

Géométrie euclidienne

Jean-Marc Decauwert

Ce chapitre se divise en deux parties : dans la première, nous étudierons les propriétés des espaces vectoriels euclidiens, c'est-à-dire des espaces vectoriels réels de dimension finie munis d'un produit scalaire ; dans la seconde, nous appliquerons les résultats obtenus à l'étude des configurations usuelles des espaces affines euclidiens, en particulier du plan et de l'espace, et des isométries de ces espaces. La première partie ne fait appel qu'aux notions d'algèbre linéaire étudiées en L1 et L2 ; la seconde suppose connu le chapitre « Géométrie affine ». Nous utiliserons des notations un peu différentes dans ces deux parties.

Table des matières

1	Cours	1
1.1	Espaces vectoriels euclidiens	1
1.1.1	Définitions	1
1.1.2	Orthogonalité, bases orthonormées	3
1.1.3	Matrices orthogonales	8
1.1.4	Groupe orthogonal, angles	10
1.1.5	Dualité	21
1.2	Espaces affines euclidiens	29
1.2.1	Distance et orthogonalité	29
1.2.2	Isométries, similitudes	38
1.2.3	Géométrie du triangle et du cercle	48
2	Entraînement	57
2.1	Vrai ou faux	57
2.2	Exercices	60
2.3	QCM	79
2.4	Devoir	81
2.5	Corrigé du devoir	83
3	Compléments	88
3.1	Constructions à la règle et au compas	88
3.2	Frises et pavages	90
3.3	Polyèdres réguliers	92
3.4	Géométrie sphérique	95
3.5	Cartographie	97
3.6	Projection stéréographique et homographies	99

1 Cours

1.1 Espaces vectoriels euclidiens

1.1.1 Définitions

Définition 1. Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E .

On notera dans cette section $\langle u, v \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v . Dans la section « Géométrie affine euclidienne », dont le cadre sera un espace affine euclidien (souvent de dimension 2 ou 3), les vecteurs seront écrits avec des flèches pour les distinguer des points et on notera (sauf exception) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le produit scalaire de deux vecteurs est donc un nombre réel, et on a, pour tous vecteurs u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 et tous réels a et b :

- $\langle au_1 + bu_2, v \rangle = a\langle u_1, v \rangle + b\langle u_2, v \rangle$ (linéarité à gauche)
- $\langle u, av_1 + bv_2 \rangle = a\langle u, v_1 \rangle + b\langle u, v_2 \rangle$ (linéarité à droite)
- $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (symétrie)
- $\langle u, u \rangle > 0$ pour tout vecteur u non nul (positivité).

Attention : le produit scalaire de deux vecteurs n'est pas toujours positif (pour tout couple (u, v) de vecteurs, les réels $\langle -u, v \rangle$ et $\langle u, v \rangle$ sont opposés).

On appellera *carré scalaire* d'un vecteur u le produit scalaire $\langle u, u \rangle$ du vecteur u par lui-même. Ce nombre est toujours positif et il est nul si et seulement si u est nul.

Définition 2. On appelle espace vectoriel euclidien tout espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Exemples

- On appelle *produit scalaire canonique* sur $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire défini par :

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^n x_iy_i$$

si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$.

En identifiant tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ avec la matrice colonne X de ses composantes, ce produit scalaire s'écrit encore :

$$\langle x, y \rangle = {}^tXY = {}^tYX.$$

- Pour tout entier $n \geq 0$ et tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$), on peut définir un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_a^b P(x)Q(x) dx.$$

Plus généralement, si f est une fonction continue positive non identiquement nulle sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$),

$$\langle P, Q \rangle = \int_a^b f(x)P(x)Q(x) dx$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Norme euclidienne

La positivité du produit scalaire permet de définir pour tout vecteur u :

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Proposition 1. *L'application $u \mapsto \|u\|$ est une norme sur E appelée norme euclidienne sur E .*

Démonstration : Il faut vérifier que pour tous vecteurs u et v et tout réel λ :

1. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$;
2. $\|u\| = 0 \iff u = 0$;
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire).

Les deux premières propriétés découlent immédiatement de la définition du produit scalaire. La troisième découle de l'égalité

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ démontrée ci-dessous. $\square$

Lemme 1. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tout couple (u, v) de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien, on a :

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

Démonstration : Pour tout réel λ , on a

$$\|\lambda u + v\|^2 = \lambda^2 \|u\|^2 + 2\lambda \langle u, v \rangle + \|v\|^2 \geq 0.$$

Il en résulte que, si $u \neq 0$, le discriminant de ce trinôme du second degré en λ est négatif ou nul : $\langle u, v \rangle^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0$. Ce discriminant est nul si et seulement si ce trinôme admet une racine réelle, i.e. si et seulement si il existe un réel λ tel que $\lambda u + v = 0$. $\square$

Remarque : il résulte des démonstrations précédentes qu'on a égalité dans l'inégalité triangulaire $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ si et seulement si $\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\|$, i.e. si et seulement si les deux vecteurs u et v sont directement colinéaires (si $u \neq 0$, il existe $\lambda \geq 0$ tel que $v = \lambda u$).

Définition 3. *Un vecteur est dit unitaire si sa norme est égale à 1.*

À tout vecteur v non nul d'un espace vectoriel euclidien, on peut associer de manière unique un vecteur unitaire u qui lui est directement proportionnel en posant $u = \frac{v}{\|v\|}$.

Caractérisation des normes euclidiennes

Définition 4. Une norme sur un espace vectoriel réel de dimension finie est dite euclidienne si elle provient d'un produit scalaire euclidien.

Le produit scalaire associé à une norme euclidienne est uniquement déterminé par cette norme par les relations :

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2).$$

Toute norme n'est pas euclidienne. Par exemple, les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies sur $\mathbb{R}^n$ par $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$ pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ ne sont pas euclidiennes. Elles ne vérifient en effet pas la relation du parallélogramme :

Proposition 2. Toute norme euclidienne vérifie la relation du parallélogramme :

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Cette relation tire son nom de ce que, si on considère le parallélogramme construit sur les deux vecteurs u et v , les réels $\|u - v\|$ et $\|u + v\|$ sont les longueurs des diagonales de ce parallélogramme. Elle exprime donc que la somme des carrés des longueurs des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs de ses diagonales.

Démonstration : Il suffit d'ajouter membre à membre les relations

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

et

$$\|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v \rangle = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2.$$

□

On peut en fait montrer que cette relation caractérise les normes euclidiennes : une norme est euclidienne si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme.

1.1.2 Orthogonalité, bases orthonormées

Définition 5. Deux vecteurs x et y d'un espace vectoriel euclidien sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul : $\langle x, y \rangle = 0$.

Deux parties A et B d'un espace vectoriel euclidien sont dites orthogonales si tout vecteur de A est orthogonal à tout vecteur de B :

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \text{pour tout } (x, y) \in A \times B.$$

On appelle orthogonal d'une partie A de E , et on note $A^\perp$, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de A :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \langle x, y \rangle = 0 \text{ pour tout } y \in A\}.$$

Proposition 3. 1. L'orthogonal d'une partie de E est un sous-espace vectoriel de E .

2. Si $A \subset B$ sont deux parties de E , alors $B^\perp \subset A^\perp$.

3. L'orthogonal d'une partie A de E est égal à l'orthogonal du sous-espace vectoriel $\text{Vect}(A)$ de E engendré par cette partie :

$$A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp.$$

Démonstration : La propriété 1 provient de la linéarité du produit scalaire en chacune de ses variables, la propriété 2 de la définition de l'orthogonal d'une partie. L'inclusion $\text{Vect}(A)^\perp \subset A^\perp$ provient, grâce à 2, de l'inclusion $A \subset \text{Vect}(A)$, l'inclusion $A^\perp \subset \text{Vect}(A)^\perp$ de la linéarité du produit scalaire. $\square$

Proposition 4. Toute famille orthogonale constituée de vecteurs non nuls est libre.

Démonstration : Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux : $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$, et soit $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$ une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs. Alors, pour tout $j = 1, \dots, n$:

$$0 = \langle v_j, \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle v_j, v_i \rangle = \lambda_j \|v_j\|^2$$

d'où $\lambda_j = 0$ puisque $\|v_j\|^2 > 0$. Il en résulte que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre. $\square$

Bases orthonormées

Définition 6. On appelle base orthonormée (ou orthonormale) d'un espace vectoriel euclidien E toute base $(e_1, \dots, e_n)$ de E vérifiant

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'intérêt des bases orthonormales vient de ce que le produit scalaire et la norme ont même expression dans toute base orthonormale : si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E et $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ sont deux vecteurs de E , alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

De plus les coordonnées d'un vecteur x dans une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ sont données par :

$$x_i = \langle e_i, x \rangle$$

pour tout $i = 1, \dots, n$.

Si on note, pour tout vecteur x de E , X la matrice colonne ${}^t(x_1, \dots, x_n)$ des composantes de x dans la base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$, le produit scalaire et la norme s'écrivent matriciellement :

$$\langle x, y \rangle = {}^tXY = {}^tYX, \quad \|x\| = ({}^tXX)^{1/2}.$$

Tout espace vectoriel euclidien possède des bases orthonormées. Plus précisément le *procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt* permet de construire à partir de n'importe quelle base d'un tel espace une base orthonormée.

Proposition 5. *Soit E un espace vectoriel euclidien et $(v_1, \dots, v_n)$ une base de E . Alors il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que, pour tout $k = 1, \dots, n$, l'espace vectoriel $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ engendré par les k premiers vecteurs de cette base coïncide avec l'espace vectoriel $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ engendré par les k premiers vecteurs de la base de départ.*

Démonstration : On commence par construire une base orthogonale $(u_1, \dots, u_n)$ vérifiant $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ pour tout $k = 1, \dots, n$. Il suffit ensuite de normer cette base en posant $e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$ pour tout k .

On construit donc, par récurrence sur k , une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs deux à deux orthogonaux vérifiant $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ pour tout $k = 1, \dots, n$. Pour $k = 1$, il suffit de poser $u_1 = v_1$. Si la famille $(u_1, \dots, u_k)$ est construite pour un entier $k < n$, on cherche u_{k+1} de la forme $u_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \lambda_{k+1,i} u_i$. En écrivant $\langle u_j, u_{k+1} \rangle = 0$, on obtient $\lambda_{k+1,j} = \frac{\langle u_j, v_{k+1} \rangle}{\|u_j\|^2}$ pour $j = 1, \dots, k$ et on vérifie immédiatement que la famille ainsi construite convient. $\square$

La matrice de passage de la base $(v_1, \dots, v_n)$ à la base $(e_1, \dots, e_n)$ est donc triangulaire supérieure. On peut montrer que la base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ vérifiant ces propriétés est unique si on impose de plus à tous les coefficients diagonaux de cette matrice de passage d'être positifs.

Corollaire 1. *Toute famille orthonormée d'un espace vectoriel euclidien peut être complétée en une base orthonormée.*

Démonstration : Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille orthonormée. D'après la proposition 4, cette famille est libre. D'après le théorème de la base incomplète, on peut donc la compléter en une base $(e_1, \dots, e_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ de E . En orthonormalisant cette base

par le procédé de Gram-Schmidt, on obtient une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ dont les k premiers vecteurs coïncident avec ceux de la famille donnée. $\square$

Proposition 6. *Soit E un espace vectoriel euclidien et F un sous-espace vectoriel de E . Alors F et $F^\perp$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires. En particulier :*

$$\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F) .$$

On dit que $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F dans E , ou que les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux.

Démonstration : Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base orthonormée de F . On peut la compléter en une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E . Un vecteur $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ est orthogonal à F si et seulement si il est orthogonal à $e_1, \dots, e_k$ puisque ces vecteurs engendrent F , donc si et seulement si $x_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, k$. Le sous-espace vectoriel $F^\perp$ est donc le sous-espace vectoriel de E engendré par $e_{k+1}, \dots, e_n$. $\square$

Proposition 7. *Pour tout sous-espace vectoriel F de E , le sous-espace vectoriel $(F^\perp)^\perp$, appelé biorthogonal de F , est égal à F .*

Plus généralement, pour toute partie A de E , le biorthogonal $(A^\perp)^\perp$ de A est le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(A)$ de E engendré par A .

Démonstration : L'inclusion $F \subset (F^\perp)^\perp$ est claire, puisque, pour tout $x \in F$ et tout $y \in F^\perp$, on a $\langle x, y \rangle = 0$. Mais

$$\dim((F^\perp)^\perp) = \dim(E) - \dim(F^\perp) = \dim(E) - [\dim(E) - \dim(F)] = \dim(F)$$

d'où $F = (F^\perp)^\perp$.

Si A est une partie quelconque de E , l'orthogonal de A est aussi l'orthogonal de $\text{Vect}(A)$, d'où

$$(A^\perp)^\perp = (\text{Vect}(A)^\perp)^\perp = \text{Vect}(A) .$$

$\square$

Exemple : orthogonal d'un vecteur, vecteur normal à un hyperplan

Le sous-espace vectoriel de E orthogonal à un vecteur v non nul est un sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim(E) - 1$, i.e. un hyperplan de E . C'est aussi le sous-espace vectoriel de E orthogonal à la droite vectorielle engendrée par ce vecteur.

De même, le sous-espace vectoriel orthogonal à un hyperplan H de E est une droite vectorielle de E . Tout vecteur non nul de cette droite est dit *normal* à H .

Équation d'un hyperplan : Soit E un espace vectoriel euclidien, $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E , H un hyperplan de E et $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ un vecteur normal à H . Alors l'équation de H dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n v_i x_i = 0 .$$

Projection et symétrie orthogonales

Rappel : si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E , tout vecteur x de E s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$, avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. L'application p qui à x associe x_F est une application linéaire de E dans E , appelée *projection sur F dans la direction G* . Elle vérifie $p \circ p = p$, son image est F et son noyau G . L'application s qui à x associe $x_F - x_G$ est une application linéaire involutive ($s \circ s = id_E$), donc bijective, de E sur E , appelée *symétrie par rapport à F dans la direction G* . Ces deux applications linéaires sont reliées par la relation $s = 2p - id_E$.

Définition 7. Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . On appelle projection orthogonale sur F la projection sur F dans la direction $F^\perp$ et symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F dans la direction $F^\perp$.

Le projeté orthogonal x_F sur F d'un vecteur x de E est donc caractérisé par les deux relations $x_F \in F$ et $\langle x - x_F, y \rangle = 0$ pour tout $y \in F$.

Proposition 8. Toute projection vectorielle orthogonale p est 1-Lipschitzienne : $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout vecteur x .

Démonstration : Soit p la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel euclidien E . L'orthogonalité des vecteurs $p(x)$ et $x - p(x)$ implique $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$, d'où $\|p(x)\| \leq \|x\|$. $\square$

Définition 8. On appelle réflexion toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Une réflexion est donc, dans le plan, une symétrie orthogonale par rapport à une droite et, dans l'espace, une symétrie orthogonale par rapport à un plan.

Exemple : cas d'une droite, d'un hyperplan

Soit v un vecteur non nul de E , $D = \mathbb{R}v$ la droite vectorielle engendrée par v et H l'hyperplan de E orthogonal à v , i.e. le supplémentaire orthogonal de D . Le projeté orthogonal x_D d'un vecteur x de E sur D est de la forme λv pour un réel λ . En écrivant que $\langle x - \lambda v, v \rangle = 0$, on obtient $\lambda = \frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|^2}$, d'où :

$$x_D = \frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|^2} v.$$

Le projeté orthogonal de x sur H est donc :

$$x_H = x - x_D = x - \frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|^2} v.$$

L'image de x par la réflexion s_H d'hyperplan H est donc

$$s_H(x) = 2x_H - x = x - 2 \frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|^2} v.$$

Si X (resp. X' , V) est la matrice colonne des composantes de x (resp. $s_H(x)$, v) dans une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$, cette relation s'écrit

$$X' = X - \frac{2}{{}^t V V} {}^t V X V.$$

La matrice dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ de la réflexion s_H est donc $I_n - \frac{2}{{}^t V V} V {}^t V$, où I_n est la matrice identité d'ordre $n = \dim(E)$.

Ces matrices jouent un rôle important en analyse numérique, où elles sont appelées *matrices de Householder*.

1.1.3 Matrices orthogonales

Définition 9. Une matrice réelle A carrée d'ordre n est dite orthogonale si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1. ${}^t A A = I_n$;
2. $A {}^t A = I_n$;
3. A est inversible et $A^{-1} = {}^t A$.

