MÉMOIRE SUR L'ÉLIMINATION*.

Par M. VANDERMONDE.

LE terme de toutes les Recherches générales sur l'Élimination des inconnues dans les équations algébriques, ou sur l'art de ramener les équations qui renferment plusieurs inconnues, à des équations qui n'en renferment qu'une, seroit d'obtenir une formule d'élimination générale & unique, sous la forme la plus concise & la plus commode, & où le nombre d'équations & leurs degrés fussent désignés par des lettres indéterminées. Nous sommes sans doute très-éloignés de ce terme, mais on peut entrevoir quelque possibilité de l'atteindre. C'est ce que je me propose de faire sentir dans ce Mémoire. Je donnerai pour un nombre *n* d'équations du premier degré, une formule d'élimination qui est une espèce de fonction de *n*, & dont la forme est très-concise & très-commode; & je ferai voir que les formules connues d'élimination entre deux équations de degrés élevés, paroissent propres à recevoir une forme systématique, & à devenir une espèce de fonction de leur degré commun. J'ai été bientôt arrêté dans cette recherche, & il sera facile d'en sentir la raison. Parmi les ressources qui nous manquent pour faire des progrès en ce genre, la plus indispensable seroit, sans doute, de réunir un nombre suffisant de coopérateurs.

* Ce Mémoire a été lû pour la première fois à l'Académie le 12 Janvier 1771. Il contenoit différentes choses que j'ai supprimées ici, parce qu'elles ont été publiées depuis par d'autres Géomètres.

ARTICLE I.er

Des Équations du premier degré.

Je suppose que l'on représente par $\overset{1}{1}, \overset{2}{1}, \overset{3}{1}$, &c. $\overset{1}{2}, \overset{2}{2}, \overset{3}{2}$, &c. $\overset{1}{3}, \overset{2}{3}, \overset{3}{3}$, &c. &c. autant de différentes quantités générales, dont l'une quelconque soit $\overset{\alpha}{a}$, une autre quelconque soit $\overset{\beta}{b}$, &c. & que le produit des deux soit désigné à l'ordinaire par $\overset{\alpha}{a} . \overset{\beta}{b}$.

Des deux nombres ordinaux α & a, le premier, par exemple, désignera de quelle équation est pris le coëfficient $\overset{\alpha}{a}$; & le second désignera le rang que tient ce coëfficient dans l'équation, comme on le verra ci-après.

Je suppose encore le système suivant d'abréviations, & que l'on fasse

$$\begin{array}{c|c}\alpha&\beta\\\hline a&b\end{array} = \overset{\alpha}{a}.\overset{\beta}{b} - \overset{\alpha}{b}.\overset{\beta}{a}$$

$$\begin{array}{c|c|c}\alpha&\beta&\gamma\\\hline a&b&c\end{array} = \overset{\alpha}{a}.\begin{array}{c|c}\beta&\gamma\\\hline b&c\end{array} + \overset{\alpha}{b}.\begin{array}{c|c}\beta&\gamma\\\hline c&a\end{array} + \overset{\alpha}{c}.\begin{array}{c|c}\beta&\gamma\\\hline a&b\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c}\alpha&\beta&\gamma&\delta\\\hline a&b&c&d\end{array} = \overset{\alpha}{a}.\begin{array}{c|c|c}\beta&\gamma&\delta\\\hline b&c&d\end{array} - \overset{\alpha}{b}.\begin{array}{c|c|c}\beta&\gamma&\delta\\\hline c&d&a\end{array} + \overset{\alpha}{c}.\begin{array}{c|c|c}\beta&\gamma&\delta\\\hline d&a&b\end{array} - \overset{\alpha}{d}.\begin{array}{c|c|c}\beta&\gamma&\delta\\\hline a&b&c\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}\alpha&\beta&\gamma&\delta&\varepsilon\\\hline a&b&c&d&e\end{array} = \overset{\alpha}{a}.\begin{array}{c|c|c|c}\beta&\gamma&\delta&\varepsilon\\\hline b&c&d&e\end{array} + \overset{\alpha}{b}.\begin{array}{c|c|c|c}\beta&\gamma&\delta&\varepsilon\\\hline c&d&e&a\end{array} + \overset{\alpha}{c}.\begin{array}{c|c|c|c}\beta&\gamma&\delta&\varepsilon\\\hline d&e&a&b\end{array}$$
$$+ \overset{\alpha}{d}.\begin{array}{c|c|c|c}\beta&\gamma&\delta&\varepsilon\\\hline e&a&b&c\end{array} + \overset{\alpha}{e}.\begin{array}{c|c|c|c}\beta&\gamma&\delta&\varepsilon\\\hline a&b&c&d\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}\alpha&\beta&\gamma&\delta&\varepsilon&\zeta\\\hline a&b&c&d&e&f\end{array} = \overset{\alpha}{a}.\begin{array}{c|c|c|c|c}\beta&\gamma&\delta&\varepsilon&\zeta\\\hline b&c&d&e&f\end{array} - \overset{\alpha}{b}.\begin{array}{c|c|c|c|c}\beta&\gamma&\delta&\varepsilon&\zeta\\\hline c&d&e&f&a\end{array} + \text{\&c.}$$

Le ſymbole $-\Big|-\Big|-\Big|-$ ſert ici de caractériſtique.

Les ſeules choſes à obſerver ſont l'ordre des ſignes, & la loi des permutations entre les lettres a, b, c, d, &c. qui me paroiſſent ſuffiſamment indiqués ci-deſſus.

Au lieu de tranſpoſer les lettres a, b, c, d, &c. on pouvoit les laiſſer dans l'ordre alphabétique, & tranſpoſer au contraire les lettres α, β, γ, δ, &c. les réſultats auroient été parfaitement les mêmes; ce qui a lieu auſſi par rapport aux concluſions ſuivantes.

