les deux types de complexité

Dans la manipulation des concepts, on peut distinguer deux types d'activités différentes. L'une consiste à combiner entre elles des classes d'équivalence, vidées de leur contenu, pour en former de nouvelles. L'autre consiste à explorer la richesse des concepts, la diversité du contenu des boîtes. Le premier type est, nous l'avons vu, l'activité essentielle du mathématicien. Le poète qui écrit un sonnet explore au contraire la complexité d'une classe. Les deux types sont représentés sur le schéma par deux axes orthogonaux, dénommés “supraclasse” et “intraclasse”. Admettons maintenant que la complexité de la pensée humaine augmente avec le temps et se situe à un instant donné à peu près au même niveau quelle que soit la discipline (les mathématiciens ne sont ni plus ni moins malins que les poètes !). Dans toute recherche, à part justement en mathématiques, qui sont marginales en ce sens, les deux types de complexité sont présents en proportions variables. La physique théorique est proche des mathématiques quand elle écrit des équations, mais est néanmoins obligée de considérer la diversité des particules auxquelles ces équations s'appliquent. En biologie, on bâtit des modèles mathématiques de comportement, valables pour de larges classes d'êtres vivants, mais il faut aussi étudier chaque espèce pour en dégager les caractéristiques. Pour schématiser, on pourrait dire que la modélisation relève de la complexité supraclasse, la description de la complexité intraclasse. Quand dans une discipline donnée un modèle a été exprimé sous forme d'équation quantitative, commence l'application des mathématiques (résolution de l'équation). Il ne faut pas s'étonner que, les mathématiques ne s'étant jamais préoccupées d'autre chose que de complexité supraclasse, on y trouve souvent les techniques nécessaires au traitement du modèle. Elles agissent en fait comme une boîte à outils, un réservoir de “raccourcis de pensée”. Mais elles tendent souvent à voler la vedette à la discipline d'où provient le modèle, l'équation devenant alors la seule réalité importante. Or quand on écrit qu'une calorie vaut $4,18$ joules, l'important n'est bien sûr pas la valeur $4,18$. C'est d'avoir reconnu que les deux concepts de chaleur et de travail pouvaient être englobés dans une nouvelle classe d'équivalence, l'énergie. Plus tard, Einstein a montré que l'énergie et la masse pouvaient aussi être regroupées en un nouveau concept, ce qui est beaucoup plus fondamental que l'expression mathématique “$E = mC^2$”.

De tous les outils produits par les mathématiques, certains l'ont été “à la demande”, d'autres n'ont pas d'application. Sur les quelque 400 000 théorèmes qui seront publiés cette année, il est à craindre qu'une bonne partie ne soit simplement destinée à l'oubli. Avouons-le tout net, la plupart des mathématiciens s'en moquent éperdument. La discipline a sa propre logique de développement interne et les applications ne sont qu'une motivation secondaire.

4 Rôle des mathématiques dans la société

Est-il fondamental ou accessoire ?

4.1 Fondamental

C'est une banalité de constater que les nombres sont devenus un des rouages essentiels de notre société, surtout depuis l'ère de l'ordinateur. Tout au long de notre vie nous sommes entourés d'un cocon de chiffres (numéros INSEE, codes bancaires, résultats d'analyses médicales, sondages...), qui est perçu à la fois comme rassurant et menaçant. Rassurant car il nous relie à l'ensemble du corps social, sert à coder nos revenus et notre protection, mais menaçant car on ne maîtrise pas son utilisation (d'où la création à effet psychologique de la commission Informatique et Libertés). Au moins depuis la révolution industrielle, il est devenu impossible de gérer la société sans la quantifier, et c'était bien le sens de l'apparition, en Angleterre au 18ème siècle, de la statistique (science du gouvernement des états, étymologiquement).

Les modèles mathématiques ont envahi tous les domaines de la recherche et c'est bien grâce à eux que nous avons acquis un tel pouvoir sur la nature. Sans modèles mathématiques, pas de centrales nucléaires, ni d'avions, ni de scanners, ni de laser. C'est d'ailleurs bien à ceux qui sont capables de maîtriser ces modèles, les technocrates, que l'on confie le pouvoir. Ils sont sélectionnés tout au long de leur scolarité sur des épreuves de mathématiques. Il faut être bon en maths pour devenir ingénieur ou gestionnaire. Les programmes des concours d'entrée aux grandes écoles scientifiques, y compris celles qui préparent des agronomes ou des ingénieurs commerciaux, sont en grande partie basés sur des mathématiques. C'est d'ailleurs un facteur de justice sociale. Il vaut mieux être jugé sur les mathématiques que sur la naissance, l'élégance de ses révérences ou des lettres de recommandation !

4.2 Accessoire

Suivant Davis et Hersh, on peut distinguer trois niveaux d'intervention des mathématiques dans le langage. Le quantitatif (utilisation des nombres), la modélisation (équations) et la rhétorique (formalisme).

Le succès du quantitatif peut tenir à deux causes. La première est évidente : les nombres permettent de résumer et stocker d'immenses quantités d'informations qui ne seraient pas maîtrisables sans cela. Mais il y en a une seconde. Le seul type d'ensemble qui soit totalement ordonnable est justement celui des nombres. Dès que l'on doit prendre en compte plus d'un paramètre, il devient impossible d'établir une hiérarchie indiscutable. Le seul moyen de classer des individus sans qu'ils protestent est donc de les réduire à un seul nombre (la moyenne de leurs résultats sur un concours par exemple). Les nombres sont donc des instruments de pouvoir à un double titre, parce qu'ils permettent la maîtrise de l'information, et parce qu'ils fondent les hiérarchies. Il est pourtant essentiel de ne pas oublier qu'ils ne sont que des réductions unidimensionnelles d'une complexité qui est celle de la vie. Les mensurations de Miss Monde sont-elle vraiment indispensables pour apprécier sa beauté ?