Interprétation : La propriété 1 (resp. 2) signifie que les vecteurs colonnes (resp. lignes) de la matrice A constituent un système orthonormé pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Ainsi une matrice est orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes (resp. ses vecteurs lignes) constituent une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique.

Autrement dit, une matrice est orthogonale si et seulement si c'est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Plus généralement :

Proposition 9. Soit E un espace vectoriel euclidien et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Une base $(v_1, \dots, v_n)$ de E est orthonormée si et seulement si la matrice de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ à la base $(v_1, \dots, v_n)$ est orthogonale.

Proposition 10. La transposée et l'inverse d'une matrice orthogonale sont des matrices orthogonales.

Démonstration : La proposition découle immédiatement de la définition et de la relation $({}^t A)^{-1} = {}^t (A^{-1})$. $\square$

Proposition 11. Toute matrice orthogonale a un déterminant égal à ± 1 .

Démonstration : En utilisant la relation ${}^tAA = I_n$, on obtient

$$\det({}^tAA) = \det({}^tA)\det(A) = \det(A)^2 = \det(I_n) = 1$$

d'où $\det(A) = \pm 1$. □

Attention : la réciproque est fautive : une matrice de déterminant ± 1 n'est pas nécessairement orthogonale.

Groupe orthogonal

Proposition 12. *L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n constitue un sous-groupe du groupe multiplicatif $GL(n, \mathbb{R})$ des matrices réelles carrées inversibles d'ordre n . Ce sous-groupe est appelé groupe orthogonal d'ordre n et noté $O(n)$.*

Démonstration : Cet ensemble n'est pas vide, puisqu'il contient la matrice identité, il est stable par passage à l'inverse (proposition 10) et par produit, puisque si A et B sont orthogonales d'ordre n , alors ${}^t(AB)AB = {}^tB {}^tAAB = {}^tBI_nB = I_n$. □

Proposition 13. *L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n de déterminant $+1$ constitue un sous-groupe distingué du groupe orthogonal d'ordre n . Ce groupe est appelé groupe spécial orthogonal d'ordre n et noté $SO(n)$ ou $O^+(n)$.*

Démonstration : Cet ensemble est le noyau de l'homomorphisme de groupes de $O(n)$ dans $\{+1, -1\}$ qui à toute matrice orthogonale associe son déterminant. □

L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n de déterminant -1 est noté $O^-(n)$. Ce n'est pas un sous-groupe de $O(n)$ puisque le produit de deux matrices de $O^-(n)$ appartient à $O^+(n)$.

Orientation d'un espace vectoriel euclidien, produit mixte

Rappels : orientation d'un espace vectoriel réel

Pour tout espace vectoriel réel E de dimension finie, on définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur l'ensemble des bases de E de la façon suivante : deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E sont en relation par $\mathcal{R}$ si et seulement si le déterminant de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est strictement positif. On montre que cette relation est une relation d'équivalence qui divise l'ensemble des bases de E en exactement deux classes. *Orienter E* consiste à choisir l'une de ces classes : toutes les bases qui lui appartiennent sont dites *directes*, les autres *indirectes*. Deux bases en relation par $\mathcal{R}$ sont dites de même sens.

Dans le cas d'un espace vectoriel euclidien, deux bases orthonormées sont de même sens si et seulement si la matrice de passage de l'une à l'autre est de déterminant $+1$.

Rappels : déterminant d'une famille de vecteurs

Le déterminant $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$ d'une famille $(v_1, \dots, v_n)$ de n vecteurs relativement à une base $\mathcal{B}$ d'un espace vectoriel E de dimension n est par définition le déterminant

de la matrice carrée d'ordre n dont les colonnes sont les coordonnées de ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}$. Ce déterminant dépend de la base $\mathcal{B}$. Plus précisément, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E , les déterminants d'une famille de n vecteurs de E relativement à ces deux bases sont reliés par la relation :

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) = \det(P) \det_{\mathcal{B}'}(v_1, \dots, v_n)$$

où P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Si E est un espace vectoriel euclidien de dimension n , le déterminant dans deux bases orthonormées de même sens d'une famille de n vecteurs est le même, puisque la matrice de passage de l'une de ces bases à l'autre est orthogonale de déterminant $+1$. C'est ce qui permet de donner la définition suivante :

Définition 10. Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n . On appelle produit mixte d'une famille $(v_1, \dots, v_n)$ de n vecteurs de E le déterminant de $(v_1, \dots, v_n)$ dans une base orthonormée directe. Ce réel ne dépend pas du choix d'une telle base et on le notera simplement $\det(v_1, \dots, v_n)$.

Remarque : Sans avoir à supposer l'espace vectoriel euclidien E orienté, on remarque que la valeur absolue du déterminant de n vecteurs est la même dans toute base orthonormée de E . Cette valeur absolue ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont écrits ces vecteurs et représente, en dimension 2, l'aire du parallélogramme construit sur les 2 vecteurs, en dimension 3, le volume du parallélépipède construit sur les 3 vecteurs.

1.1.4 Groupe orthogonal, angles

Proposition 14. Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel euclidien E dans lui-même. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f conserve le produit scalaire : $\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ pour tout couple $(u, v) \in E \times E$;
2. f conserve la norme : $\|f(u)\| = \|u\|$ pour tout $u \in E$;
3. l'image par f de toute base orthonormée de E est une base orthonormée ;
4. il existe une base orthonormée de E dont l'image par f est une base orthonormée ;
5. il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est orthogonale ;
6. la matrice de f dans toute base orthonormée de E est orthogonale.

Définition 11. Une application linéaire de E dans E vérifiant ces propriétés équivalentes est appelée transformation orthogonale ou automorphisme orthogonal de E .

Démonstration : L'équivalence de 4 et 5, de même que celle de 6 et 3, provient de la proposition 9, l'implication $1 \Rightarrow 3$ de la définition d'une transformation orthogonale, l'implication $4 \Rightarrow 1$ de l'expression du produit scalaire dans une base orthonormale, les

implications $1 \Rightarrow 2$ et $3 \Rightarrow 4$ sont triviales. Il reste à montrer l'implication $2 \Rightarrow 1$. Si f est linéaire et conserve les normes, alors

$$\begin{aligned}\langle f(u), f(v) \rangle &= \frac{1}{2} [\|f(u) + f(v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2] \\ &= \frac{1}{2} [\|f(u + v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2] \\ &= \frac{1}{2} [\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2] \\ &= \langle u, v \rangle\end{aligned}$$

pour tout couple (u, v) . □

Il résulte de la proposition suivante que toute application d'un espace vectoriel euclidien dans lui-même qui conserve le produit scalaire est une transformation orthogonale (mais une application qui conserve seulement la norme n'est pas nécessairement linéaire) :

Proposition 15. *Soit E un espace vectoriel euclidien et f une application de E dans E qui conserve le produit scalaire : $\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ pour tout couple (u, v) de vecteurs de E . Alors f est linéaire.*

Démonstration : La conservation du produit scalaire entraîne :

$$\begin{aligned}\|f(\lambda u + \mu v) - \lambda f(u) - \mu f(v)\|^2 &= \|f(\lambda u + \mu v)\|^2 + \lambda^2 \|f(u)\|^2 + \mu^2 \|f(v)\|^2 \\ &\quad - 2\lambda \langle f(\lambda u + \mu v), f(u) \rangle - 2\mu \langle f(\lambda u + \mu v), f(v) \rangle + 2\lambda\mu \langle f(u), f(v) \rangle \\ &= \|\lambda u + \mu v\|^2 + \lambda^2 \|u\|^2 + \mu^2 \|v\|^2 \\ &\quad - 2\lambda \langle \lambda u + \mu v, u \rangle - 2\mu \langle \lambda u + \mu v, v \rangle + 2\lambda\mu \langle u, v \rangle \\ &= \|(\lambda u + \mu v) - \lambda u - \mu v\|^2 \\ &= 0,\end{aligned}$$

d'où $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$ pour tout couple (λ, μ) de réels et tout couple (u, v) de vecteurs de E . □

Exemple : les symétries orthogonales

Proposition 16. *Une symétrie vectorielle est une transformation orthogonale si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.*

Démonstration : Soit s la symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel F dans la direction du sous-espace vectoriel G . Si s est une transformation orthogonale, elle conserve le produit scalaire, d'où, pour tout vecteur u de F et tout vecteur v de G

$$\langle u, v \rangle = \langle s(u), s(v) \rangle = \langle u, -v \rangle = -\langle u, v \rangle$$

d'où $\langle u, v \rangle = 0$, ce qui montre que F et G sont orthogonaux.

Réciproquement, si $G = F^\perp$, tout vecteur x s'écrit $x = u + v$, avec $u \in F$ et $v \in G$, et $s(x) = u - v$, d'où $\|s(x)\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 = \|x\|^2$, puisque $\langle u, v \rangle = 0$, ce qui montre que s est une transformation orthogonale. $\square$

Groupe orthogonal

Proposition 17. *L'ensemble des automorphismes orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien E est un sous-groupe (pour la composition) du groupe linéaire de E (groupe des applications linéaires bijectives de E sur E , noté $GL(E)$). Ce sous-groupe est appelé groupe orthogonal de E et noté $O(E)$.*

L'ensemble des automorphismes orthogonaux de déterminant $+1$ de E est un sous-groupe de $O(E)$, appelé groupe spécial orthogonal de E , et noté $SO(E)$ ou $O^+(E)$.

Rappel : Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n . L'application qui à toute application linéaire bijective de E dans E associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est un isomorphisme du groupe $GL(E)$ sur le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles carrées d'ordre n . La restriction de cet isomorphisme à $O(E)$ est un isomorphisme de $O(E)$ sur le groupe $O(n)$ des matrices orthogonales d'ordre n .

Le groupe orthogonal en dimension 2

Dans cette partie, E est un plan vectoriel euclidien orienté.

Proposition 18. *Toute matrice orthogonale A d'ordre 2 est de l'une des deux formes suivantes :*

$$\begin{aligned} & - \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels vérifiant } a^2 + b^2 = 1 \text{ si } \det(A) = +1 ; \\ & - \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels vérifiant } a^2 + b^2 = 1 \text{ si } \det(A) = -1. \end{aligned}$$

Proposition 19. *L'application qui à un réel θ associe la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ est un homomorphisme surjectif du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe multiplicatif $SO(2)$. Son noyau est le sous-groupe $2\pi\mathbb{Z}$ des multiples entiers de 2π . Il en résulte que $SO(2)$ est isomorphe au groupe additif $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ des réels modulo 2π .*

Démonstration : La proposition découle immédiatement des formules d'addition des fonctions trigonométriques :

$$R_\theta R_{\theta'} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' \\ \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} = R_{\theta + \theta'} .$$

$\square$

Un élément de $O^+(E)$ est appelé *rotation vectorielle*.

Corollaire 2. *Le groupe $O^+(E)$ des rotations vectorielles planes est commutatif, isomorphe au groupe additif $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ des réels modulo 2π .*

Corollaire 3. *La matrice d'une rotation vectorielle est la même dans toute base orthonormée directe.*

Démonstration : Cela découle immédiatement de la commutativité de $SO(2)$; en effet si une rotation vectorielle a pour matrice $A \in SO(2)$ dans une base orthonormée directe, sa matrice dans une autre base orthonormée directe sera de la forme $P^{-1}AP$, où la matrice de passage P appartient aussi à $SO(2)$; comme $SO(2)$ est abélien, on a $P^{-1}AP = A$. $\square$

Il en résulte que l'isomorphisme du corollaire 2 ne dépend pas du choix d'une base orthonormée directe.

Remarque : La rotation de matrice R_θ dans une base orthonormée directe a pour matrice $R_{-\theta}$ dans une base orthonormée indirecte. Changer l'orientation du plan revient donc à changer le signe de θ .

Proposition 20. *Tout élément de $O^-(E)$ est une réflexion vectorielle (symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle).*

Démonstration : Le polynôme caractéristique d'une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ est $X^2 - 1$, cette matrice est donc semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ce qui montre que toute transformation orthogonale négative du plan est une symétrie par rapport à une droite. Cette symétrie est une symétrie orthogonale d'après la proposition 16. $\square$

Proposition 21. *Pour tout couple (u, v) de vecteurs unitaires de E , il existe une rotation vectorielle r et une seule transformant le premier en le second, i.e. telle que $r(u) = v$.*

Démonstration : On complète u en une base orthonormée directe (u, u_1) de E . Dans cette base, v s'écrit $v = au + bu_1$, où a et b sont deux réels vérifiant $a^2 + b^2 = 1$. Une rotation vectorielle r vérifie $r(u) = v$ si et seulement si la première colonne de sa matrice dans cette base a pour coefficients a et b ; or il existe une et une seule matrice de $SO(2)$ ayant cette propriété. $\square$

Angles

On se propose dans cette partie de définir les principales notions d'angles utilisées en géométrie plane. La notion première sera celle d'*angle orienté de vecteurs* ou, ce qui revient au même, d'angle orienté de demi-droites vectorielles. En effet l'angle de deux vecteurs non nuls u et v sera, par définition, l'angle des deux vecteurs unitaires $\frac{u}{\|u\|}$ et

$\frac{v}{\|v\|}$ qui leur sont directement proportionnels ; or toute demi-droite vectorielle possède un vecteur directeur unitaire et un seul, et tout vecteur non nul définit une demi-droite vectorielle de manière unique. L'angle de deux vecteurs non nuls u et v , ou l'angle des deux demi-droites vectorielles $\mathbb{R}_+u$ et $\mathbb{R}_+v$ qu'ils engendrent, sera donc simplement l'angle des vecteurs unitaires $\frac{u}{\|u\|}$ et $\frac{v}{\|v\|}$. Dans toute la suite, nous ne considérerons donc essentiellement que des vecteurs *unitaires*.

Deux approches sont proposées : la première, rapide et concrète, consiste à identifier un angle et sa mesure, c'est-à-dire à considérer un angle orienté de vecteurs comme une classe d'équivalence de réels modulo 2π ; la seconde, plus abstraite, définit un angle comme une classe d'équivalence de couples de vecteurs et permet de distinguer l'angle de sa mesure (qui dépend de l'orientation du plan, alors que l'angle lui-même n'en dépend pas). Les deux approches reposent sur la même idée : *l'angle de deux vecteurs est l'angle de l'unique rotation qui transforme le premier en le second* (l'existence et l'unicité de cette rotation sont assurées par la proposition 21).

Une remarque sur la terminologie : dans l'expression « angle orienté de vecteurs », « orienté » ne se réfère pas à l'orientation du plan, mais à l'ordre dans lequel sont écrits les vecteurs (l'angle $\widehat{(v, u)}$ est l'opposé de l'angle $\widehat{(u, v)}$). On verra par contre que cet ordre est indifférent quand on parle d'angles géométriques.

Angles : première approche

Angles orientés de vecteurs

Soient u et v deux vecteurs unitaires du plan vectoriel euclidien orienté E . Il existe une et une seule rotation vectorielle r_θ transformant u en v . La matrice de cette rotation est la même dans toute base orthonormée directe et s'écrit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, où

le réel θ est uniquement déterminé modulo 2π . On définit alors l'*angle orienté* $\widehat{(u, v)}$ des deux vecteurs comme la classe $\bar{\theta}$ de θ dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On dira, pour abréger, qu'un angle orienté de deux vecteurs est un réel défini modulo 2π , et on appellera *mesure principale* de cet angle l'unique représentant de cette classe dans $] -\pi, +\pi]$. Au niveau des notations, on ne distinguera plus un réel θ de sa classe $\bar{\theta}$ modulo 2π .

Remarque : la matrice de cette même rotation dans toute base orthonormée indirecte est $R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Changer l'orientation du plan change donc les angles en leurs opposés.

Angles particuliers : Pour tout vecteur u , l'angle $\widehat{(u, u)}$ est l'angle nul et l'angle $\widehat{(u, -u)}$ est l'*angle plat*, de mesure principale π . Si u et v sont deux vecteurs orthogonaux, l'angle $\widehat{(u, v)}$ est un *angle droit*, de mesure principale $\pi/2$ ou $-\pi/2$.

Proposition 22. Relation de Chasles pour les angles

Pour tout triplet (u, v, w) de vecteurs non nuls, on a :

$$\widehat{(u, v)} + \widehat{(v, w)} = \widehat{(u, w)}.$$

En particulier, les angles $\widehat{(u, v)}$ et $\widehat{(v, u)}$ sont opposés.