Prémièrement, il eſt clair que $\frac{\alpha}{\mathrm{a}}\Big|\frac{\beta}{\mathrm{b}}$ repréſente deux termes différens, l'un poſitif, & l'autre négatif, réſultans d'autant de permutations poſſibles de a & b; que $\frac{\alpha}{\mathrm{a}}\Big|\frac{\beta}{\mathrm{b}}\Big|\frac{\gamma}{\mathrm{c}}$ en repréſente ſix, trois poſitifs & trois négatifs, réſultans d'autant de permutations poſſibles de a, b & c; que $\frac{\alpha}{\mathrm{a}}\Big|\frac{\beta}{\mathrm{b}}\Big|\frac{\gamma}{\mathrm{c}}\Big|\frac{\delta}{\mathrm{d}}$ en repréſente vingt-quatre, douze poſitifs & douze négatifs, réſultans d'autant de permutations poſſibles entre a, b, c & d; & ainſi de ſuite.

Mais de plus, la formation de ces quantités eſt telle que l'unique changement qui puiſſe réſulter d'une permutation, quelle qu'elle ſoit, faite entre les lettres du même alphabet, dans l'une de ces abréviations, ſera un changement dans le ſigne de ſa première valeur.

La démonſtration de cette vérité & la recherche du ſigne réſultant d'une permutation déterminée, dépendent généralement de deux propoſitions qui peuvent être énoncées ainſi qu'il ſuit, en ſe ſervant de nombres pour indiquer le rang des lettres.

La première eſt que

$$\frac{1}{1}\Big|\frac{2}{2}\Big|\frac{3}{3}\Big|\frac{\cdots}{\cdots}\Big|\frac{m}{m}\Big|\frac{m+1}{m+1}\Big|\frac{\cdots}{\cdots}\,\frac{n}{n} = \pm\,\frac{1}{m}\Big|\frac{2}{m+1}\Big|\frac{3}{m+2}\Big|\frac{\cdots}{\cdots}\Big|\frac{n-m+1}{n}\Big|\frac{n-m+2}{1}\Big|\frac{n-m+3}{2}\Big|\frac{\cdots}{\cdots}\Big|\frac{n}{m-1},$$

le signe — n'ayant lieu que dans le cas où n & m sont l'un & l'autre des nombres pairs.

La seconde est que

$$\frac{1}{1}\Big|\frac{2}{2}\Big|\frac{3}{3}\Big|\frac{\ldots}{\ldots}\Big|\frac{m}{m}\Big|\frac{m+1}{m+1}\Big|\frac{\ldots}{\ldots}\Big|\frac{n}{n} = -\frac{1}{1}\Big|\frac{2}{2}\Big|\frac{3}{3}\Big|\frac{\ldots}{\ldots}\Big|\frac{m-1}{m-1}\Big|\frac{m}{m+1}\Big|\frac{m+1}{m}\Big|\frac{m+2}{m+2}\Big|\frac{\ldots}{\ldots}\Big|\frac{n}{n}.$$

Il sera facile de voir que, la première équation supposée, celle-ci n'a besoin d'être prouvée que pour un seul cas, comme, par exemple, celui de $m = n - 1$, c'est-à-dire, celui où les deux lettres transposées sont les deux dernières.

Au lieu de démontrer généralement ces deux équations, ce qui exigeroit un calcul embarrassant plutôt que difficile, je me contenterai de développer les exemples les plus simples; cela suffira pour saisir l'esprit de la démonstration.

Selon l'une & l'autre équation, on a

$$\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b} = -\frac{\alpha}{b}\Big|\frac{\beta}{a}$$

mais selon l'ordre de formation prescrit ci-dessus, $\frac{\alpha}{b}\Big|\frac{\beta}{a}$ $= \frac{\alpha\,\beta}{b.a} - \frac{\alpha\,\beta}{a.b}$ qui égale en effet $-\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}$.

Selon la première équation, on a

$$\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c} = \frac{\alpha}{b}\Big|\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{a} = \frac{\alpha}{c}\Big|\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{b};$$

mais selon l'ordre de formation,

$$\frac{\alpha}{b}\Big|\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{a} = \frac{\alpha}{b.}\;\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{a} + \frac{\alpha}{c.}\;\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{b} + \frac{\alpha}{a.}\;\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c},$$

&

$$\frac{\alpha}{c}\Big|\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{b} = \frac{\alpha}{c.}\;\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{b} + \frac{\alpha}{a.}\;\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c} + \frac{\alpha}{b.}\;\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{a},$$

qui ne diffèrent du développement ci-dessus de $\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}$, que par une simple transposition entre les termes.

Selon la seconde, on a

$$\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c} = -\frac{\alpha}{b}\Big|\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{c} = -\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{b};$$

mais on a déjà selon la première $\frac{\alpha}{b}\Big|\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{c} = \frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{b}$; donc il suffit de prouver que selon l'ordre de formation $\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c} = -\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{b}$: or on a

$$\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{b} = \frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{b} + \frac{\alpha}{c}\cdot\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{a} + \frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{c}$$

(qui en supposant $\frac{1}{1}\Big|\frac{2}{2} = -\frac{1}{2}\Big|\frac{2}{1}$, comme cela a été prouvé ci-dessus) est,

$$= -\frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c} - \frac{\alpha}{c}\cdot\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{b} - \frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{a} = -\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}.$$

Quant à $\frac{\alpha}{c}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{a}$, il égale par conséquent $-\frac{\alpha}{c}\Big|\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{b}$, ou $-\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}$.