En ce qui concerne la modélisation, il serait vain de chercher à minimiser son succès. C'est en partie ce succès qui a fait des mathématiques un instrument de pouvoir. Sans mathématiques, pas de pacemaker. Certes, mais pourquoi oublie-t-on les électroniciens et les cardiologues ? A propos de son modèle de neurones, Changeux explique : "*Je savais par expérience qu'un tel mécanisme ne pouvait avoir un impact dans le monde scientifique que s'il était exprimé en termes mathématiques.*" N'est-ce pas là affirmer crûment que la mathématisation d'un modèle peut n'être que la condition de son succès médiatique ? Shatzman dit : "*A mon sens, si la croyance en la vérité scientifique dans* *le domaine de l'activité humaine est une conviction qui s'est largement répandue, c'est aussi un instrument de pouvoir consistant à affirmer : il faut faire cela parce que la science l'a dit.*" Nous rejoignons là l'irréfutabilité de la méthode hypothético-déductive. Les vérités indiscutables (des religions révélées au petit livre rouge) ont de tout temps servi comme instrument de pouvoir ou d'oppression. Comme moyen de production de telles vérités, les mathématiques sont en passe de détrôner les bulles du pape !

Voici, pour illustrer le niveau rhétorique, une formule de Lacan reliant le subconscient et l'inconscient.

$$\frac{S'}{S} \times \frac{S}{s} \longrightarrow S'\frac{(I)}{s}$$

Il ne fait aucun doute que se cache derrière cette formule un discours parfaitement valable, rigoureux et argumenté. Malheureusement la formule en elle-même ne peut rien ajouter à ce discours (aucune unité n'est définie pour les quantités S, S', s et I, le symbole $\times$ et le signe de fraction sont détournés de leur signification mathématique). La pensée n'est donc présentée ici sous forme mathématique que pour mystifier le lecteur, et imposer son adhésion.

La sélection par les mathématiques est justifiée au nom du "bagage scientifique" que devrait posséder tout ingénieur ou tout économiste. Encore faudrait-il leur fournir effectivement ce bagage. Or pour prendre un exemple, la majorité des étudiants de classes préparatoires n'utiliseront jamais dans leur carrière quoi que ce soit qui leur y ait été enseigné. On peut être un bon gestionnaire sans rien savoir en maths. Par contre, dans la mesure où l'accès à HEC ouvre la voie à de hautes responsabilités (et à des salaires confortables) bref, au pouvoir, il est essentiel pour la stabilité sociale que cet accès se fasse sur des critères de sélection indiscutables. On pourrait à mon avis remplacer les mathématiques par la géographie ou le chinois ancien sans changer de beaucoup la transmission du pouvoir (reproduction des élites) dans notre société. Il n'y a pas de "bosse des maths", mais il existe bien une plus ou moins grande adaptation à un système scolaire de sélection, que celle-ci passe par des problèmes de maths ou des thèmes latins. Par contre, un zéro en maths est beaucoup moins contestable par l'élève (et sa famille) qu'un même zéro en géographie. La sélection par les mathématiques concourt donc elle aussi à la stabilité sociale.

Les mathématiques jouent dans notre société le rôle d'un accessoire du pouvoir. Et les mathématiciens ? Sont-ils les grands prêtres du Dieu Ordinateur ? Pas du tout. Reconnaissons tout d'abord qu'ils ne sont pour rien dans l'abus des nombres : ils le subissent comme tous, le dénoncent volontiers, et contrairement à la croyance populaire, ils ont besoin d'une calculette pour leurs opérations. Sauf quelques exceptions prestigieuses, ils n'ont pas de responsabilités sociales particulières, et leurs revenus sont moyens. Ils n'apprécient guère en général le rôle de vecteurs de sélection qu'on leur fait jouer en tant qu'enseignants. Pourquoi donc font-ils des mathématiques ? Changeux explique que le centre du plaisir dans le cerveau est proche des centres du raisonnement. La fonction d'évaluation ultime, celle qui en dernier ressort guide les connections entre synapses et les choix de la pensée, est peut-être le plaisir. Ceci correspondrait au rôle du jeu comme moyen d'apprentissage. Je crois bien que c'est pour m'amuser que je fais des mathématiques... ou que j'écris à leur propos.

5 Références

J.P. Changeux, A. Connes : *Matière à Pensée*. Ed. O. Jacob (1989)

P.J. Davis, R. Hersh : *L'Univers Mathématique*. Ed. Gauthier Villars (1985).

P.J. Davis, R. Hersh : *L'Empire Mathématique*. Ed. Gauthier Villars (1988).

A. Gheerbrant : *L'expédition Orénoque Amazone*. Ed. Gallimard (1980).

G. Ifrah : *Histoire Universelle des Chiffres*. Ed. Seghers (1981).

Les citations de J.P. Changeux, G. Choquet, A. Lichnérowicz et E. Schatzman sont extraites de :

M. Schmidt : *Hommes de Science*. Ed. Hermann (1990).