Démonstration : Si $r_\theta(u) = v$ et $r_{\theta'}(v) = w$, alors $w = r_{\theta'} \circ r_\theta(u)$. La relation de Chasles découle alors immédiatement de l'égalité $R_{\theta'} R_\theta = R_{\theta+\theta'}$, $\square$

Proposition 23. Action des transformations orthogonales sur les angles

1) Toute rotation vectorielle r conserve les angles orientés de vecteurs : $(r(\widehat{u}), r(\widehat{v})) = \widehat{(u, v)}$ pour tout couple (u, v) de vecteurs non nuls.

2) Toute réflexion vectorielle s transforme les angles orientés de vecteurs en leurs opposés : $(s(\widehat{u}), s(\widehat{v})) = -\widehat{(u, v)}$ pour tout couple (u, v) de vecteurs non nuls.

Démonstration :

La première propriété résulte immédiatement de la commutativité du groupe $O^+(E)$: en effet, l'unique rotation r_1 qui transforme u en v transforme aussi $r(u)$ en $r(v)$, puisque $r_1(r(u)) = r(r_1(u)) = r(v)$.

Pour démontrer la seconde, il suffit de remarquer que si r est une rotation et s une réflexion, alors $s \circ r$ est une réflexion, d'où $r^{-1} \circ s = (s \circ r)^{-1} = s \circ r$. Il en résulte que si $v = r(u)$, alors $s(v) = r^{-1}(s(u))$. $\square$

Angles orientés de droites

Une droite vectorielle a deux vecteurs directeurs unitaires et ces vecteurs sont opposés. Pour définir l'angle orienté de deux droites vectorielles, on a donc a priori le choix entre quatre angles de vecteurs : $\widehat{(u, v)}$, $\widehat{(-u, v)}$, $\widehat{(u, -v)}$ et $\widehat{(-u, -v)}$ (en fait deux, puisque $\widehat{(u, v)} = \widehat{(-u, -v)}$ et $\widehat{(u, -v)} = \widehat{(-u, v)}$). Il faut identifier ces deux angles, qui diffèrent d'un angle plat : l'angle orienté de deux droites est donc un réel défini modulo π , i.e. un élément de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$. La relation de Chasles est encore vraie pour les angles orientés de droites, qui sont également conservés par toute rotation et transformés en leurs opposés par les réflexions.

Angles géométriques

L'angle géométrique de deux vecteurs u et v est simplement la valeur absolue de la mesure principale de $\widehat{(u, v)}$. C'est donc un réel compris entre 0 et π , et ce réel ne dépend pas de l'ordre des deux vecteurs. De plus toute transformation orthogonale (directe ou indirecte) conserve les angles géométriques. Par contre, la relation de Chasles n'est plus toujours vraie pour les angles géométriques.

En particulier, l'angle géométrique de deux vecteurs unitaires u et v est égal à $\arccos(\langle u, v \rangle)$.

Bissectrices

Pour tout couple de vecteurs unitaires u et v , il existe une et une seule réflexion vectorielle s qui échange u et v . Son axe est une droite vectorielle appelée *bissectrice* du couple (u, v) (ou du couple de demi-droites vectorielles engendrées respectivement par u et v), dirigée par le vecteur $u + v$ si u et v ne sont pas opposés. Un vecteur directeur unitaire w de cet axe vérifie $\widehat{(u, w)} = \widehat{(w, v)}$, ou encore $\widehat{(u, v)} = 2\widehat{(u, w)}$ et cette relation détermine w uniquement modulo π .

Pour tout couple (D_1, D_2) de droites vectorielles, il existe exactement deux réflexions vectorielles les échangeant. Les axes de ces réflexions sont des droites vectorielles orthogonales, qui sont appelées *bissectrices* du couple de droites.

Composée de deux réflexions vectorielles

Proposition 24. Soient s_1 et s_2 deux réflexions vectorielles, d'axes respectifs D_1 et D_2 . Le composé $s_2 \circ s_1$ de ces deux réflexions est la rotation vectorielle d'angle $2\widehat{(D_1, D_2)}$ (l'angle de droites (D_1, D_2) est seulement déterminé modulo π , mais $2\widehat{(D_1, D_2)}$ est bien défini modulo 2π : c'est un angle orienté de vecteurs).

Démonstration : Soient u_1 et u_2 des vecteurs directeurs unitaires de D_1 et D_2 . Le composé $s_2 \circ s_1$ des deux réflexions s_1 et s_2 est une rotation vectorielle d'angle

$$(u_1, s_2 \circ s_1(u_1)) = (u_1, s_2(u_1)) = \widehat{(u_1, u_2)} + (u_2, s_2(u_1)) .$$

Mais d'après la proposition 23, on a :

$$(u_2, s_2(u_1)) = (s_2(u_2), s_2(u_1)) = -\widehat{(u_2, u_1)} = \widehat{(u_1, u_2)} .$$

L'angle de $s_2 \circ s_1$ est donc $2\widehat{(u_1, u_2)}$. □

Angles : seconde approche

Angles orientés de vecteurs

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des vecteurs unitaires de E . L'idée est la même que précédemment : on voudrait que l'angle $\widehat{(u_1, v_1)}$ soit égal à l'angle $\widehat{(u_2, v_2)}$ si c'est la même rotation qui transforme, pour chacun de ces couples, le premier vecteur en le second. La procédure standard pour cela est de définir une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ des couples de vecteurs unitaires de E :

Proposition 25. La relation $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ des couples de vecteurs unitaires de E par :

$$(u_1, v_1) \mathcal{R} (u_2, v_2) \text{ si et seulement si } \text{il existe } r \in O^+(E) \text{ vérifiant } r(u_1) = v_1 \text{ et } r(u_2) = v_2 \quad (*)$$

est une relation d'équivalence.

On a vu (proposition 21) qu'il existe toujours une rotation r_1 et une seule vérifiant $r_1(u_1) = v_1$ et une rotation r_2 et une seule vérifiant $r_2(u_2) = v_2$; la relation $(*)$ signifie que les couples (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont en relation si et seulement si $r_1 = r_2$.

Remarques :

1) Cette relation est tout à fait analogue à celle qui définit l'équipollence de bipoints : si on veut définir les vecteurs à partir des points, on dit que deux couples (A, B) et (A', B') de points sont équipollents si c'est la même translation qui transforme A en B et A' en B' .

2) On montre facilement, en utilisant la commutativité de $O^+(E)$, que la relation $(*)$ équivaut encore à :

$$\text{il existe } r_1 \in O^+(E) \text{ vérifiant } r_1(u_1) = u_2 \text{ et } r_1(v_1) = v_2 \quad (**).$$

Définition 12. On appelle angle de deux vecteurs unitaires u et v , et on note $\widehat{(u, v)}$ la classe d'équivalence du couple (u, v) pour la relation $\mathcal{R}$.

On a donc bien $\widehat{(u_1, v_1)} = \widehat{(u_2, v_2)}$ si et seulement si $(*)$ (ou $(**)$) est vérifiée.

On a défini les angles. On voudrait maintenant définir une addition sur l'ensemble $\mathcal{A}$ des angles. Il suffit pour cela de transporter sur $\mathcal{A}$ la loi de composition naturelle sur $O^+(E)$. L'ensemble $\mathcal{A}$ est en effet en bijection naturelle avec $O^+(E)$:

Proposition 26. L'application qui à une rotation $r \in O^+(E)$ associe l'angle $\widehat{(u, r(u))}$ ne dépend pas du choix du vecteur unitaire $u \in \mathcal{U}$. C'est une bijection de $O^+(E)$ sur $\mathcal{A}$, et la bijection réciproque associe à un angle $\widehat{(u, v)}$ l'unique rotation r vérifiant $v = r(u)$ (cette rotation ne dépend pas du représentant choisi pour l'angle).

Définition 13. La somme $\widehat{(u_1, v_1)} + \widehat{(u_2, v_2)}$ de deux angles est l'angle $\widehat{(u, r_2 \circ r_1(u))}$, où r_i ($i = 1, 2$) est l'unique rotation de E vérifiant $r_i(u_i) = v_i$.

On vérifie immédiatement que $\mathcal{A}$ muni de cette addition est un groupe abélien isomorphe à $O^+(E)$ (on a tout fait pour cela). On récupère de plus immédiatement la relation de Chasles :

Proposition 27. Pour tout triplet (u, v, w) de vecteurs unitaires de E , on a :

$$\widehat{(u, v)} + \widehat{(v, w)} = \widehat{(u, w)}.$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que si $r_1(u) = v$ et $r_2(v) = w$, alors $r_2 \circ r_1(u) = w$.
□

Angles particuliers

L'angle nul est bien sûr l'élément neutre du groupe $(\mathcal{A}, +)$ des angles de vecteurs ; c'est l'angle $\widehat{(u, u)}$ pour tout vecteur unitaire u ; il correspond, dans l'isomorphisme

précédent, à la rotation identité id_E . Un autre angle remarquable est l'angle plat ϖ qui est l'angle $\widehat{(u, -u)} = \widehat{(-u, u)}$ pour tout vecteur unitaire u ; il correspond à la rotation vectorielle $-id_E$; c'est l'unique élément d'ordre 2 du groupe $(\mathcal{A}, +)$: $\varpi + \varpi = 0$. Le groupe $\mathcal{A}$ possède en outre deux éléments d'ordre 4, qui sont les angles droits : ce sont les angles $\widehat{(u, v)}$ et $\widehat{(u, -v)}$ où (u, v) est une base orthonormée quelconque de E .

Angles géométriques

Un angle géométrique doit être invariant par toute transformation orthogonale (et non plus simplement par les seules rotations). On identifie donc cette fois deux couples de vecteurs unitaires s'il existe une transformation orthogonale f qui transforme le premier en le second : (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont équivalents si et seulement si il existe $f \in O(E)$ vérifiant $f(u_1) = u_2$ et $f(v_1) = v_2$. Cela revient à quotienter $\mathcal{A}$ par la relation d'équivalence pour laquelle deux angles sont équivalents s'ils sont égaux ou opposés.

Angles orientés de droites

La manière naturelle de définir l'angle de deux droites vectorielles D_1 et D_2 est de prendre un vecteur directeur unitaire u_i sur chacune de ces droites et de définir $\widehat{(D_1, D_2)}$ comme étant $\widehat{(u_1, u_2)}$. Comme une droite vectorielle possède deux vecteurs directeurs unitaires opposés, on obtient ainsi a priori quatre valeurs, qui se réduisent en fait à deux, puisque $\widehat{(-u_1, -u_2)} = \widehat{(u_1, u_2)}$ et $\widehat{(-u_1, u_2)} = \widehat{(u_1, -u_2)}$. Il faut donc identifier ces deux valeurs, ce qui se fait, ici encore, au moyen d'une relation d'équivalence. Cette relation consiste à identifier les angles $\widehat{(u_1, u_2)}$ et $\widehat{(u_1, -u_2)}$, ou encore un angle α et l'angle $\alpha + \varpi$: deux angles sont donc en relation si et seulement si leur différence est 0 ou ϖ . L'addition des angles est compatible avec cette relation, ce qui permet de définir sur l'ensemble quotient $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ par cette relation d'équivalence une addition qui fait de $(\mathcal{A}', +)$ un groupe abélien, appelé *groupe des angles de droites*. Ce groupe n'est bien entendu rien d'autre que le groupe quotient du groupe abélien $(\mathcal{A}, +)$ par son seul sous-groupe à deux éléments, constitué de l'angle nul et de l'angle plat. Il comporte lui-même un seul élément d'ordre 2, l'angle droit, qui est la classe des deux angles droits de vecteurs.

Mesure des angles

Rien de ce que nous avons fait jusqu'ici ne fait appel à l'orientation de E : on peut parfaitement définir les angles et écrire, par exemple, la relation de Chasles, sans avoir orienté le plan, et sans rien connaître non plus des fonctions trigonométriques. Par contre, dès qu'on veut *mesurer* les angles, l'orientation du plan joue un rôle essentiel. L'introduction de cette mesure des angles nécessite des outils d'analyse : il faut connaître les fonctions cos et sin et leurs propriétés, ou, ce qui revient essentiellement au même, la fonction $t \mapsto e^{it}$ d'une variable réelle t , en particulier le fait que cette fonction définit un homomorphisme du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe multiplicatif $(U, \times)$ des nombres complexes de module 1, dont le noyau est le sous-groupe $2\pi\mathbb{Z}$. On en déduit un isomorphisme naturel du groupe quotient $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ sur $(U, \times)$, et donc

sur le groupe $SO(2)$ des matrices orthogonales positives d'ordre 2 : cet isomorphisme associe à la classe du réel θ la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Or le choix d'une orientation du plan permet d'identifier une rotation vectorielle r et une matrice de $SO(2)$: on associe simplement à r sa matrice dans n'importe quelle base orthonormée directe (il faut se souvenir que cette matrice ne dépend pas du choix d'une telle base). On obtient ainsi, par composition, un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ sur le groupe $(\mathcal{A}, +)$ des angles de vecteurs, ce qui permet d'identifier un angle et sa mesure, qui est, par définition, l'élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ qui lui correspond par cet isomorphisme. On retombe ainsi sur la définition adoptée dans la première approche de la notion d'angle orienté de vecteurs.

Cette mesure dépend de l'orientation : en effet, si une rotation vectorielle r a comme matrice R_θ dans une base orthonormée directe, la matrice de r dans une base orthonormée indirecte est $R_{-\theta}$. Autrement dit, si un angle a pour mesure θ dans le plan orienté, et si on change l'orientation du plan, la mesure de l'angle devient $-\theta$.

Si on veut mesurer les angles de droites, il faut factoriser l'homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathcal{A}', +)$ des angles de droites, de noyau $\pi\mathbb{Z}$, ce qui revient à identifier des réels différant d'un multiple entier de π . La mesure d'un angle de droites est donc la classe d'équivalence d'un réel modulo π (cette mesure dépend, là encore, du choix d'une orientation).

Angles dans l'espace

On ne peut, dans l'espace vectoriel euclidien de dimension 3, même orienté, définir la mesure d'un angle orienté de deux vecteurs, ou de deux droites. En effet l'orientation de l'espace n'induit pas d'orientation naturelle sur un plan de cet espace : on ne peut donc distinguer entre un angle et son opposé (par contre, la mesure de l'angle d'une rotation est bien définie, à condition d'avoir orienté l'axe de cette rotation : en effet une orientation de l'axe par le choix d'un vecteur directeur unitaire u induit automatiquement une orientation du plan vectoriel orthogonal à cet axe (une base orthonormée (v, w) de ce plan est directe si la base (u, v, w) de l'espace est directe)). La notion la plus utile est donc ici celle d'angle géométrique de deux vecteurs unitaires, la mesure de l'angle de deux tels vecteurs u et v étant ici encore $\arccos(\langle u, v \rangle)$. Il n'y a bien entendu plus non plus de relation de Chasles pour ces angles.

Groupe orthogonal en dimension 3

Dans cette partie, E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

Proposition 28. *Toute transformation orthogonale f de E de déterminant $+1$ admet la valeur propre $+1$. L'espace propre associé est, si f n'est pas l'identité, une droite vectorielle D . Le plan vectoriel P orthogonal à D est stable par f et la restriction de f à ce plan est une rotation vectorielle de P . La matrice de f dans toute base orthonormée*

de E dont le premier vecteur u appartient à D s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ pour un réel θ , unique modulo 2π .

On dit alors que f est la *rotation vectorielle d'axe D* (orienté par le choix du vecteur unitaire u) et d'angle θ .

Démonstration : Soit A la matrice de f dans une base orthonormée directe de E . De la relation

$${}^tA(A - I) = {}^tAA - {}^tA = I - {}^tA = {}^t(I - A)$$

on déduit

$$\det(A - I) = \det({}^tA)\det(A - I) = \det({}^tA(A - I)) = \det(I - A) = -\det(A - I)$$

d'où $\det(A - I) = 0$, ce qui montre que 1 est valeur propre de A . Soit u un vecteur propre unitaire de f associé à la valeur propre 1, i.e. un vecteur unitaire fixe par f . On vérifie que la matrice de f dans toute base orthonormée directe de E dont le premier vecteur est u s'écrit alors sous la forme indiquée dans l'énoncé. La proposition en résulte. $\square$

Si on change l'orientation de l'axe D en prenant comme vecteur directeur $-u$, l'angle θ est changé en son opposé. La mesure de l'angle d'une rotation de l'espace dépend donc de l'orientation de son axe.