On a de même selon notre première équation,

$$\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d} = -\frac{\alpha}{b}\Big|\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{d}\Big|\frac{\delta}{a} = \frac{\alpha}{c}\Big|\frac{\beta}{d}\Big|\frac{\gamma}{a}\Big|\frac{\delta}{b} = -\frac{\alpha}{d}\Big|\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{b}\Big|\frac{\delta}{c}.$$

Et en effet, selon l'ordre de formation, on a, par exemple,

$$\frac{\alpha}{b}\Big|\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{d}\Big|\frac{\delta}{a} = \frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{d}\Big|\frac{\delta}{a} - \frac{\alpha}{c}\cdot\frac{\beta}{d}\Big|\frac{\gamma}{a}\Big|\frac{\delta}{b} + \frac{\alpha}{d}\cdot\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{b}\Big|\frac{\delta}{c} - \frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d}$$

qui ne diffère du développement ci-dessus de $\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d}$ que par une simple transposition entre les termes & le signe du tout.

Selon la seconde équation, on a

$$\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d} = -\frac{\alpha}{b}\Big|\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d} = -\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{b}\Big|\frac{\delta}{d} = -\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{d}\Big|\frac{\delta}{c},$$

&

& il s'agit de prouver seulement que $\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d} = - \frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{d}\Big|\frac{\delta}{c}$, ou que $\frac{1}{1}\Big|\frac{2}{2}\Big|\frac{3}{3}\Big|\frac{4}{4} = - \frac{1}{1}\Big|\frac{2}{2}\Big|\frac{3}{4}\Big|\frac{4}{3}$; car selon notre première équation

$$\frac{\alpha}{b}\Big|\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d} = \frac{\alpha}{c}\Big|\frac{\beta}{d}\Big|\frac{\gamma}{b}\Big|\frac{\delta}{a} = - \frac{\alpha}{c}\Big|\frac{\beta}{d}\Big|\frac{\gamma}{a}\Big|\frac{\delta}{b} = - \frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d}$$

$$\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{b}\Big|\frac{\delta}{d} = - \frac{\alpha}{d}\Big|\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{b} = \frac{\alpha}{d}\Big|\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{b}\Big|\frac{\delta}{c} = - \frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d};$$

or

$$\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{d}\Big|\frac{\delta}{c} = \frac{\alpha}{a}.\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{d}\Big|\frac{\delta}{c} - \frac{\alpha}{b}.\frac{\beta}{d}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{a} + \frac{\alpha}{d}.\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{a}\Big|\frac{\delta}{b} - \frac{\alpha}{c}.\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{b}\Big|\frac{\delta}{d}.$$

Je considère dans ce développement, d'abord les deux derniers termes, & ensuite les premiers.

Comme selon notre première équation $\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{a}\Big|\frac{\delta}{b} = \frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{b}\Big|\frac{\delta}{c}$, & $\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\gamma}{b}\Big|\frac{\delta}{d} = \frac{\beta}{d}\Big|\frac{\gamma}{a}\Big|\frac{\delta}{b}$, il est clair que les deux derniers termes comparés à ceux du développement de $\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d}$, sont les mêmes, mais de signe contraire; quant aux premiers, pour qu'ils soient aussi les mêmes, mais de signe contraire, il faut que $\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{d}\Big|\frac{\delta}{c} = - \frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d}$ & $\frac{\beta}{d}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{a} = - \frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{d}\Big|\frac{\delta}{a}$; or, $\frac{\beta}{d}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{a} = \frac{\beta}{c}\Big|\frac{\gamma}{a}\Big|\frac{\delta}{d}$, il suffit donc (notre première équation supposée) que l'on ait $\frac{1|2|3}{1|2|3} = - \frac{1|2|3}{1|3|2}$ pour avoir $\frac{1|2|3|4}{1|2|3|4} = - \frac{1|2|3|4}{1|2|4|3}$; or, c'est ce qui a lieu en effet. On tirera de-là ce qui résulte de toutes les autres permutations de a, b, c & d; & si l'on procède semblablement pour le cas de cinq lettres du même alphabet, &c. On verra qu'en général la démonſtration de notre ſeconde équation pour le cas de $n = a$, dépend de cette même équation pour le cas de $n = a - 1$, quel que ſoit a; d'où il ſuit que puiſque $\frac{1|2}{1|2} = -\frac{1|2}{2|1}$, elle eſt généralement vraie.

Cela ſuppoſe la vérité de la première qui eſt manifeſte d'après l'ordre de formation.

Ceux qui ont connoiſſance des ſymboles abrégés que j'ai nommés *types partiels de combinaiſon*, dans mon *Mémoire ſur la réſolution des équations* *; reconnoîtront ici la formation du *type partiel* dépendant du ſecond degré, pour un nombre quelconque de lettres; ils verront ſans peine qu'en prenant ici nos α, β, γ, δ, &c. par exemple, pour des expoſans, tous les termes de même ſigne, dans le développement de l'une de nos abréviations; ſeront auſſi le développement du *type partiel* dépendant du ſecond degré, & formé d'un pareil nombre de lettres; ce que démontrent nos opérations précédentes.

De ce que nous avons dit juſqu'ici, *il ſuit que*

$$\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\gamma}{c}\Big|\frac{\delta}{d}\Big|\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = 0,$$

ſi deux lettres quelconques du même alphabet ſont égales entr'elles; car quelque part que ſoient les deux lettres égales, on peut les tranſpoſer aux deux dernières places de leur rang, ce qui ne fera au plus que changer le ſigne de la valeur; alors, de leur permutation particulière, il ne peut, d'une part, réſulter aucun changement, puiſqu'elles ſont égales; d'autre part, ſelon notre ſeconde équation ci-deſſus, il doit en réſulter un changement de ſigne; cette contradiction ne peut être levée qu'en ſuppoſant la valeur zéro. En effet, $\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\alpha}{b} = 0$.

* Voyez les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, *année 1771, page 365.*

$$\frac{\alpha}{a}\Big|\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\beta}{c} = \frac{\alpha}{a}.\frac{\beta}{b}\Big|\frac{\beta}{c} + \frac{\alpha}{b}.\frac{\beta}{c}\Big|\frac{\beta}{a} + \frac{\alpha}{c}.\frac{\beta}{a}\Big|\frac{\beta}{b} = 0, \text{ \&c.}$$

Tout cela posé; puisque l'on a identiquement;

$$\frac{1}{1}\Big|\frac{1}{2}\Big|\frac{2}{3} = \frac{1}{1}.\frac{1}{2}\Big|\frac{2}{3} + \frac{1}{2}.\frac{1}{3}\Big|\frac{2}{1} + \frac{1}{3}.\frac{1}{1}\Big|\frac{2}{2} = 0,$$

$$\frac{2}{1}\Big|\frac{1}{2}\Big|\frac{2}{3} = \frac{2}{1}.\frac{1}{2}\Big|\frac{2}{3} + \frac{2}{2}.\frac{1}{3}\Big|\frac{2}{1} + \frac{2}{3}.\frac{1}{1}\Big|\frac{2}{2} = 0,$$

Si l'on propose de trouver les valeurs de $\xi 1$ & de $\xi 2$ qui satisfont aux deux équations

$$\overset{1}{1}.\xi 1 + \overset{1}{2}.\xi 2 + \overset{1}{3} = 0$$

$$\overset{2}{1}.\xi 1 + \overset{2}{2}.\xi 2 + \overset{2}{3} = 0,$$

on pourra comparer, & l'on aura

$$\xi 1 = \frac{\frac{1}{2}\Big|\frac{2}{3}}{\frac{1}{1}\Big|\frac{2}{2}}, \quad \xi 2 = \frac{\frac{1}{3}\Big|\frac{2}{1}}{\frac{1}{1}\Big|\frac{2}{2}}.$$

De même, puisque l'on a identiquement,

$$\frac{1|1|2|3}{1|2|3|4} = \frac{1}{1}.\frac{1|2|3}{2|3|4} - \frac{1}{2}.\frac{1|2|3}{3|4|1} + \frac{1}{3}.\frac{1|2|3}{4|1|2} - \frac{1}{4}.\frac{1|2|3}{1|2|3} = 0,$$

$$\frac{2|1|2|3}{1|2|3|4} = \frac{2}{1}.\frac{1|2|3}{2|3|4} - \frac{2}{2}.\frac{1|2|3}{3|4|1} + \frac{2}{3}.\frac{1|2|3}{4|1|2} - \frac{2}{4}.\frac{1|2|3}{1|2|3} = 0,$$

$$\frac{3|1|2|3}{1|2|3|4} = \frac{3}{1}.\frac{1|2|3}{2|3|4} - \frac{3}{2}.\frac{1|2|3}{3|4|1} + \frac{3}{3}.\frac{1|2|3}{4|1|2} - \frac{3}{4}.\frac{1|2|3}{1|2|3} = 0;$$

Si l'on propose de trouver les valeurs de $\xi 1$, $\xi 2$ & $\xi 3$, qui satisfont aux trois équations

$$\overset{1}{1}.\xi 1 + \overset{1}{2}.\xi 2 + \overset{1}{3}.\xi 3 + \overset{1}{4} = 0,$$

$$\overset{2}{1}.\xi 1 + \overset{2}{2}.\xi 2 + \overset{2}{3}.\xi 3 + \overset{2}{4} = 0,$$

$$\overset{3}{1}.\xi 1 + \overset{3}{2}.\xi 3 + \overset{3}{3}.\xi 3 + \overset{3}{4} = 0;$$

on pourra comparer, & l'on aura

$$\xi 1 = \frac{-\frac{1|2|3}{2|3|4}}{\frac{1|2|3}{1|2|3}},\quad \xi 2 = \frac{\frac{1|2|3}{3|4|1}}{\frac{1|2|3}{1|2|3}},\quad \xi 3 = \frac{-\frac{1|2|3}{4|1|2}}{\frac{1|2|3}{1|2|3}},$$

&c.

Il est clair que ces valeurs n'ont point de facteurs inutiles; mais pour les rendre aussi commodes qu'il est possible dans les applications, & particulièrement dans celles où l'on veut faire usage des logarithmes, il sera bon d'y employer le plus qu'il se pourra, la multiplication des facteurs complexes. J'observe donc 1.° que si l'on substitue dans le développement de $\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d}$, les valeurs des $\frac{\alpha|\beta|\gamma}{a|b|c}$ en $\frac{\alpha|\beta}{a|b}$, on aura, en réduisant & ordonnant, d'après les observations ci-dessus,

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d} = \left\{\begin{array}{l} \frac{\alpha|\beta}{a|b}.\frac{\gamma|\delta}{c|d} - \frac{\alpha|\beta}{a|c}.\frac{\gamma|\delta}{b|d} + \frac{\alpha|\beta}{a|d}.\frac{\gamma|\delta}{b|c} \\ + \frac{\alpha|\beta}{b|c}.\frac{\gamma|\delta}{a|d} - \frac{\alpha|\beta}{b|d}.\frac{\gamma|\delta}{a|c} \\ + \frac{\alpha|\beta}{c|d}.\frac{\gamma|\delta}{a|b} \end{array}\right.$$

si de même on substitue dans le développement de $\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{a|b|c|d|e|f}$, les valeurs des $\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta|\varepsilon}{a|b|c|d|e}$ en $\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d}$, on aura, en réduisant & ordonnant, d'après les observations ci-dessus,