On remarque que l'angle géométrique d'une rotation s'obtient immédiatement à partir de la matrice de cette rotation : en effet, en reprenant les notations de la démonstration précédente, la trace de la matrice A est $1 + 2\cos \theta$; or la trace d'un endomorphisme ne dépend pas de la base (deux matrices semblables ont même trace) ; il en résulte que $1 + 2\cos \theta$ est la trace de la matrice de f dans n'importe quelle base de E (éventuellement non orthonormée).

Pour déterminer le signe de l'angle d'une rotation vectorielle, on peut utiliser la proposition suivante :

Proposition 29. *Si f est une rotation vectorielle qui n'est pas un demi-tour, d'axe orienté par le choix d'un vecteur directeur u , le signe de $\sin \theta$ est celui de $\det(u, v, f(v))$ pour tout vecteur v non colinéaire à u .*

Démonstration : Soit (i, j, k) une base orthonormée directe telle que $i = \frac{u}{\|u\|}$. La

matrice de f dans cette base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Si v a pour composantes (x, y, z)

dans cette base, on a

$$\det(u, v, f(v)) = \begin{vmatrix} \|u\| & x & x \\ 0 & y & y \cos \theta - z \sin \theta \\ 0 & z & y \sin \theta + z \cos \theta \end{vmatrix} = \|u\|(y^2 + z^2) \sin \theta$$

qui est du signe de $\sin \theta$ puisque $y^2 + z^2 > 0$. $\square$

Proposition 30. *Toute transformation orthogonale f de E de déterminant -1 admet la valeur propre -1 . L'espace propre associé est, si f est différente de $-id_E$, une droite vectorielle D . Le plan vectoriel P orthogonal à D est stable par f et la restriction de f à ce plan est une rotation vectorielle de P . Si cette rotation est l'identité de P , f est la réflexion de plan P . Sinon, f est le produit commutatif d'une rotation d'axe D et de la réflexion de plan P . La matrice de f dans toute base orthonormée de E dont le premier vecteur u appartient à D s'écrit dans tous les cas $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ pour un réel θ , unique modulo 2π (f est une réflexion si $\theta \equiv 0$ modulo 2π , $-id_E$ si $\theta \equiv \pi$ modulo 2π).*

Démonstration : Soit A la matrice de f dans une base orthonormée directe de E . De la relation

$${}^tA(A + I) = {}^tAA + {}^tA = I + {}^tA = {}^t(I + A)$$

on déduit

$$-\det(A + I) = \det({}^tA)\det(A + I) = \det({}^tA(A + I)) = \det(I + A)$$

d'où $\det(A + I) = 0$, ce qui montre que -1 est valeur propre de A . Soit u un vecteur propre unitaire de f associé à la valeur propre -1 . On vérifie que la matrice de f dans toute base orthonormée directe de E dont le premier vecteur est u s'écrit alors sous la forme indiquée dans l'énoncé. La proposition en résulte. $\square$

On dit, si f n'est pas une réflexion, que f est une *antirotation*, ou encore une *isométrie vectorielle gauche*.

1.1.5 Dualité

Rappels : espace vectoriel dual

1. On appelle *forme linéaire* sur un espace vectoriel réel E toute application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble des formes linéaires sur un espace vectoriel réel E constitue un espace vectoriel, appelé *espace vectoriel dual* de E et noté E^* .
3. Si E est de dimension finie n et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , on définit, pour tout $i = 1, \dots, n$, une application e_i^* de E dans $\mathbb{R}$ par $e_i^*\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = x_i$. Cette application, appelée *i -ième application coordonnée* dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, est une forme linéaire sur E vérifiant

$$e_i^*(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et la famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* , appelée *base duale* de la base $(e_1, \dots, e_n)$. En particulier, E^* et E ont même dimension : $\dim E^* = \dim E$.

Proposition 31. *Soit E un espace vectoriel euclidien.*

1. *Pour tout vecteur v de E , l'application $l_v : x \mapsto \langle v, x \rangle$ de E dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire sur E .*
2. *L'application $v \mapsto l_v$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de E sur son dual E^* . En particulier, pour toute forme linéaire l sur E , il existe un vecteur v de E , et un seul, tel que $l(x) = l_v(x) = \langle v, x \rangle$ pour tout vecteur x de E .*

Démonstration : La première propriété découle immédiatement de la linéarité du produit scalaire.

Si a et b sont deux réels et v et w deux vecteurs de E , on a, pour tout $x \in E$:

$$l_{av+bw}(x) = \langle av + bw, x \rangle = a\langle v, x \rangle + b\langle w, x \rangle = al_v(x) + bl_w(x)$$

d'où $l_{av+bw} = al_v + bl_w$. L'application $v \mapsto l_v$ de E dans E^* est donc linéaire.

Comme E et E^* ont même dimension, il suffit, pour démontrer que c'est un isomorphisme, de vérifier qu'elle est injective, ou encore que son noyau est réduit au vecteur nul. Mais si l_v est la forme linéaire nulle, on a $l_v(x) = \langle v, x \rangle = 0$ pour tout $x \in E$; en particulier, pour $x = v$, on a $\langle v, v \rangle = \|v\|^2 = 0$, d'où $v = 0$. $\square$

En particulier, pour toute base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de E , la base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est donnée par $e_i^* = l_{e_i}$ pour tout $i = 1, \dots, n$, puisque $e_i^*(x) = \langle e_i, x \rangle$ pour tout vecteur x de E . Plus généralement, toute forme linéaire l sur E est de la forme $l(x) = \sum_{i=1}^n v_i x_i$ pour un n -uplet $(v_1, \dots, v_n)$ de réels, où $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées du vecteur x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, de sorte que $l = l_v$, où $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$.

Produit vectoriel

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n , $(v_1, \dots, v_{n-1})$ une famille de $n - 1$ vecteurs de E . L'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à tout vecteur x associe le produit mixte de la famille $(v_1, \dots, v_{n-1}, x)$ est une forme linéaire sur E . Il existe donc (proposition 31) un vecteur w de E et un seul tel que $\det(v_1, \dots, v_{n-1}, x) = \langle w, x \rangle$ pour tout vecteur x de E . Ce vecteur est appelé *produit vectoriel* de la famille $(v_1, \dots, v_{n-1})$.

Définition 14. *Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n . On appelle produit vectoriel d'une famille $(v_1, \dots, v_{n-1})$ de $n - 1$ vecteurs de E l'unique vecteur $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$ de E vérifiant*

$$\det(v_1, \dots, v_{n-1}, x) = \langle v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1}, x \rangle$$

pour tout vecteur x de E .

En particulier, pour $n = 3$, le produit vectoriel de deux vecteurs u et v d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 est l'unique vecteur $u \wedge v$ vérifiant

$$\det(u, v, x) = \langle u \wedge v, x \rangle$$

pour tout vecteur x de E .

Propriétés

Nous nous intéresserons surtout au cas $n = 3$. C'est pourquoi nous donnerons les propriétés du produit vectoriel dans ce cadre.

Proposition 32. Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

1. Le produit vectoriel est une application bilinéaire alternée, donc antisymétrique, de $E \times E$ dans E : pour tous vecteurs u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 et tous réels a et b :
 - $(au_1 + bu_2) \wedge v = a u_1 \wedge v + b u_2 \wedge v$ (linéarité à gauche)
 - $u \wedge (av_1 + bv_2) = a u \wedge v_1 + b u \wedge v_2$ (linéarité à droite)
 - $u \wedge u = 0$
 - $u \wedge v = -v \wedge u$ (antisymétrie)
2. Le produit vectoriel de deux vecteurs est nul si et seulement si ces deux vecteurs sont colinéaires.
3. Le produit vectoriel de deux vecteurs est orthogonal à chacun de ces vecteurs.
4. Si les vecteurs u et v forment un système libre, $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe de E .
5. Si (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée directe de E , les coordonnées de $u \wedge v$ dans cette base sont $(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$, si u a pour coordonnées (u_1, u_2, u_3) et v (v_1, v_2, v_3) .
6. Pour tout couple (u, v) de vecteurs de E , on a :

$$\|u \wedge v\|^2 + \langle u, v \rangle^2 = \|u\|^2 \|v\|^2.$$

7. Pour tout couple (u, v) de vecteurs de E , on a :

$$\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta$$

où $0 \leq \theta \leq \pi$ est une mesure de l'angle non orienté des vecteurs u et v .

Démonstration : La propriété 1 provient de la linéarité du produit scalaire et des propriétés analogues du déterminant.

Si u et v sont colinéaires, $u \wedge v$ est nul par 1. Si le système (u, v) est libre, on peut le compléter en une base (u, v, w) de E et la relation $0 \neq \det(u, v, w) = \langle u \wedge v, w \rangle$ montre que $u \wedge v$ n'est pas nul.

Les relations $\langle u \wedge v, u \rangle = \det(u, v, u) = 0$ et $\langle u \wedge v, v \rangle = \det(u, v, v) = 0$ montrent que $u \wedge v$ est orthogonal à chacun des deux vecteurs u et v .

La propriété 4 résulte de la relation $\det(u, v, u \wedge v) = \|u \wedge v\|^2 > 0$ si (u, v) est un système libre.

Les composantes de $u \wedge v$ s'obtiennent en développant le déterminant $\det(u, v, x)$ par rapport à sa dernière colonne.

La relation 6 découle de l'identité algébrique :

$$\begin{aligned} (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 + (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \\ = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2). \end{aligned}$$

La relation 7 découle de la précédente et de la relation $\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \theta$. $\square$

Adjoint d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E (i.e. une application linéaire de E dans E). Pour tout vecteur x de E , l'application $y \mapsto \langle x, f(y) \rangle$ de E dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire sur E . Il existe donc un vecteur $f^*(x)$ de E et un seul qui vérifie $\langle x, f(y) \rangle = \langle f^*(x), y \rangle$ pour tout $y \in E$. On vérifie facilement que l'application f^* de E dans E ainsi définie est linéaire. C'est donc un endomorphisme de E , appelé *endomorphisme adjoint* de f .

Définition 15. Soit E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E . On appelle endomorphisme adjoint de f et on note f^* l'unique endomorphisme de E vérifiant

$$\langle x, f(y) \rangle = \langle f^*(x), y \rangle$$

pour tout couple (x, y) de vecteurs de E .

Proposition 33. Propriétés de l'adjoint :

1. L'application de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E dans $\mathcal{L}(E)$ qui à un endomorphisme f associe son adjoint f^* est linéaire et involutive : $(f^*)^* = f$.
2. Si f et g sont deux endomorphismes de E , $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.
3. La matrice de f^* dans toute base orthonormée de E est la transposée de la matrice de f dans cette même base.
4. Le noyau de f^* est l'orthogonal de l'image de f .
5. L'image de f^* est l'orthogonal du noyau de f .
6. Les endomorphismes f et f^* ont même rang.

Démonstration : La linéarité vient de la relation

$$\langle x, (af + bg)(y) \rangle = a\langle x, f(y) \rangle + b\langle x, g(y) \rangle = \langle af^*(x) + bg^*(x), y \rangle$$

où f et g sont deux endomorphismes de E , a et b deux réels, x et y deux vecteurs quelconques de E .

La relation $(f^*)^* = f$ vient de même de

$$\langle x, (f^*)^*(y) \rangle = \langle f^*(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$$

et la relation $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ de

$$\langle x, (f \circ g)(y) \rangle = \langle x, f(g(y)) \rangle = \langle f^*(x), g(y) \rangle = \langle g^*(f^*(x)), y \rangle.$$

La matrice A d'un endomorphisme f dans une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ a pour coefficients

$$a_{i,j} = \langle e_i, f(e_j) \rangle.$$

La matrice B de l'endomorphisme f^* dans cette même base a donc pour coefficients

$$b_{i,j} = \langle e_i, f^*(e_j) \rangle = \langle f(e_i), e_j \rangle = a_{j,i}$$

d'où $B = {}^tA$.

Un vecteur x de E appartient au noyau de f^* si et seulement si $f^*(x) = 0$, i.e. si et seulement si $\langle f^*(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle = 0$ pour tout vecteur y de E , i.e. si et seulement si x est orthogonal à l'image de f .

En remplaçant f par f^* dans la relation $\text{Ker}(f^*) = \text{Im}(f)^\perp$, on obtient $\text{Im}(f^*)^\perp = \text{Ker}((f^*)^*) = \text{Ker}(f)$, d'où $\text{Ker}(f)^\perp = (\text{Im}(f^*)^\perp)^\perp = \text{Im}(f^*)$.

Le rang d'un endomorphisme est la dimension de son image. Mais :

$$\dim(\text{Im}(f^*)) = \dim((\text{Ker}(f))^\perp) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\text{Im}(f)).$$

Les endomorphismes f et f^* ont donc même rang. On retrouve ainsi, dans le cas des matrices réelles carrées, le fait qu'une matrice et sa transposée ont même rang. □

Endomorphismes symétriques

Proposition 34. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$ pour tout couple (x, y) de vecteurs de E ;
- (ii) la matrice de f dans toute base orthonormale de E est symétrique ;
- (iii) il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f est symétrique ;
- (iv) $f = f^*$.

Un endomorphisme vérifiant ces propriétés est dit *symétrique* ou *auto-adjoint*.

Démonstration : L'équivalence de (i) et (iv) vient de la définition de l'adjoint, l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est évidente et les implications (iii) $\Rightarrow$ (iv) et (iv) $\Rightarrow$ (ii) viennent de la proposition 33. □

Proposition 35. *L'ensemble des endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n est un sous-espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ de l'espace des endomorphismes de E .*

Démonstration : La stabilité par combinaisons linéaires de l'ensemble des endomorphismes symétriques vient de la linéarité de l'application $f \mapsto f^*$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E . L'application qui à tout endomorphisme f de E associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ sur $M_n(\mathbb{R})$ qui induit un isomorphisme du sous-espace des endomorphismes symétriques de E sur l'espace des matrices carrées symétriques d'ordre n . Ce dernier est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, puisqu'une matrice symétrique $A = (a_{i,j})$ est déterminée par les coefficients $a_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$. $\square$

Remarque : le composé de deux endomorphismes symétriques f et g n'est en général pas symétrique ; plus précisément, il n'est symétrique que si ces endomorphismes commutent, puisque $(f \circ g)^* = g^* \circ f^* = g \circ f$.

La proposition suivante résulte immédiatement de la proposition 33 :

Proposition 36. *Le noyau et l'image d'un endomorphisme symétrique sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux.*

Exemple : projections et symétries orthogonales

Proposition 37. *Une projection (resp. une symétrie) vectorielle est un endomorphisme symétrique si et seulement si c'est une projection (resp. une symétrie) orthogonale.*

Démonstration : Soit p une projection sur un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel euclidien E dans la direction d'un sous-espace G , s la symétrie par rapport à F dans la direction G . La relation $s = 2p - id_E$ montre que p est symétrique si et seulement si s l'est. Si p est symétrique, son noyau G et son image F sont supplémentaires orthogonaux d'après la proposition 36 : p est donc une projection orthogonale. Réciproquement, si p est une projection orthogonale, F et G sont supplémentaires orthogonaux et

$$\langle p(x), y \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle + \langle p(x), y - p(y) \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle$$

pour tout couple (x, y) de vecteurs de E , puisque $p(x) \in F$ et $y - p(y) \in G$ sont orthogonaux. En échangeant x et y , on obtient de même $\langle p(x), p(y) \rangle = \langle x, p(y) \rangle$, d'où $\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$, ce qui montre que p est un endomorphisme symétrique. $\square$

Formes quadratiques sur un espace vectoriel euclidien

Rappels

Une *forme bilinéaire symétrique* sur un espace vectoriel réel E est une application b de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ linéaire par rapport à chacun de ses arguments et symétrique :

- $b(x, a_1y_1 + a_2y_2) = a_1b(x, y_1) + a_2b(x, y_2)$
- $b(a_1x_1 + a_2x_2, y) = a_1b(x_1, y) + a_2b(x_2, y)$
- $b(x, y) = b(y, x)$

pour tous vecteurs x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 de E et tous réels a, b .