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{a|b|c|d|e|f} = \left\{\begin{aligned}
&\frac{\alpha|\beta}{a|b}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{c|d|e|f} - \frac{\alpha|\beta}{a|c}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{b|d|e|f} + \frac{\;|\;}{a|d}\cdot\frac{\;|\;|\;|\;}{b|c|e|f}\\
&+\frac{\alpha|\beta}{b|c}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{a|d|e|f} - \frac{\;|\;}{b|d}\cdot\frac{\;|\;|\;|\;}{a|c|e|f} + \frac{\;|\;}{b|e}\cdot\frac{\;|\;|\;|\;}{a|c|d|f}\\
&+\frac{\;|\;}{c|d}\cdot\frac{\;|\;|\;|\;}{a|b|e|f} - \frac{\;|\;}{c|e}\cdot\frac{\;|\;|\;|\;}{a|b|d|f} + \frac{\;|\;}{c|f}\cdot\frac{\;|\;|\;|\;}{a|b|d|e}\\
&+\frac{\;|\;}{d|e}\cdot\frac{\;|\;|\;|\;}{a|b|c|f} - \frac{\;|\;}{d|f}\cdot\frac{\;|\;|\;|\;}{a|b|c|e}\\
&+\frac{\;|\;}{e|f}\cdot\frac{\;|\;|\;|\;}{a|b|c|d}\\
&\qquad\qquad - \frac{\;|\;}{a|e}\cdot\frac{\;|\;|\;|\;}{b|c|d|f} + \frac{\;|\;}{a|f}\cdot\frac{\;|\;|\;|\;}{b|c|d|e}\\
&\qquad\qquad - \frac{\;|\;}{b|f}\cdot\frac{\;|\;|\;|\;}{a|c|d|e}
\end{aligned}\right.$$

La loi des permutations & des signes eſt aſſez manifeſte dans ces exemples, pour qu'on en puiſſe conclure des développemens pareils pour les cas de huit & dix lettres, &c. du même alphabet: alors, en employant les premiers développemens pour les cas d'un nombre impair de ces lettres, on aura les formules d'élimination du premier degré, ſous la forme la plus conciſe qu'il ſoit poſſible.

Si l'on veut exprimer ces formules, généralement pour un nombre n d'équations,

$$\overset{1}{1}.\xi 1 + \overset{1}{2}.\xi 2 + \overset{1}{3}.\xi 3 + \ldots + \overset{1}{m}.\xi m + \ldots + \overset{1}{n}.\xi n + \overset{1}{(n+1)} = 0,$$
$$\overset{2}{1}.\xi 1 + \overset{2}{2}.\xi 2 + \overset{2}{3}.\xi 3 + \ldots + \overset{2}{m}.\xi m + \ldots + \overset{2}{n}.\xi n + \overset{2}{(n+1)} = 0,$$

&c.

La valeur de l'inconnue quelconque ξm, ſera renfermée dans l'équation ſuivante, à une ſeule inconnue.

$$\frac{1|2|3|\ldots|n}{1|2|3|\ldots|n}.\xi m \pm \frac{1|2|3|\ldots\ldots|n-m|n-m+1|n-m+2|n-m+3|\ldots\ldots|n}{m+1|m+2|m+3|\ldots\ldots|n|n+1|1|2|\ldots\ldots|m-1} = 0.$$

le signe $+$ ayant lieu seulement dans le cas où m & n sont impairs l'un & l'autre.

ARTICLE II.

De l'Élimination entre deux Équations de degrés élevés.

Si l'on a deux équations du degré m, & représentées, l'une par $\overset{1}{1}.x^m + \overset{1}{2}.x^{m-1} + \overset{1}{3}.x^{m-2} + \&c. = 0$; l'autre par $\overset{2}{1}.x^m + \overset{2}{2}.x^{m-1} + \overset{2}{3}.x^{m-2} + \&c. = 0$; & qu'afin de simplifier davantage, on écrive,

$$\overline{a|b} \text{ pour } \frac{1}{a}\Big|\frac{2}{b}, \text{ ou pour } \overset{1}{a}.\overset{2}{b} - \overset{1}{b}.\overset{2}{a}.$$

On aura, si les équations sont du second degré, ou si $m = 2$, l'équation

$$\left.\begin{matrix}\overline{1|3}.\overline{1|3}\\ -\overline{1|2}.\overline{2|3}\end{matrix}\right\} = 0.$$

Si $m = 3$, on aura

$$\overline{1|4}.\left\{\begin{matrix}\overline{1|4}.\overline{1|4}\\ -2.\overline{1|2}.\overline{3|4}\end{matrix}\right\} - \overline{1|3}.\left\{\begin{matrix}\overline{1|4}.\overline{2|4}\\ -\overline{1|3}.\overline{3|4}\end{matrix}\right\} + \overline{1|2}.\left\{\begin{matrix}\overline{2|4}.\overline{2|4}\\ -\overline{2|3}.\overline{3|4}\end{matrix}\right\} = 0.$$

Si $m = 4$, on aura,

$$\left.\begin{matrix}
\overline{1|5}.\left\{\begin{matrix}
\overline{1|5}\left\{\begin{matrix}\overline{1|5}.\overline{1|5}\\ -3.\overline{1|2}.\overline{4|5}\end{matrix}\right\}\\
-\overline{1|3}\left\{\begin{matrix}2.\overline{1|5}.\overline{3|5}\\ -3.\overline{1|4}.\overline{4|5}\end{matrix}\right\}\\
+3.\overline{1|2}\left\{\begin{matrix}\overline{2|5}.\overline{3|5}\\ -\overline{2|4}.\overline{4|5}\end{matrix}\right\}
\end{matrix}\right\}
- \overline{1|4}.\left\{\begin{matrix}
\overline{2|5}\left\{\begin{matrix}\overline{1|5}.\overline{1|5}\\ -2.\overline{1|2}.\overline{4|5}\end{matrix}\right\}\\
-\overline{1|4}\left\{\begin{matrix}\overline{1|5}.\overline{3|5}\\ -\overline{1|4}.\overline{4|5}\end{matrix}\right\}\\
+2.\overline{1|2}\left\{\begin{matrix}\overline{3|5}.\overline{3|5}\\ -\overline{3|4}.\overline{4|5}\end{matrix}\right\}
\end{matrix}\right\}\\
+\overline{1|3}.\left\{\begin{matrix}
\overline{2|5}\left\{\begin{matrix}\overline{1|5}.\overline{2|5}\\ -2.\overline{1|3}.\overline{4|5}\end{matrix}\right\}\\
-\overline{2|4}\left\{\begin{matrix}\overline{1|5}.\overline{3|5}\\ -\overline{1|4}.\overline{4|5}\end{matrix}\right\}\\
+\overline{1|3}\left\{\begin{matrix}\overline{3|5}.\overline{3|5}\\ -\overline{3|4}.\overline{4|5}\end{matrix}\right\}
\end{matrix}\right\}
- \overline{1|2}.\left\{\begin{matrix}
\overline{2|5}\left\{\begin{matrix}\overline{2|5}.\overline{2|5}\\ -2.\overline{2|3}.\overline{4|5}\end{matrix}\right\}\\
-\overline{2|4}\left\{\begin{matrix}\overline{2|5}.\overline{3|5}\\ -\overline{2|4}.\overline{4|5}\end{matrix}\right\}\\
+\overline{2|3}\left\{\begin{matrix}\overline{3|5}.\overline{3|5}\\ -\overline{3|4}.\overline{4|5}\end{matrix}\right\}
\end{matrix}\right\}
\end{matrix}\right\} = 0.$$

On obſervera que les nombres hors du ſigne $\overline{|}$, & qu'on a diſtingués ici & dans la ſuite par un plus gros caractère, ſont des nombres nombrans, ou des coëfficiens numériques & déterminés. Il faudroit en trouver la loi avant de parvenir à une formule générale d'élimination qui fût fonction du degré *m*.

J'avois trouvé ſans peine les formes précédentes, & dans le deſſein de découvrir une loi, j'entrepris de chercher une forme ſemblable pour le cas de $m = 5$. Les difficultés que j'ai rencontrées, & qui m'ont fait abandonner cette recherche, pourront être vaincues; c'eſt pourquoi je vais en donner une idée, & indiquer les procédés que j'ai ſuivis.

Je ſuppoſe nos formules toutes calculées & miſes en facteurs de la forme $\overline{a|b}$, telles que les donnent pluſieurs méthodes connues; & qu'il n'eſt plus queſtion que de les réduire au moindre nombre de termes, comme le ſont celles que nous venons de voir, ce qui eſt néceſſaire pour les mettre ſous la forme ſyſtématique en queſtion.

J'obſerve d'abord qu'il ne peut y avoir de réduction qu'entre des termes compoſés des mêmes coëfficiens; c'eſt-à-dire ici, entre des termes où il n'entre que les mêmes nombres ordinaux, répétés le même nombre de fois, tels que ceux-ci.

$$
\begin{array}{ll}
- & \overline{1|2}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{3|4} \\
- & 2\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|4} \\
+ & \overline{1|4}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|3},
\end{array}
$$

où 1 ſe trouve deux fois, 2 une fois, 3 une fois, & 4 deux fois.

Si donc on ſe propoſe une réduction à faire, il faut raſſembler les termes entre leſquels elle peut avoir lieu, & ne conſidérer que ceux-là.

Le fondement de toutes les réductions poſſibles entre des termes de cette eſpèce ſe trouve, comme on le verra bientôt, dans une ſuite d'équations données par M. Fontaine, au commencement de ſa ſeconde méthode de calcul intégral, dans le Recueil de ſes Mémoires. Elles ſe réduiſent à cette proposition identique, facile à vérifier généralement,

$$\overline{a|b}.\overline{c|d} - \overline{a|c}.\overline{b|d} + \overline{a|d}.\overline{b|c} = 0.$$

Les trois termes ci-dessus, par exemple, sont visiblement réductibles; car on a,

$$\overline{1|2}.\overline{3|4} - \overline{1|3}.\overline{2|4} + \overline{1|4}.\overline{2|3} = 0,$$

qui étant multiplié par $-\overline{1|4}$, & ajouté aux trois termes, donne,

$$\begin{aligned} &- 2.\overline{1|2}.\overline{1|4}.\overline{3|4} \\ &- \overline{1|3}.\overline{1|4}.\overline{2|4}, \end{aligned}$$

pour résultat.

Mais il est évident qu'il y a ici un choix arbitraire des termes à faire évanouir, & qu'on peut s'égarer de deux manières, lorsqu'il y a beaucoup de termes; l'une, en s'éloignant de la route qui mène à en faire évanouir le plus qu'il est possible; l'autre, en amenant un résultat qui, quoique du moindre nombre de termes, ne soit cependant pas propre à la forme systématique.

Quelques essais me firent soupçonner d'abord que j'éviterois ces deux inconvéniens en faisant usage du procédé suivant.

J'ai supposé $\overset{1}{a}.\overset{2}{\alpha} - \overset{1}{\alpha}.\overset{2}{a} = \overline{a|\alpha}.$

Je suppose de nouveau

$$\overset{1}{a}.\overset{1}{b}.\overset{2}{\alpha}.\overset{2}{\beta} + \overset{1}{\alpha}.\overset{1}{\beta}.\overset{2}{a}.\overset{2}{b} = \overline{ab|\alpha\beta},$$

$$\overset{1}{a}.\overset{1}{b}.\overset{1}{c}.\overset{2}{\alpha}.\overset{2}{\beta}.\overset{2}{\gamma} - \overset{1}{\alpha}.\overset{1}{\beta}.\overset{1}{\gamma}.\overset{2}{a}.\overset{2}{b}.\overset{2}{c} = \overline{abc|\alpha\beta\gamma},$$

$$\overset{1}{a}.\overset{1}{b}.\overset{1}{c}.\overset{1}{d}.\overset{2}{\alpha}.\overset{2}{\beta}.\overset{2}{\gamma}.\overset{2}{\delta} + \overset{1}{\alpha}.\overset{1}{\beta}.\overset{1}{\gamma}.\overset{1}{\delta}.\overset{2}{a}.\overset{2}{b}.\overset{2}{c}.\overset{2}{d} = \overline{abcd|\alpha\beta\gamma\delta};$$