Une application q de E dans $\mathbb{R}$ est une *forme quadratique* sur E s'il existe une forme bilinéaire symétrique b sur E telle que $q(x) = b(x, x)$ pour tout vecteur x de E . La forme bilinéaire symétrique b , appelée *forme polaire* de q , est alors uniquement déterminée, puisque

$$b(x, y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)] = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)].$$

Pour tout endomorphisme symétrique f de E , l'application $b : (x, y) \mapsto \langle x, f(y) \rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique. Réciproquement :

Proposition 38. *Pour toute forme bilinéaire symétrique $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ sur un espace vectoriel euclidien E , il existe un endomorphisme symétrique f de E et un seul tel que $b(x, y) = \langle x, f(y) \rangle$ pour tout couple (x, y) de vecteurs de E .*

Démonstration : Pour tout vecteur x de E , l'application $y \mapsto b(x, y)$ de E dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire sur E . Il en résulte (proposition 31) qu'il existe un vecteur $f(x)$ et un seul tel que $b(x, y) = \langle f(x), y \rangle$ pour tout vecteur y de E . Il résulte de la linéarité en x de b que f est linéaire et de la symétrie de b que f est symétrique. $\square$

Corollaire 4. *Pour toute forme quadratique q sur un espace vectoriel euclidien E , il existe un endomorphisme symétrique f de E et un seul tel que $q(x) = \langle x, f(x) \rangle$ pour tout vecteur x de E .*

Réduction des matrices symétriques réelles

Théorème 1. *Tout endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien est diagonalisable dans une base orthonormale : pour tout endomorphisme symétrique f d'un espace vectoriel euclidien E , il existe une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de f .*

Corollaire 5. *Soit E un espace vectoriel euclidien et b une forme bilinéaire symétrique sur E . Alors il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E orthogonale pour b : $b(e_i, e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$.*

Démonstration : D'après la proposition 38, il existe un endomorphisme symétrique f de E tel que $b(x, y) = \langle x, f(y) \rangle$ pour tout couple (x, y) de vecteurs de E . Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f et λ_i les valeurs propres correspondantes. Alors :

$$b(e_i, e_j) = \langle e_i, f(e_j) \rangle = \langle e_i, \lambda_j e_j \rangle = \lambda_j \langle e_i, e_j \rangle = 0$$

pour tout couple (i, j) tel que $i \neq j$. $\square$

Théorème 2. *Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Plus précisément, pour toute matrice symétrique réelle A , il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle D telles que $A = {}^tP D P$.*

Lemme 2. *Tout endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien admet au moins une valeur propre réelle.*

Démonstration : Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E , q la forme quadratique associée, S la sphère unité de E . La fonction q est continue sur le compact S , elle est donc bornée sur S et atteint son maximum λ en un point x de S . On a $q(z) \leq \lambda = q(x) = \langle x, f(x) \rangle$ pour tout $z \in S$ et donc $q(z) \leq \lambda \|z\|^2$ par homogénéité pour tout $z \in E$, d'où, pour $z = x + ty$:

$$\begin{aligned} \langle x + ty, f(x + ty) \rangle &= \langle x, f(x) \rangle + 2t \langle f(x), y \rangle + t^2 \langle y, f(y) \rangle \\ &\leq \lambda \|x + ty\|^2 \\ &= \lambda + 2\lambda t \langle x, y \rangle + \lambda t^2 \|y\|^2 \end{aligned}$$

soit encore

$$t^2 (\lambda \|y\|^2 - \langle y, f(y) \rangle) + 2t (\lambda \langle x, y \rangle - \langle f(x), y \rangle) \geq 0$$

pour tout $y \in E$ et tout réel t . Ce trinôme du second degré en t atteint son minimum en $t = 0$, sa dérivée est donc nulle en ce point, ce qui s'écrit $\langle f(x), y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ pour tout $y \in E$, ou encore $\langle f(x) - \lambda x, y \rangle = 0$ pour tout $y \in E$, et implique $f(x) = \lambda x$. $\square$

Remarque : on vérifie immédiatement que la valeur propre λ introduite dans cette démonstration est la plus grande valeur propre de f .

Lemme 3. *Soit E un espace vectoriel euclidien, f un endomorphisme symétrique de E , E_λ le sous-espace propre de f associé à une valeur propre λ . Alors l'orthogonal $E_\lambda^\perp$ de E_λ est stable par f .*

Démonstration : Soit $y \in E_\lambda^\perp$. Pour tout $x \in E_\lambda$, on a :

$$\langle f(y), x \rangle = \langle y, f(x) \rangle = \langle y, \lambda x \rangle = \lambda \langle y, x \rangle = 0,$$

d'où $f(y) \in E_\lambda^\perp$. $\square$

Démonstration du théorème 1 : On démontre le théorème par récurrence sur la dimension n de E . Pour $n = 1$, tout vecteur unitaire de E est vecteur propre de tout endomorphisme et constitue une base orthonormée de E . Supposons le théorème vrai pour tout espace vectoriel euclidien de dimension $\leq n - 1$. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et f un endomorphisme symétrique de E . D'après le lemme 2, f admet une valeur propre réelle λ . Soit E_λ l'espace propre associé. D'après le lemme 3, l'orthogonal $E_\lambda^\perp$ de E_λ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $< n$ stable par f . La restriction de f à $E_\lambda^\perp$ est un endomorphisme symétrique de $E_\lambda^\perp$. Par l'hypothèse

de récurrence, il existe une base orthonormée de $E_\lambda^\perp$ constituée de vecteurs propres de f . En la complétant par une base orthonormée de E_λ , on obtient une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f . $\square$

Corollaire 6. *Une matrice réelle symétrique est positive (resp. définie positive) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).*

Démonstration : Soit A une matrice réelle symétrique d'ordre n . D'après le théorème 2, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle D , de coefficients diagonaux les valeurs propres λ_i de A , telles que $A = {}^tPDP$. On a alors, pour tout vecteur colonne X de $\mathbb{R}^n$:

$${}^tXAX = {}^tX {}^tPDPX = {}^tYDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$$

en posant $Y = PX = (y_1, \dots, y_n)$. Le corollaire en résulte immédiatement, en remarquant que X est nulle si et seulement si Y l'est. $\square$

1.2 Espaces affines euclidiens

1.2.1 Distance et orthogonalité

Définition 16. *On appelle espace affine euclidien tout espace affine dont la direction est un espace vectoriel euclidien.*

Dans toute cette section, E désignera un espace affine euclidien de dimension finie (souvent égale à 2 ou 3) de direction $\vec{E}$. Les points de E seront désignés (sauf exception) par des lettres majuscules, les vecteurs de $\vec{E}$ seront toujours notés avec des flèches pour les distinguer des points de E . On notera $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Proposition 39. *Un espace affine euclidien est naturellement muni d'une distance d , appelée distance euclidienne, définie par*

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{\vec{AB} \cdot \vec{AB}}.$$

Cette distance vérifie l'inégalité triangulaire :

$$|AB - AC| \leq BC \leq AB + AC$$

pour tout triplet (A, B, C) de points de E , et on a l'égalité $BC = AB + AC$ si et seulement si A appartient au segment $[BC]$.

Démonstration : Les propriétés $d(A, B) = d(B, A)$ et $d(A, B) = 0$ si et seulement si $A = B$ sont immédiates. L'inégalité triangulaire provient de l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne et de la relation de Chasles $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$. On a égalité dans cette inégalité si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont directement proportionnels, i.e. si et seulement si A appartient au segment $[BC]$. $\square$

Conformément à un usage solidement établi, on notera systématiquement AB la distance $d(A, B)$ de deux points A et B .

Définition 17. *Un repère cartésien $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ d'un espace affine euclidien E est dit orthonormé (ou orthonormal) si la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de $\vec{E}$ est orthonormée.*

Un espace affine euclidien E est dit *orienté* si sa direction $\vec{E}$ est un espace vectoriel euclidien orienté.

Définition 18. *Deux sous-espaces affines sont dits orthogonaux si leurs directions sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux.*

Définition 19. *Soit H un hyperplan d'un espace affine euclidien E . On appelle vecteur normal à H tout vecteur non nul orthogonal à H .*

Proposition 40. *Soit E un espace affine euclidien de dimension n rapporté à un repère orthonormé. L'hyperplan H passant par un point B de coordonnées $(b_1, \dots, b_n)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a_1, \dots, a_n)$ admet l'équation $a_1(x_1 - b_1) + \dots + a_n(x_n - b_n) = 0$.*

Réciproquement si un hyperplan H admet l'équation $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$, alors le vecteur $\vec{n}(a_1, \dots, a_n)$ est un vecteur normal à H .

Démonstration : Pour démontrer la première assertion, il suffit d'écrire qu'un point M de E appartient à H si et seulement si $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$. La seconde vient de ce que deux équations représentent un même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles. $\square$

Dans un plan affine euclidien, deux droites orthogonales sont toujours sécantes. Il n'en va pas de même dans l'espace de dimension 3. Deux droites sont dites *perpendiculaires* si elles sont orthogonales et sécantes.

Proposition 41. *Soient D_1 et D_2 deux droites non parallèles de l'espace affine euclidien de dimension 3. Alors il existe une droite et une seule perpendiculaire à D_1 et à D_2 . Cette droite est appelée perpendiculaire commune à D_1 et D_2 et ses points d'intersection A_1 et A_2 avec D_1 et D_2 pieds de la perpendiculaire commune. La distance A_1A_2 réalise la distance minimale entre un point de D_1 et un point de D_2 :*

$$A_1A_2 = \min\{M_1M_2 \mid M_1 \in D_1, M_2 \in D_2\} = d(D_1, D_2)$$

et ce minimum n'est atteint que pour le couple (A_1, A_2) .

Démonstration : Soient D_1 et D_2 deux droites non parallèles, M_1 (resp. M_2) un point de D_1 (resp. D_2), $\vec{v}_1$ (resp. $\vec{v}_2$) un vecteur directeur de D_1 (resp. D_2). Si une droite Δ est perpendiculaire à D_1 et D_2 , tout vecteur directeur de cette droite est orthogonal à $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, donc colinéaire à $\vec{w} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$, qui n'est pas nul puisque $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaires. La droite Δ est donc incluse dans le plan P_1 passant par M_1 et de vecteurs directeurs $\vec{v}_1$ et $\vec{w}$, puisqu'elle rencontre D_1 . De même, Δ est incluse dans le plan P_2 passant par M_2 et de vecteurs directeurs $\vec{v}_2$ et $\vec{w}$. Ces deux plans ne peuvent être parallèles, sinon le système $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w})$ serait lié, puisque ces trois vecteurs appartiendraient à un même plan vectoriel. Leur intersection est donc une droite et Δ ne peut être que cette droite, ce qui prouve l'unicité de la perpendiculaire commune.

Pour montrer l'existence, il suffit de vérifier que l'intersection Δ des deux plans P_1 et P_2 est perpendiculaire à D_1 et D_2 : elle leur est orthogonale, puisque $\vec{w}$ en est un vecteur directeur, et elle rencontre D_1 , puisqu'elle est coplanaire avec D_1 (ces deux droites sont incluses dans P_1) et non parallèle à D_1 ; elle rencontre D_2 pour des raisons analogues.

Soient A_1 et A_2 les pieds de la perpendiculaire commune. Pour tout point M_1 de D_1 et tout point M_2 de D_2 , on a $\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{M_1 A_1} + \overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 M_2}$ d'après la relation de Chasles. Mais les vecteurs $\overrightarrow{A_1 A_2}$ et $\overrightarrow{M_1 A_1} + \overrightarrow{A_2 M_2}$ étant orthogonaux, on en déduit $M_1 M_2^2 = A_1 A_2^2 + \|\overrightarrow{M_1 A_1} + \overrightarrow{A_2 M_2}\|^2$, d'où $M_1 M_2 \geq A_1 A_2$. L'égalité n'est obtenue que pour $\overrightarrow{M_1 A_1} + \overrightarrow{A_2 M_2} = \vec{0}$; les droites D_1 et D_2 n'étant pas parallèles, cette égalité implique $\overrightarrow{M_1 A_1} = \overrightarrow{A_2 M_2} = \vec{0}$. $\square$

Deux droites parallèles et distinctes de l'espace définissent un plan et admettent une infinité de perpendiculaires communes, toutes parallèles entre elles.

Dans l'espace affine euclidien de dimension 3, une droite et un plan orthogonaux sont toujours sécants (on dit indifféremment que la droite est orthogonale ou perpendiculaire au plan). Deux plans d'un tel espace ne peuvent être orthogonaux : en effet la somme des dimensions de deux sous-espace affines orthogonaux est toujours inférieure ou égale à la dimension de l'espace.

Définition 20. Dans un espace affine euclidien de dimension 3, deux plans sont dits perpendiculaires si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Proposition 42. Deux plans d'un espace affine euclidien de dimension 3 sont perpendiculaires si et seulement si un de ces plans contient une droite orthogonale à l'autre.

Démonstration : Soient P_1 et P_2 deux plans de l'espace, $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ des vecteurs normaux à ces plans. Supposons que P_1 contienne une droite D orthogonale à P_2 . Le vecteur $\vec{n}_2$ est alors un vecteur directeur de D et il est orthogonal à $\vec{n}_1$, puisque D est incluse dans P_1 .

Réciproquement, si $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont orthogonaux, pour tout point M de P_1 , la droite passant par M de vecteur directeur $\vec{n}_2$ est orthogonale à P_2 et incluse dans P_1 . $\square$

Corollaire 7. Soient P_1 et P_2 deux plans de l'espace. Si P_1 contient une droite orthogonale à P_2 , alors P_2 contient une droite orthogonale à P_1 .

Projection orthogonale, problèmes de distances

Définition 21. Soit E un espace affine euclidien et F un sous-espace affine de E . On appelle projection orthogonale sur F la projection sur F dans la direction $\vec{F}^\perp$.

Toute projection orthogonale de E est une application affine dont la partie linéaire est un endomorphisme symétrique de $\vec{E}$. La distance entre deux points de E est toujours supérieure à la distance entre leurs projetés.

Proposition 43. Soit E un espace affine euclidien et F un sous-espace affine de E . Alors pour tout point M de E , le projeté orthogonal H de M sur F est l'unique point de F réalisant la distance de M à F :

$$MH = \min\{MN \mid N \in F\} = d(M, F) .$$

Démonstration : La proposition résulte immédiatement de la relation de Pythagore : $MN^2 = MH^2 + HN^2$ pour tout point N de F , puisque les vecteurs $\vec{MH}$ et $\vec{HN}$ sont orthogonaux. $\square$

Proposition 44. Soit, dans un espace affine euclidien E de dimension n , H un hyperplan défini par un point B et un vecteur normal $\vec{n}$. Alors la distance de M à H est donnée par

$$d(M, H) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{BM}|}{\|\vec{n}\|} .$$

Si E est rapporté à un repère orthonormé et si M a pour coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ et H comme équation $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$, cette distance est donnée par

$$d(M, H) = \frac{|a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} .$$

Démonstration : Soit M' le projeté orthogonal de M sur H . La distance de M à H est égale à MM' et

$$\vec{n} \cdot \vec{BM} = \vec{n} \cdot (\vec{BM'} + \vec{M'M}) = \vec{n} \cdot \vec{M'M}$$

puisque les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{BM'}$ sont orthogonaux. Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{MM'}$ étant colinéaires, on a $|\vec{n} \cdot \vec{M'M}| = \|\vec{n}\| \|\vec{MM'}\|$, d'où le résultat.

Si H a comme équation $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$ dans un repère orthonormé, le vecteur $\vec{n}$ de composantes $(a_1, \dots, a_n)$ est un vecteur normal de H . Si B de coordonnées $(b_1, \dots, b_n)$ est un point de H , on a

$$\vec{n} \cdot \vec{BM} = a_1(x_1 - b_1) + \dots + a_n(x_n - b_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b$$

puisque le point B appartenant à H vérifie $a_1b_1 + \dots + a_nb_n + b = 0$. $\square$

On obtient ainsi la distance d'un point à une droite dans le plan et la distance d'un point à un plan dans l'espace. La distance d'un point à une droite dans l'espace est donnée par la proposition suivante.

Proposition 45. *Soit, dans un espace affine euclidien de dimension 3, D une droite définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{v}$. La distance d'un point M à D est donnée par*

$$d(M, D) = \frac{\|\vec{v} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Démonstration : Soit M' le projeté orthogonal de M sur H . La distance de M à D est égale à MM' et

$$\vec{v} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{v} \wedge (\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'M}) = \vec{v} \wedge \overrightarrow{M'M}$$

puisque les vecteurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{M'M}$ étant orthogonaux, on a $\|\vec{v} \wedge \overrightarrow{M'M}\| = \|\vec{v}\| \|\overrightarrow{M'M}\|$, d'où le résultat. $\square$

Symétrie orthogonale, réflexion, hyperplan médiateur

Définition 22. *Soit E un espace affine euclidien et F un sous-espace affine de E . On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F dans la direction $\vec{F}^\perp$.*

On appelle réflexion toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Une réflexion est donc, dans le plan, une symétrie orthogonale par rapport à une droite et, dans l'espace, une symétrie orthogonale par rapport à un plan.

Proposition 46. *L'ensemble des points d'un espace affine euclidien E équidistants de deux points A et B distincts est l'hyperplan orthogonal à la droite (AB) passant par le milieu I de $[AB]$. Cet hyperplan est appelé hyperplan médiateur de $[AB]$ (médiatrice si $\dim(E) = 2$, plan médiateur si $\dim(E) = 3$).*

Les deux ensembles $\{M \in E \mid MA > MB\}$ et $\{M \in E \mid MA < MB\}$ (resp. $\{M \in E \mid MA \geq MB\}$ et $\{M \in E \mid MA \leq MB\}$) sont les deux demi-espaces ouverts (resp. fermés) délimités par cet hyperplan.

Démonstration : La première partie de la proposition résulte de l'égalité

$$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM}.$$

La seconde partie s'obtient en remplaçant les égalités par des inégalités. $\square$

Proposition 47. *Soient A et B deux points distincts d'un espace affine euclidien E . Il existe alors une réflexion et une seule échangeant ces deux points. Son hyperplan est l'hyperplan médiateur de $[AB]$.*

Démonstration : Soit s une réflexion d'hyperplan H vérifiant $s(A) = B$ (on a alors $s(B) = A$ puisque $s \circ s = id_E$). Comme s est affine, elle laisse fixe le milieu I de $[AB]$, qui appartient donc à H . Par ailleurs, H est orthogonal à la droite (AB) . C'est donc l'hyperplan médiateur de $[AB]$.

Réciproquement, si H est l'hyperplan médiateur de $[AB]$, la droite (AB) est orthogonale à H en I et la symétrie orthogonale par rapport à H échange les points A et B . $\square$

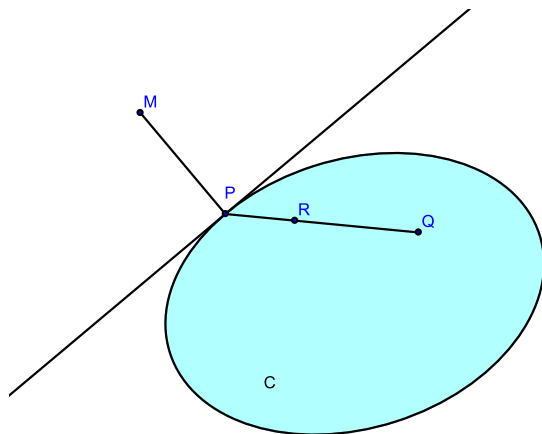
Projection sur un convexe fermé, séparation de convexes

Proposition 48. Soit C un convexe fermé non vide d'un espace affine euclidien E . Pour tout point M de E , il existe un unique point P de C vérifiant $MP = d(M, C) = \inf\{MQ \mid Q \in C\}$.

Ce point P est l'unique point de C vérifiant $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PQ} \leq 0$ pour tout point Q de C .

L'application p qui à M associe P est 1-lipschitzienne : $p(M)p(N) \leq MN$ pour tout couple (M, N) de points de E .

On l'appelle projection sur le convexe C .



Démonstration : Soit M un point de E et A un point de C . L'intersection de C et de la boule fermée de centre M et de rayon MA est un convexe compact de E et la fonction qui à tout point P de E associe la distance MP est continue sur ce compact. Elle y atteint donc son minimum, qui est aussi le minimum de la distance MP pour P dans C .

Supposons que ce minimum d soit atteint en deux points distincts P_1 et P_2 de C . Le milieu I de $[P_1P_2]$ appartiendrait à C , puisque C est convexe, et vérifierait

$$2d^2 = MP_1^2 + MP_2^2 = 2MI^2 + 2IP_1^2$$

par la relation de la médiane, d'où $MI < d$, ce qui contredit l'hypothèse. Le minimum est donc atteint en un point et un seul.

Pour tout point Q de C , le segment $[PQ]$ est inclus dans C , puisque C est convexe. On a donc $MP^2 \leq MR^2$ pour tout point R de ce segment. Mais R appartient au segment $[MQ]$ si et seulement si il existe un réel $t \in [0, 1]$ tel que $\overrightarrow{PR} = t\overrightarrow{PQ}$. On a donc $MP^2 \leq (\overrightarrow{MP} + t\overrightarrow{PQ})^2$ pour tout $t \in [0, 1]$, soit encore $0 \leq 2t\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{PQ} + t^2 PQ^2$ pour tout $t \in [0, 1]$. En divisant par t et en faisant tendre t vers 0, on obtient $0 \leq \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{PQ}$.

Si un point P' de C vérifie $\overrightarrow{P'M} \cdot \overrightarrow{P'Q} \leq 0$ pour tout point Q de C , il vérifie en particulier $\overrightarrow{P'M} \cdot \overrightarrow{P'P} \leq 0$, soit encore $\overrightarrow{MP'} \cdot \overrightarrow{PP'} \leq 0$. En ajoutant cette inégalité à l'inégalité $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PP'} \leq 0$, on obtient $PP'^2 = \overrightarrow{PP'} \cdot \overrightarrow{PP'} \leq 0$, d'où $P' = P$.

Soient M et N deux points de E , $P = p(M)$ et $Q = p(N)$ leurs projetés sur C . On a $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{PQ} \geq 0$ et $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QN} \geq 0$ d'après la propriété précédente. Il en résulte

$$\begin{aligned} MN^2 &= (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN})^2 \\ &= PQ^2 + (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QN})^2 + 2\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{PQ} + 2\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QN} \\ &\geq PQ^2 \end{aligned}$$

d'où $PQ \leq MN$. □

Remarque : L'application p définie dans cette proposition est une projection au sens où elle vérifie $p \circ p = p$ (tout point de C est son propre projeté). Dans le cas où C est un sous-espace affine de E , la projection p sur le convexe C n'est autre que la projection orthogonale sur C définie précédemment. C'est le seul cas où p soit affine, puisque l'image de E par une application affine est un sous-espace affine et que l'image de p est C .

Corollaire 8. *Soit C un convexe fermé non vide d'un espace affine euclidien E . Pour tout point M de E n'appartenant pas à C , il existe un hyperplan affine H de E séparant strictement M de C , i.e. tel que M appartienne à l'un des deux demi-espaces ouverts délimités par H et que C soit contenu dans l'autre.*

Démonstration : Soit P le projeté de M sur C , I le milieu du segment $[MP]$ et H l'hyperplan médiateur de $[MP]$. On a, pour tout point Q de C

$$\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IP} \cdot (\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PQ}) = IP^2 + \overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{PQ} \geq IP^2 > 0$$

et

$$\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IM} = -IP^2 < 0$$

ce qui montre que M appartient à un des deux demi-espaces ouverts délimités par H et que C est inclus dans l'autre. □

Corollaire 9. *Tout convexe fermé d'un espace affine euclidien est l'intersection des demi-espaces ouverts qui le contiennent.*

Démonstration : Tout convexe fermé C est clairement inclus dans l'intersection des demi-espaces ouverts qui le contiennent. Si un point M n'appartient pas à C , il existe un demi-espace ouvert contenant C et pas M . $\square$

On démontrerait de même, en considérant le couple (M, N) de points minimisant la distance d'un point de C_1 à un point de C_2 et l'hyperplan médiateur de $[MN]$, le corollaire suivant :

Corollaire 10. *Soient C_1 et C_2 deux convexes compacts disjoints d'un espace affine euclidien E . Il existe un hyperplan H de E qui sépare strictement C_1 de C_2 , i.e. tel que C_1 soit inclus dans l'un des deux demi-espaces ouverts délimités par H et C_2 dans l'autre.*

Remarque : Ces corollaires ne font pas appel à la structure euclidienne de l'espace. Tout espace affine de dimension finie pouvant être muni d'une structure euclidienne, ils sont vrais pour tout espace affine réel.

Sphères

Définition 23. *Soit E un espace affine euclidien, Ω un point de E et R un réel positif. On appelle sphère de centre Ω et de rayon R l'ensemble*

$$S(\Omega, R) = \{M \in E \mid \Omega M = R\}$$

des points de E dont la distance à Ω est égale à R et boule fermée (resp. boule ouverte) de centre Ω et de rayon R l'ensemble des points de E dont la distance à Ω est inférieure (resp. strictement inférieure) à R .

Proposition 49. *Soit E un espace affine euclidien de dimension n rapporté à un repère orthonormé. La sphère de centre Ω de coordonnées $(a_1, \dots, a_n)$ et de rayon R a pour équation cartésienne*

$$(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 = R^2$$

soit encore

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 - 2a_1x_1 - \dots - 2a_nx_n + d = 0$$

en posant $d = a_1^2 + \dots + a_n^2 - R^2$.

Réciproquement, une équation de cette forme est celle d'une sphère si $a_1^2 + \dots + a_n^2 - d \geq 0$. Si $a_1^2 + \dots + a_n^2 - d = 0$, cette sphère est réduite à un point. Si $a_1^2 + \dots + a_n^2 - d < 0$, l'ensemble des points la vérifiant est vide.

Définition 24. *Deux points A et A' d'une sphère S de centre Ω sont dits diamétralement opposés sur S s'ils sont symétriques par rapport à Ω . On dit alors que $[AA']$ est un diamètre de la sphère S .*

Proposition 50. *Un point M appartient à la sphère de diamètre $[AA']$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = 0$.*

Démonstration : Soit Ω le centre de la sphère, i.e. le milieu de $[AA']$, et R son rayon. Alors

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A}) \cdot (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A'}) = (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A}) \cdot (\overrightarrow{M\Omega} - \overrightarrow{\Omega A}) = M\Omega^2 - R^2.$$

La proposition en découle. $\square$

Proposition 51. *L'intersection d'une sphère de centre Ω et de rayon R avec un hyperplan H est :*

- la sphère de l'hyperplan H de centre le projeté orthogonal Ω' de Ω sur H et de rayon $\sqrt{R^2 - d(\Omega, H)^2}$ si la distance $d(\Omega, H)$ de Ω à l'hyperplan H est strictement inférieure à R ;
- réduite au point Ω' si $d(\Omega, H) = R$;
- vide si $d(\Omega, H) > R$.

Démonstration : Pour tout point M de H , on a $\Omega M^2 = \Omega\Omega'^2 + \Omega'M^2$ (relation de Pythagore) puisque les vecteurs $\overrightarrow{\Omega\Omega'}$ et $\overrightarrow{\Omega'M}$ sont orthogonaux, et $\Omega\Omega' = d(\Omega, H)$. $\square$

Dans le plan, l'intersection d'une droite et d'un cercle est donc constituée de 2, 1 ou 0 points. Dans l'espace de dimension 3, l'intersection d'une sphère et d'un plan est soit un cercle, soit un point, soit vide.

Définition 25. *Un hyperplan H est dit tangent à une sphère S au point M si $S \cap H = \{M\}$.*

Corollaire 11. *Par tout point M d'une sphère S de centre Ω , il passe un et un seul hyperplan tangent à cette sphère, qui est l'hyperplan orthogonal en M à la droite (ΩM) .*

Démonstration : La distance de Ω à un hyperplan H passant par M est strictement inférieure au rayon de S , sauf si H est orthogonal à (ΩM) , auquel cas elle lui est égale. $\square$

Les deux propositions suivantes sont énoncées pour un espace affine euclidien de dimension 3, mais elles se généralisent immédiatement en dimension quelconque.

Proposition 52. Intersection de deux sphères

L'intersection de deux sphères de centres respectifs Ω et Ω' distincts et de rayons respectifs R et R' est :

- un cercle d'axe la droite $(\Omega\Omega')$ si $|R - R'| \leq \Omega\Omega' \leq R + R'$, ce cercle étant réduit à un point si $\Omega\Omega' = |R - R'|$ ou $\Omega\Omega' = R + R'$;
- vide si $\Omega\Omega' > R + R'$ ou $\Omega\Omega' < |R - R'|$.

Démonstration : On commence par remarquer que l'intersection des deux sphères d'équations $x_1^2 + \dots + x_n^2 - 2a_1x_1 - \dots - 2a_nx_n + d = 0$ et $x_1^2 + \dots + x_n^2 - 2a'_1x_1 - \dots - 2a'_nx_n + d' = 0$ est aussi celle de l'une de ces sphères et de l'hyperplan d'équation $2(a_1 - a'_1)x_1 + \dots + 2(a_n - a'_n)x_n + d - d' = 0$ orthogonal à la droite $(\Omega\Omega')$. $\square$

La proposition suivante découle de la précédente et de l'inégalité triangulaire.

Proposition 53. Positions relatives de deux sphères

Soient S et S' deux sphères de centres distincts Ω et Ω' et de rayons respectifs R et R' et $d = \Omega\Omega'$ la distance entre leurs centres. La position relative des deux sphères est alors donnée par l'un des cinq cas suivants :

- si $d < |R - R'|$, l'intersection de S et S' est vide et l'une des sphères est intérieure à l'autre ;
- si $d = |R - R'|$, alors les deux sphères ont un unique point commun et les plans tangents aux deux sphères en ce point sont confondus ; de plus l'une des sphères est intérieure à l'autre ; elles sont dites tangentes intérieurement ;
- si $|R - R'| < d < R + R'$, alors les deux sphères se coupent selon un cercle ;
- si $d = R + R'$, alors les deux sphères ont un unique point commun et les plans tangents aux deux sphères en ce point sont confondus ; de plus chacune des sphères est extérieure à l'autre ; elles sont dites tangentes extérieurement ;
- si $d > R + R'$, l'intersection de S et S' est vide et chacune des sphères est extérieure à l'autre.

1.2.2 Isométries, similitudes**Généralités**

Définition 26. Soient E et F deux espaces affines euclidiens. On appelle isométrie de E dans F toute application f de E dans F qui conserve la distance, i.e. qui vérifie $f(A)f(B) = AB$ pour tout couple (A, B) de points de E .

Une isométrie est clairement injective, puisque $f(A) = f(B)$ implique $AB = f(A)f(B) = 0$ et donc $A = B$. Elle est bijective si E et F ont même dimension, en particulier si $E = F$, ce qui sera presque toujours ici le cas, mais cela ne se voit pas immédiatement sur la définition. Cela résultera en fait de la proposition fondamentale suivante :

Proposition 54. Toute isométrie est une application affine.

Démonstration : Soit O un point de E et $\vec{f}_O$ l'application de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ définie par $\vec{f}_O(\vec{u}) = \overrightarrow{f(O)f(A)}$ pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\vec{E}$, où $A = O + \vec{u}$ est l'unique point de E tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\vec{E}$ et A et B les points de E tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, on a :

$$\begin{aligned}
 \vec{f}_O(\vec{u}) \cdot \vec{f}_O(\vec{v}) &= \overrightarrow{f(O)f(A)} \cdot \overrightarrow{f(O)f(B)} \\
 &= \frac{1}{2} (f(O)f(A)^2 + f(O)f(B)^2 - f(A)f(B)^2) \\
 &= \frac{1}{2} (OA^2 + OB^2 - AB^2) \\
 &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\
 &= \vec{u} \cdot \vec{v},
 \end{aligned}$$

ce qui montre que $\vec{f}_O$ conserve le produit scalaire et est donc linéaire d'après la proposition 15. Il en résulte que f est affine, de partie linéaire $\vec{f}_O$ (qui ne dépend pas de O). $\square$

Nous nous intéresserons essentiellement ici aux isométries d'un espace affine euclidien E dans lui-même.