&c.

d'où il suit que $\overline{\alpha|a} = -\overline{a|\alpha}$, $\overline{\alpha\beta|ab} = \overline{ab|\alpha\beta}$, $\overline{\alpha\beta\gamma|abc} = -\overline{abc|\alpha\beta\gamma}$, &c. & que les permutations entre les lettres qui sont d'un même côté du signe $\overline{\;|\;}$, sont indifférentes relativement à la valeur de l'abréviation.

Cela posé, l'on a

$$\overline{a|\alpha}.\overline{b|\beta} = \overline{ab|\alpha\beta} - \overline{a\beta|\alpha b},$$

$$\overline{a|\alpha}.\overline{b|\beta}.\overline{c|\gamma} = \overline{abc|\alpha\beta\gamma} - \overline{ab\gamma|\alpha\beta c} - \overline{a\beta c|\alpha b\gamma} + \overline{a\beta\gamma|\alpha bc},$$

&c.

ce

ce qui revient à avoir le résultat des multiplications indiquées, quoique l'on n'en écrive que la moitié des termes.

Étant donc proposée une suite de termes composés de facteurs de la forme $\overline{a|\alpha}$, on peut développer tous les produits & opérer comme dans l'exemple suivant. On aura, toute réduction faite dans le second membre,

$$\left.\begin{array}{l} - \quad \overline{1|2}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{3|4} \\ - \, 2\,\overline{1|3}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|4} \\ + \quad \overline{1|4}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|3}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} - \quad \overline{112|344} \\ - \, 2\cdot\overline{113|244} \\ + \, 3\cdot\overline{114|234} \\ + \, 3\cdot\overline{123|144} \\ - \quad \overline{124|134}\end{array}\right.$$

Si l'on compare le terme $\overline{112|344}$ avec celui $\overline{abc|\alpha\beta\gamma}$, pris dans l'une des formules ci-dessus, on aura

$$\overline{1|3}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|4} = \overline{112|344} - \overline{114|234} - \overline{124|134} - \overline{123|144},$$

& substituant, l'on a

$$\left.\begin{array}{l} - \quad \overline{1|2}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{3|4} \\ - \, 2\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|4} \\ + \quad \overline{1|4}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|3}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} - \quad \overline{1|3}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|4} \\ - \, 2\cdot\overline{113|244} \\ + \, 2\cdot\overline{114|234} \\ + \, 2\cdot\overline{123|144} \\ - \, 2\cdot\overline{124|134}\end{array}\right.$$

comparant de nouveau $\overline{113|244}$ avec $\overline{abc|\alpha\beta\gamma}$, & substituant, on aura, comme ci-dessus,

$$\left.\begin{array}{l} - \quad \overline{1|2}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{3|4} \\ - \, 2\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|4} \\ - \quad \overline{1|4}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|3}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} - \quad \overline{1|3}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|4} \\ - \, 2\cdot\overline{1|2}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{3|4}\end{array}\right.$$

Maintenant, ce qu'avoit de particulier le procédé dont je viens de parler, consistoit à choisir toujours entre les termes de la forme $\overline{abc\ldots|\alpha\beta\gamma\ldots}$, restans dans le second membre, celui où les nombres de l'un des côtés du signe étoient les plus petits; pour le comparer à $\overline{abc\ldots|\alpha\beta\gamma\ldots}$

Le succès de ce procédé empirique n'a commencé à se démentir que dans un petit nombre de réductions de la formule pour le cinquième degré; & il se peut que celles-ci tiennent à quelqu'autre observation de cette espèce, qui ne s'est pas présentée à moi.

La méthode directe que je vais exposer lèveroit toute difficulté, si elle étoit praticable; mais je n'ai pas vu de moyens de la rendre telle. L'exemple suivant suffira pour la faire entendre.

Je suppose que l'on ait à réduire la quantité

$$\begin{array}{l} -\ 4\cdot\overline{1|2}\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{3|5}\cdot\overline{4|5} \\ -\ 3\cdot\overline{1|2}\cdot\overline{1|5}\cdot\overline{3|4}\cdot\overline{3|5} \\ -\ 3\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{1|5}\cdot\overline{2|3}\cdot\overline{4|5} \\ -\ \overline{1|5}\cdot\overline{1|5}\cdot\overline{2|3}\cdot\overline{3|4} \end{array}$$

& soit cette quantité désignée par M; on a les cinq équations identiques,

$$\begin{array}{l} \overline{1|2}\cdot\overline{3|4} - \overline{1|3}\cdot\overline{2|4} + \overline{1|4}\cdot\overline{2|3} = 0, \\ \overline{1|2}\cdot\overline{3|5} - \overline{1|3}\cdot\overline{2|5} + \overline{1|5}\cdot\overline{2|3} = 0, \\ \overline{1|2}\cdot\overline{4|5} - \overline{1|4}\cdot\overline{2|5} + \overline{1|5}\cdot\overline{2|4} = 0, \\ \overline{1|3}\cdot\overline{4|5} - \overline{1|4}\cdot\overline{3|5} + \overline{1|5}\cdot\overline{3|4} = 0; \\ \overline{2|3}\cdot\overline{4|5} - \overline{2|4}\cdot\overline{3|5} + \overline{2|5}\cdot\overline{3|4} = 0; \end{array}$$