Proposition 55. *Soient E un espace affine euclidien et f une transformation affine de E . Alors f est une isométrie si et seulement si sa partie linéaire $\vec{f}$ est une transformation orthogonale.*

Démonstration : L'égalité $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{f}(\overrightarrow{AB})$ montre que $f(A)f(B) = AB$ pour tout couple (A, B) de points de E si et seulement si $\|\vec{f}(\overrightarrow{AB})\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ pour tout couple (A, B) de points de E , ou encore si et seulement si $\|\vec{f}(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$ pour tout vecteur $\vec{v}$ de $\vec{E}$. $\square$

Proposition 56. *L'ensemble des isométries d'un espace affine euclidien E est un sous-groupe du groupe $GA(E)$ des transformations affines de E . Ce groupe est noté $Is(E)$ et appelé groupe des isométries de E .*

Démonstration : Cet ensemble est l'image réciproque du groupe orthogonal $O(\vec{E})$ de $\vec{E}$ par l'homomorphisme de groupes de $GA(E)$ dans $GL(\vec{E})$ qui à toute transformation affine f de E associe sa partie linéaire $\vec{f}$. $\square$

Définition 27. *Une isométrie f d'un espace affine euclidien E est dite directe ou positive si sa partie linéaire $\vec{f}$ est une transformation orthogonale positive de $\vec{E}$: $\vec{f} \in O^+(\vec{E})$. On dit aussi que f est un déplacement.*

Une isométrie f de E est dite indirecte ou négative si sa partie linéaire $\vec{f}$ est une transformation orthogonale négative de $\vec{E}$: $\vec{f} \in O^-(\vec{E})$. On dit aussi que f est un antidéplacement.

Les déplacements constituent un sous-groupe $Is^+(E)$ du groupe des isométries de E . On note $Is^-(E)$ l'ensemble des antidéplacements de E ($Is^-(E)$ n'est pas un groupe : le composé de deux antidéplacements est un déplacement).

Décomposition en produit de réflexions

On rappelle que l'ensemble, noté $\text{Fix}(f)$, des points fixes d'une transformation affine f d'un espace affine E est soit vide, soit un sous-espace affine de E .

Lemme 4. *Toute symétrie orthogonale est une isométrie. En particulier, toute réflexion est un antidéplacement.*

Démonstration : La première assertion résulte de la proposition 16. Pour démontrer la seconde, il suffit de remarquer que la matrice de la partie linéaire de la réflexion

d'hyperplan H dans une base orthonormée dont le premier vecteur est orthogonal à H est diagonale, de diagonale $(-1, 1, \dots, 1)$. $\square$

Lemme 5. *Soit f une isométrie de E différente de l'identité. Alors il existe une réflexion s telle que $\dim(\text{Fix}(s \circ f)) > \dim(\text{Fix}(f))$.*

(Si f n'a pas de point fixe, il faut comprendre que $s \circ f$ a au moins un point fixe.)

Démonstration : Soit A un point de E tel que $f(A) \neq A$ et s la réflexion par rapport à l'hyperplan médiateur H de $Af(A)$. Tout point fixe M de f appartient à H , puisque $Mf(A) = f(M)f(A) = MA$, et est donc fixe par $s \circ f$. Comme A n'appartient pas à H et est fixe par $s \circ f$, $\text{Fix}(s \circ f)$ est un sous-espace affine de E contenant strictement $\text{Fix}(f)$. $\square$

On en déduit par récurrence sur la dimension du sous-espace des points fixes, que les réflexions engendrent le groupe des isométries. Plus précisément :

Théorème 3. *Toute isométrie f d'un espace affine euclidien E de dimension n peut se décomposer en produit de k réflexions, avec $k \leq n - p$, où p est la dimension du sous-espace des points fixes de f ($p = -1$ si f n'a pas de point fixe).*

Démonstration : Supposons E fixé et démontrons le théorème par récurrence descendante sur p . Si $p = n$, $\text{Fix}(f) = E$ et $f = id$. Soit $-1 \leq p \leq n - 1$ un entier et f une isométrie telle que $\dim(\text{Fix}(f)) = p$. Alors il existe une réflexion s telle que $\dim(\text{Fix}(s \circ f)) > \dim(\text{Fix}(f))$. Si la propriété est vraie pour tout entier q vérifiant $p < q \leq n$, $g = s \circ f$ peut s'écrire comme produit de k réflexions, avec $k \leq n - p - 1$; $f = s \circ g$ s'écrit donc comme produit de $k + 1$ réflexions et $k + 1 \leq n - p$. $\square$

Cette décomposition n'est pas unique, mais la parité du nombre k de réflexions y intervenant l'est, puisque le déterminant de $\vec{f}$ est $(-1)^k$.

Classification des isométries planes

On suppose ici que E est un plan affine euclidien et on se propose de préciser la nature géométrique des isométries.

Déplacements

Le cas des déplacements est simple : si f est un déplacement du plan, sa partie linéaire $\vec{f}$ est soit l'identité, auquel cas f est une translation, soit une rotation vectorielle d'angle non nul θ . Dans ce cas, f possède un point fixe O et un seul, puisque $+1$ n'est pas valeur propre de $\vec{f}$. On dit que f est la *rotation de centre O et d'angle θ* . L'image $M' = f(M)$ d'un point M est caractérisée par les relations $OM' = OM$, $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$ (modulo 2π). On a donc démontré :

Proposition 57. *Tout déplacement du plan est une translation ou une rotation.*

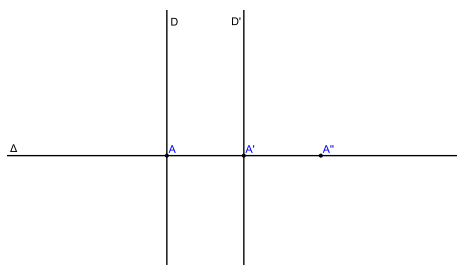
On en déduit que :

- le produit de deux rotations planes d'angles θ et θ' est :
 - une rotation d'angle $\theta + \theta'$ si $\theta + \theta' \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$;
 - une translation si $\theta + \theta' \equiv 0 \pmod{2\pi}$;
- le produit d'une translation et d'une rotation d'angle θ est une rotation d'angle θ .

Ces produits ne sont en général pas commutatifs.

Antidéplacements

Lemme 6. *Le produit de deux réflexions d'axes parallèles est une translation de vecteur orthogonal aux axes de ces réflexions. Réciproquement, toute translation peut se décomposer en produit de deux réflexions, l'axe de l'une pouvant être choisi arbitrairement parmi toutes les droites orthogonales au vecteur de la translation et l'axe de la seconde étant alors uniquement déterminé.*



Démonstration : Deux réflexions d'axes parallèles ont même partie linéaire, qui est une réflexion vectorielle. Leur produit est donc une transformation affine de partie linéaire l'identité, i.e. une translation. Pour trouver le vecteur de cette translation, il suffit de connaître l'image d'un point. Soit donc s et s' deux réflexions d'axes parallèles D et D' , Δ une droite perpendiculaire à D et D' les coupant respectivement en A et A' . Le point $A'' = s_{D'} \circ s_D(A) = s_{D'}(A)$ est le symétrique de A par rapport à A' et vérifie donc $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{AA'}$. Il en résulte que $s_{D'} \circ s_D$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AA'}$. La réciproque est immédiate (on peut choisir l'un des deux points A et A' arbitrairement, l'autre est alors uniquement déterminé). $\square$

La partie linéaire $\vec{f}$ d'un antidéplacement f est une réflexion vectorielle. Soit $\vec{D}$ son axe.

Si f admet un point fixe A , f est la réflexion vectorielle d'axe la droite D de direction $\vec{D}$ passant par A .

Sinon, il existe un vecteur $\vec{u}$ tel que $t_{-\vec{u}} \circ f$ admette un point fixe et soit donc une réflexion s_D d'axe D . On décompose le vecteur $\vec{u}$ sous la forme $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, où $\vec{v} \in \vec{D}$ et $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{D}$. On a alors $f = t_{\vec{u}} \circ s_D = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}} \circ s_D$. On peut alors (lemme 6) décomposer $t_{\vec{w}}$ sous la forme $t_{\vec{w}} = s_{D'} \circ s_D$, où D' est une droite parallèle à D . Il en résulte $f = t_{\vec{v}} \circ s_{D'}$ où $\vec{v} \in \vec{D'}$.

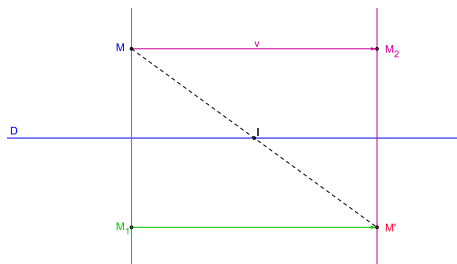
Définition 28. Soit D une droite et $\vec{v}$ un vecteur non nul appartenant à la direction de D . On appelle symétrie glissée d'axe D et de vecteur $\vec{v}$ le produit de la réflexion d'axe D et de la translation de vecteur $\vec{v}$.

Ce produit est commutatif : $s_D \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ s_D$. Une symétrie glissée n'admet pas de point fixe. L'axe et le vecteur d'une symétrie glissée f sont entièrement déterminés : en effet l'axe peut être caractérisé comme :

- l'ensemble des milieux des segments $[Mf(M)]$;
- l'ensemble des points M du plan tels que la distance $Mf(M)$ soit minimale ;
- l'ensemble des points M du plan tels que le vecteur $\overrightarrow{Mf(M)}$ appartienne à l'axe de f .

On a donc démontré :

Proposition 58. Tout antidéplacement du plan est une réflexion ou une symétrie glissée.



Invariants	dépl/antidépl	nature géométrique
plan	déplacement	identité
droite	antidéplacement	réflexion
point	déplacement	rotation
$\emptyset$	déplacement	translation
$\emptyset$	antidéplacement	symétrie glissée

Classification des isométries planes

Classification des isométries de l'espace

Déplacements

Soit f un déplacement de l'espace affine euclidien E de dimension 3. Sa partie linéaire $\vec{f}$ est soit l'identité, soit une rotation vectorielle. Si $\vec{f}$ est l'identité, f est une translation. Si $\vec{f}$ est une rotation vectorielle d'axe $\vec{D}$ et d'angle θ , deux cas se présentent :

- soit f a un point fixe A : dans ce cas f est une *rotation* d'axe D et d'angle θ , où D est la droite affine de direction $\vec{D}$ passant par A (f laisse globalement invariant

tout plan P orthogonal à D et sa restriction à un tel plan est une rotation de centre le point d'intersection de P et de D et d'angle θ ;

– soit f n'a pas de point fixe ; il existe alors un vecteur $\vec{u}$ tel que $t_{-\vec{u}} \circ f$ admette un point fixe et soit donc une rotation r d'axe D ; on décompose le vecteur $\vec{u}$ sous la forme $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, où $\vec{v} \in \vec{D}$ et $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{D}$; on a alors $f = t_{\vec{u}} \circ r = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}} \circ r$; mais $t_{\vec{w}} \circ r$ laisse globalement invariant tout plan orthogonal à D et sa restriction à un tel plan est une rotation plane d'angle θ (composée d'une translation et d'une rotation plane) ; soit D' la droite parallèle à D passant par le centre d'une de ces rotations ; $t_{\vec{v}} \circ r$ est alors la rotation de E d'axe D' et d'angle θ ; il en résulte que f est produit d'une rotation et d'une translation de vecteur un vecteur directeur de l'axe de la rotation ; ce produit est commutatif.

Définition 29. Soit D une droite orientée, θ un réel $\not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ et $\vec{v}$ un vecteur non nul appartenant à la direction de D . On appelle *vissage d'axe D , d'angle θ et de vecteur $\vec{v}$* le produit commutatif de la rotation d'axe D et d'angle θ et de la translation de vecteur $\vec{v}$.

On vérifie que cette décomposition est unique. L'axe D peut être caractérisé comme :

- l'ensemble des points M de l'espace tels que la distance $\overline{Mf(M)}$ soit minimale ;
- l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{Mf(M)}$ appartienne à l'axe de la rotation vectorielle $\vec{f}$.

Définition 30. On appelle *demi-tour ou retournement* toute rotation de l'espace d'angle plat.

Un demi-tour est donc simplement une symétrie orthogonale par rapport à une droite. Les retournements sont les seuls déplacements involutifs. Leur importance vient en particulier du fait qu'ils engendrent le groupe des déplacements, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 59. 1) Le produit de deux retournements s et s' d'axes distincts D et D' est :

- une translation de vecteur orthogonal à D et D' si D et D' sont parallèles ;
- une rotation d'axe la perpendiculaire commune à D et D' si D et D' sont sécants ;
- un vissage d'axe la perpendiculaire commune à D et D' si D et D' ne sont pas coplanaires.

2) Réciproquement, tout déplacement de l'espace peut s'écrire comme produit de deux retournements.

Antidéplacements

La partie linéaire $\vec{f}$ d'un antidéplacement f est soit une réflexion vectorielle, soit une antirotation vectorielle (isométrie vectorielle gauche). Si $\vec{f}$ est une réflexion vectorielle, on montre comme dans le cas des antidéplacements du plan que f est soit une réflexion,

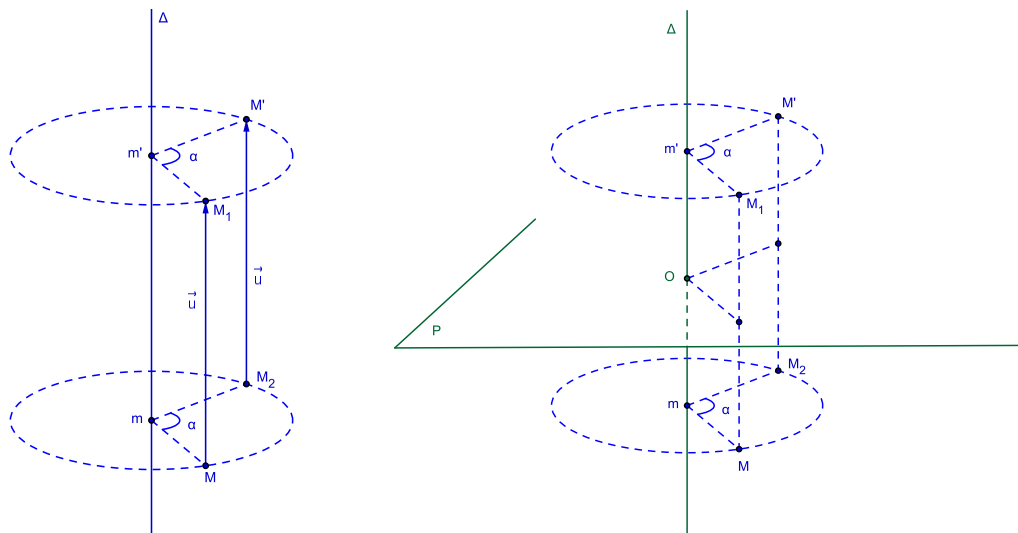


FIGURE 1 – Vissage et antirotation

soit une symétrie glissée (produit commutatif d'une réflexion et d'une translation de vecteur appartenant à la direction du plan de la réflexion). Si $\vec{f}$ est une antirotation, 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$; il en résulte que f admet un point fixe et un seul; f est donc encore une antirotation (produit commutatif d'une rotation et d'une réflexion de plan orthogonal à l'axe de la rotation).

Invariants	dépl/antidépl	nature géométrique
espace	déplacement	identité
plan	antidéplacement	réflexion
droite	déplacement	rotation
point	antidéplacement	antirotation
$\emptyset$	déplacement	vissage ou translation
$\emptyset$	antidéplacement	symétrie glissée

Classification des isométries de l'espace

Groupe d'isométries conservant une figure

Proposition 60. Soit E un espace affine euclidien et A une partie non vide de E . L'ensemble G des isométries f de E qui conservent A (i.e. qui vérifient $f(A) = A$) est un sous-groupe du groupe $Is(E)$ des isométries de E . L'ensemble G^+ des déplacements de E qui conservent A est un sous-groupe de G . L'ensemble G^- des antidéplacements de E qui conservent A est, soit vide, soit en bijection avec G^+ . En particulier, si G^+ est fini et G^- non vide, G^+ et G^- ont le même nombre d'éléments.

Démonstration : L'ensemble G contient l'identité, est stable par composition et par passage à l'inverse ; c'est donc un sous-groupe du groupe $Is(E)$. L'ensemble G^+ est l'intersection des sous-groupes G et $Is^+(E)$ de $Is(E)$; c'est donc un sous-groupe de G . Si G^- n'est pas vide, pour tout $s \in G^-$, l'application $f \mapsto s \circ f$ est une bijection de G^+ sur G^- de bijection réciproque $f \mapsto s^{-1} \circ f$. $\square$

Remarque : L'ensemble des isométries f de E qui vérifient $f(A) \subset A$ est stable par composition, mais n'est pas nécessairement un sous-groupe de $Is(E)$ (si A est une demi-droite de vecteur directeur $\vec{u}$, la translation de vecteur $\vec{u}$ conserve A , mais pas celle de vecteur $-\vec{u}$). C'est toutefois le cas si A est fini, puisque dans ce cas $f(A) = A$ pour toute isométrie f vérifiant $f(A) \subset A$, ou si A est un sous-espace affine, puisque dans ce cas $f(A)$ est un sous-espace affine inclus dans A et de même dimension que A , donc égal à A .