Il faut multiplier chacune de ces cinq équations par le facteur le plus général qui puisse donner pour produit une expression où les nombres ordinaux soient les mêmes que dans M, & répétés le même nombre de fois. Multipliant donc

la première par... $\alpha\cdot\overline{1|5}\cdot\overline{3|5}$,

la seconde par... $\beta 1\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{4|5} + \beta 2\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{3|5} + \beta 3\cdot\overline{1|5}\cdot\overline{3|4}$,

la troisième par... $\gamma\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{3|5}$,

la quatrième par... $\delta 1\cdot\overline{1|2}\cdot\overline{3|5} + \delta 2\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{2|5} + \delta 3\cdot\overline{1|5}\cdot\overline{2|3}$,

& la cinquième par $\varepsilon\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{1|5}$;

ajoutant ces produits à la quantité M, & égalant cette ſomme, qui eſt M, à l'expreſſion

$$\begin{array}{ll}
a1\cdot\overline{1|2}\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{3|5}\cdot\overline{4|5} & +\ a6\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{1|5}\cdot\overline{2|3}\cdot\overline{4|5} \\
+\ a2\cdot\overline{1|2}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{3|5}\cdot\overline{3|5} & +\ a7\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{1|5}\cdot\overline{2|4}\cdot\overline{3|5} \\
+\ a3\cdot\overline{1|2}\cdot\overline{1|5}\cdot\overline{3|4}\cdot\overline{3|5} & +\ a8\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{1|5}\cdot\overline{2|5}\cdot\overline{3|4} \\
+\ a4\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{2|5}\cdot\overline{4|5} & +\ a9\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{1|5}\cdot\overline{2|3}\cdot\overline{3|5} \\
+\ a5\cdot\overline{1|3}\cdot\overline{1|4}\cdot\overline{2|5}\cdot\overline{3|5} & +\ a10\cdot\overline{1|5}\cdot\overline{1|5}\cdot\overline{2|3}\cdot\overline{3|4}
\end{array}$$

qui eſt la plus générale que l'on puiſſe former avec les nombres ordinaux qui entrent dans M; on trouve après avoir tiré les valeurs de α, $\beta 1$, $\beta 2$, &c. que pour que M ſoit égale à cette expreſſion générale, il ſuffit que les quatre équations ſuivantes aient lieu,

$$a1 + a2 + a4 + a5 + 4 = 0,$$
$$a1 + a2 - a6 - a7 - a9 + 1 = 0,$$
$$a2 + a3 + a5 + a7 + a8 + 3 = 0,$$
$$a2 + a3 - a9 - a10 + 2 = 0.$$

Il s'agit donc de ſatisfaire à ces quatre équations, en faiſant zéro le plus de ces dix indéterminées qu'il ſe pourra, ce qui eſt toujours poſſible, en épuiſant toutes les combinaiſons. On trouvera que l'on peut en faire ſept égales à zéro, & non pas huit. On ſatisfait, par exemple, en faiſant $a1 = -1$, $a5 = -3$, $a10 = 2$; ou en faiſant $a2 = -2$, $a4 = -2$, $a7 = -1$; &c. Il reſte à faire un choix entre toutes ces manières, relativement à la forme ſyſtématique; ce qui peut ſe faire encore, en épuiſant toutes les combinaiſons: mais on ſent combien cette exhauſtion entraîneroit de longueurs. Elle devient tout-à-fait impraticable pour le cinquième degré. Pour réduire, par exemple, la quantité

$$- \overline{1|5} \cdot \overline{1|3} \cdot \overline{2|6} \cdot \overline{2|5} \cdot \overline{4|6}$$
$$- 3 \cdot \overline{1|4} \cdot \overline{1|3} \cdot \overline{2|6} \cdot \overline{2|5} \cdot \overline{5|6}$$
$$- 3 \cdot \overline{1|5} \ \overline{1|2} \cdot \overline{2|5} \cdot \overline{3|6} \cdot \overline{4|6}$$
$$- 8 \cdot \overline{1|5} \cdot \overline{1|2} \cdot \overline{2|6} \cdot \overline{3|4} \cdot \overline{5|6}$$
$$+ \overline{1|6} \cdot \overline{1|2} \cdot \overline{2|3} \cdot \overline{4|5} \cdot \overline{5|6}$$
$$+ \overline{1|2} \cdot \overline{1|2} \cdot \overline{3|4} \cdot \overline{5|6} \cdot \overline{5|6}$$

que l'on trouvera à ſon rang ci-après, il faut ſatisfaire à neuf équations entre quarante-ſix indéterminées, ce qu'on ne peut pas ſe propoſer de faire par cette méthode.

La formule pour le cinquième degré, ou pour le cas de $m = 5$, dans nos équations en x, devra être réduite à cent vingt termes, avant de pouvoir être miſe ſous une forme ſyſtématique analogue à celles ci-deſſus. On la trouvera dans la Table ci-jointe, réduite à cent vingt-quatre: mes eſſais n'ont pas été plus loin.

Nota. M. l'Abbé de Gua, Membre de l'Académie, a calculé de ſon côté, dans des vues & par des méthodes qui lui ſont particulières, les formules d'élimination entre deux équations du ſecond, du troiſième, du quatrième & du cinquième degré. Il a cherché auſſi à les réduire au moindre nombre de termes, & y eſt parvenu pour le quatrième degré & les degrés inférieurs. Dans un manuſcrit de ſa formule pour le cinquième, qu'il a bien voulu me communiquer, elle étoit réduite à cent vingt-cinq termes, mais il croit l'avoir ramenée dans le temps à cent vingt-quatre, ainſi que moi; ce qui peut être remarquable, en ce que, quoique M. l'Abbé de Gua n'ait fait ce calcul particulier que plus de deux ans après la première lecture de mon Mémoire, il n'a eu cependant aucune connoiſſance de mes réſultats, juſqu'au moment de l'impreſſion.