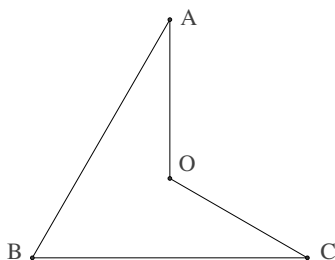
Proposition 61. *Soit E un espace affine euclidien et A une partie finie non vide de E . Toute isométrie de E qui conserve A laisse fixe l'isobarycentre de A . Il en résulte que le groupe G de ces isométries est isomorphe à un sous-groupe du groupe orthogonal $O(\vec{E})$ de $\vec{E}$.*

Démonstration : Une isométrie est une application affine et toute application affine conserve les barycentres. Il en résulte que l'isobarycentre O de A est fixe par toute isométrie conservant A . L'application $f \mapsto \vec{f}$ est un isomorphisme du groupe des isométries de E laissant O fixe sur le groupe orthogonal de $\vec{E}$; G est donc isomorphe à son image par cet homomorphisme, qui est un sous-groupe de $O(\vec{E})$. $\square$

Exemple : le groupe diédral D_n

C'est le groupe des isométries planes conservant un polygone régulier convexe $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ à n côtés. Son sous-groupe des déplacements D_n^+ est le groupe cyclique d'ordre n constitué des n rotations de centre le centre O du polygone et d'angle $2k\pi/n$ ($k = 0, \dots, n-1$). Les éléments de D_n^- sont les n réflexions d'axes les droites OA_k ($k = 0, \dots, n-1$) et les médiatrices des côtés du polygone (ces deux familles étant confondues si n est impair et ayant chacune $n/2$ éléments si n est pair).

Remarque : Une isométrie qui conserve globalement l'ensemble des sommets d'un polygone régulier conserve ce polygone (et réciproquement). Il ne faut pas croire que cette propriété s'étend à tout polygone, comme en témoigne la figure ci-dessous : les rotations de centre O et d'angle $\pm 2\pi/3$ conservent les sommets du polygone $OABC$ mais pas ce polygone.



Similitudes

Définition 31. On appelle similitude d'un espace affine euclidien E toute application f de E dans E telle qu'il existe un réel $k > 0$ tel qu'on ait $f(A)f(B) = kAB$ pour tout couple (A, B) de points de E . Le nombre k est appelé rapport de la similitude.

Une application f de E dans E est donc une similitude si et seulement si elle conserve les rapports de distances.

Une similitude de rapport 1 est une isométrie. Une homothétie de rapport λ est une similitude de rapport $|\lambda|$.

Proposition 62. Toute similitude est une transformation affine. L'ensemble des similitudes d'un espace affine euclidien E constitue un sous-groupe du groupe $GA(E)$ des transformations affines de E . Les homothéties et les isométries engendrent ce sous-groupe : plus précisément, si f est une similitude de rapport k et h une homothétie de rapport k (et de centre quelconque), $f \circ h^{-1}$ est une isométrie.

Démonstration : Soit f une similitude de rapport $k > 0$ et h une homothétie de rapport k (et de centre quelconque). Alors h est une transformation affine de E d'inverse l'homothétie h^{-1} de même centre et de rapport $1/k$ et $g = f \circ h^{-1}$ est une isométrie, puisque

$$g(A)g(B) = k h^{-1}(A)h^{-1}(B) = k \frac{1}{k} AB = AB$$

pour tout couple (A, B) de points de E . Il en résulte que g est une transformation affine de E , ainsi que $f = g \circ h$. Toute similitude de rapport k s'écrit donc comme produit d'une isométrie et d'une homothétie de rapport k . Il découle immédiatement de la définition que le composé de deux similitudes de rapports k et k' est une similitude de rapport kk' et que l'inverse d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $1/k$. $\square$

Définition 32. Une similitude f est dite directe si $\det \vec{f} > 0$, indirecte si $\det \vec{f} < 0$.

Deux figures sont dites semblables (resp. directement semblables) s'il existe une similitude (resp. une similitude directe) transformant la première en la seconde.

Proposition 63. *Toute similitude qui n'est pas une isométrie admet un point fixe et un seul.*

Démonstration : Soit f une similitude de rapport k différent de 1. Il suffit de montrer que 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$ (voir le chapitre « Géométrie affine »). Mais si $\vec{v}$ est un vecteur de $\vec{E}$, l'égalité $\vec{f}(\vec{v}) = \vec{v}$ implique $\|\vec{f}(\vec{v})\| = k \|\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$, d'où $\|\vec{v}\| = 0$ et $\vec{v} = \vec{0}$. $\square$

Similitudes planes

Proposition 64. *Toute similitude directe d'un plan affine euclidien qui n'est pas une isométrie est le produit commutatif d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation de même centre. Cette décomposition est unique.*

Une similitude directe qui n'est pas une isométrie est donc caractérisée par son *centre* (son seul point fixe), son *rapport* et son *angle* (l'angle de la rotation de la décomposition précédente).

Démonstration : Soit f une similitude plane directe de rapport $k > 0$ différent de 1. D'après la proposition 63, f admet un point fixe O et un seul. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k . La transformation affine $g = f \circ h^{-1}$ est une isométrie directe laissant fixe le point O , i.e. une rotation de centre O , et on a $f = g \circ h$. Comme une homothétie de centre O commute avec toute transformation affine laissant O fixe, on a $f = g \circ h = h \circ g$.

Si $f = g' \circ h'$ est une décomposition de f en produit (nécessairement commutatif) d'une homothétie de rapport $k' > 0$ et d'une rotation de même centre O' , on a $k = k'$ et $O = O'$, puisque O est le seul point fixe de f , d'où $h = h'$ et $g = g'$, ce qui établit l'unicité de la décomposition. $\square$

Proposition 65. *Toute similitude indirecte d'un plan affine euclidien qui n'est pas une isométrie est le produit commutatif d'une homothétie de rapport positif et d'une réflexion dont l'axe passe par le centre de l'homothétie. Cette décomposition est unique.*

Une similitude indirecte qui n'est pas une isométrie est donc caractérisée par son *centre* (l'unique point fixe), son *rapport* et son *axe* (l'axe de la réflexion de la décomposition précédente), qui est une droite passant par le centre.

Démonstration : Soit f une similitude plane indirecte de rapport $k > 0$ différent de 1. D'après la proposition 63, f admet un point fixe O et un seul. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k . La transformation affine $g = f \circ h^{-1}$ est une isométrie indirecte laissant fixe le point O , i.e. une réflexion d'axe passant par O , et on a $f = g \circ h$. Comme une homothétie de centre O commute avec toute transformation affine laissant O fixe, on a $f = g \circ h = h \circ g$.

Si $f = g' \circ h'$ est une décomposition de f en produit (nécessairement commutatif) d'une homothétie de centre O' et de rapport $k' > 0$ et d'une réflexion d'axe passant

par O' , on a $k = k'$ et $O = O'$, puisque O est le seul point fixe de f , d'où $h = h'$ et $g = g'$, ce qui établit l'unicité de la décomposition. $\square$

Similitudes planes et nombres complexes

Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. Il est donc muni d'une structure naturelle de plan affine. La base canonique $(1, i)$ de $\mathbb{C}$ et l'origine 0 constituent un repère cartésien naturel pour ce plan. On appellera ce plan *plan complexe*. Réciproquement, le choix d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ permet d'identifier tout plan affine E à $\mathbb{R}^2$, ou encore à $\mathbb{C}$: au point M de coordonnées (x, y) on associe le nombre complexe $z = x + iy$, qu'on appelle *affixe* de M . On peut également définir l'*affixe d'un vecteur* : l'application qui au vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ de $\vec{E}$ associe le nombre complexe $x + iy$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, qui permet d'identifier $\vec{E}$ à $\mathbb{C}$. Cela permet de ramener certains problèmes géométriques à des problèmes d'algèbre.

Mais l'intérêt du plan complexe en géométrie vient surtout de ce qu'il possède aussi une structure euclidienne naturelle. En effet l'application $z \mapsto |z| = \sqrt{z\bar{z}}$ est une norme euclidienne sur $\mathbb{C}$ déduite du produit scalaire

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = \operatorname{Re}(z_2 \bar{z}_1) = \frac{z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1}{2}$$

et la base canonique $(1, i)$ de $\mathbb{C}$ est orthonormée pour cette structure euclidienne.

La distance de deux points A et B , d'affixes respectives a et b , est alors $d(A, B) = |b - a|$. L'angle $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ de deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z_1 et z_2 est $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$. En particulier, ces deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si $\frac{z_2}{z_1}$ est réel, et orthogonaux si et seulement si $\frac{z_2}{z_1}$ est imaginaire pur.

Proposition 66. *Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, l'application $f_{a,b}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f_{a,b}(z) = az + b$ est une similitude directe de rapport $|a|$. Réciproquement, pour toute similitude directe f du plan complexe, il existe un couple $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et un seul tel que $f = f_{a,b}$.*

Proposition 67. *Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, l'application $g_{a,b}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $g_{a,b}(z) = a\bar{z} + b$ est une similitude indirecte de rapport $|a|$. Réciproquement, pour toute similitude indirecte g du plan complexe, il existe un couple $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et un seul tel que $g = g_{a,b}$.*

1.2.3 Géométrie du triangle et du cercle

Dans toute cette partie, *triangle* signifie *triangle non aplati* (sauf mention explicite du contraire). On note $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ les longueurs des côtés d'un triangle ABC et $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ les (mesures des) angles géométriques du triangle.

Un triangle ABC est dit *rectangle en A* si l'angle $\hat{A}$ est droit ; le côté BC est alors appelé *hypoténuse*.

Il est dit *acutangle* si ses trois angles sont aigus, *isocèle en A* si les côtés AB et AC ont même longueur, *équilatéral* si ses trois côtés ont même longueur.

Proposition 68. Formule d'Al Kashi

Dans tout triangle ABC , on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}.$$

En particulier, un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $a^2 = b^2 + c^2$ (théorème de Pythagore).

Démonstration : Par la relation de Chasles :

$$a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB \times \cos \hat{A} = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}.$$

□

Proposition 69. Pour tout triangle ABC , la somme des angles orientés de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ est égale à l'angle plat. Les mesures principales de ces trois angles (comprises entre $-\pi$ et $+\pi$) ont même signe et la somme des mesures des angles géométriques du triangle est égale à π .

Démonstration : L'égalité $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \pi$ (où on a identifié l'angle plat et sa mesure π) découle de la relation de Chasles pour les angles orientés et des relations $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}) + \pi$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$.

Les égalités $\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \det(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, -\overrightarrow{AB}) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ montrent que les sinus de ces trois angles orientés ont le même signe. Il en résulte que la somme des mesures des angles géométriques $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ du triangle est égale à π . □

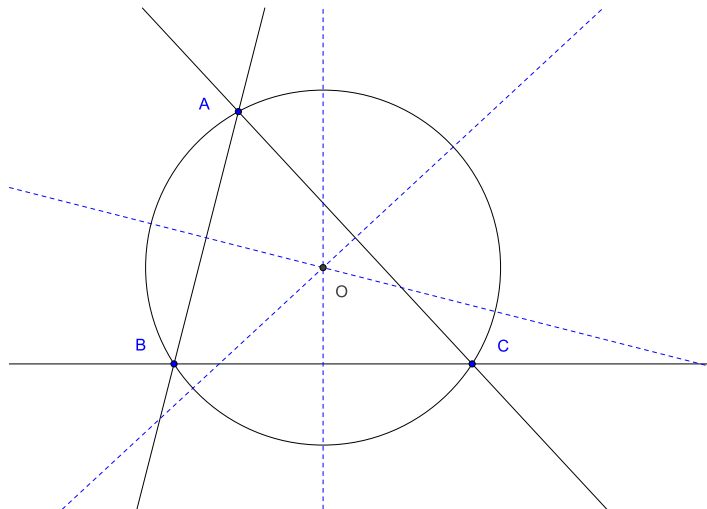
Le réel $\frac{1}{2} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2} \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{2} \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ est l'*aire algébrique* du triangle orienté ABC . Sa valeur absolue est l'*aire géométrique* de ce triangle et s'écrit aussi $\frac{1}{2} AB \times AC \times \sin(\hat{A}) = \frac{1}{2} BC \times BA \times \sin(\hat{B}) = \frac{1}{2} CA \times CB \times \sin(\hat{C})$.

Elle est aussi égale au demi-produit de la longueur d'un des côtés par la longueur de la hauteur correspondante (distance de la droite portant ce côté au sommet opposé).

Médiatrices, cercle circonscrit

Proposition 70. Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est l'unique point du plan équidistant des trois sommets. C'est aussi le centre de l'unique cercle du plan passant par ces trois sommets. Ce cercle est appelé cercle circonscrit au triangle.

Démonstration : Les médiatrices de deux côtés sont sécantes, sinon ces côtés seraient parallèles et le triangle aplati. Leur point d'intersection est équidistant des trois sommets du triangle et appartient donc à la troisième médiatrice. $\square$

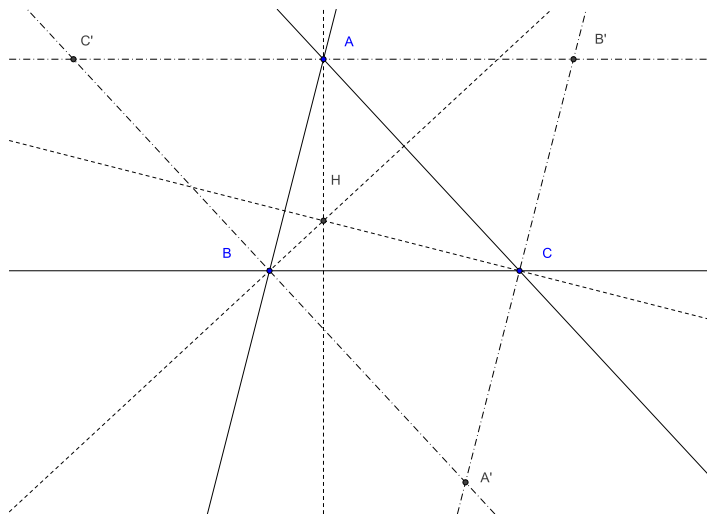


Hauteurs, orthocentre

Définition 33. On appelle hauteurs d'un triangle les droites perpendiculaires aux côtés passant par le sommet opposé.

Proposition 71. Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé orthocentre du triangle.

Démonstration : Les parallèles aux côtés menées par les sommets opposés déterminent un triangle $A'B'C'$. Les hauteurs du triangle initial ABC sont les médiatrices du triangle $A'B'C'$: elles sont donc concourantes. $\square$



Bissectrices, cercles inscrit et exinscrits

Définition 34. On appelle bissectrice intérieure en A d'un triangle ABC la bissectrice du couple de demi-droites $[AB)$ et $[AC)$. L'autre bissectrice de l'angle de droites $(\widehat{AB, AC})$ est appelée bissectrice extérieure en A du triangle ABC .

La proposition suivante justifie cette terminologie :

Proposition 72. La bissectrice intérieure en A d'un triangle ABC coupe le côté $[BC]$ en un point A_1 (appelé pied de cette bissectrice) qui est le barycentre du système pondéré $[(B, b), (C, c)]$. La bissectrice extérieure en A est perpendiculaire à la bissectrice intérieure. Elle ne rencontre pas l'intérieur du triangle et coupe, si le triangle n'est pas isocèle en A , la droite (BC) en un point A'_1 qui est le barycentre du système pondéré $[(B, b), (C, -c)]$. Les points A_1 et A'_1 sont donc les deux points de la droite (BC) vérifiant :

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{A'_1B}{A'_1C} = \frac{AB}{AC}.$$

Démonstration : Soit $A_1 = \frac{b}{b+c}B + \frac{c}{b+c}C$ le barycentre du système pondéré $[(B, b), (C, c)]$. Le point A_1 appartient au segment $[BC]$ et les aires algébriques S_1 et S_2 des triangles ABA_1 et AA_1C vérifient

$$\begin{aligned} 2S_1 &= \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA_1}) = AB \times AA_1 \times \sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA_1}}) \\ 2S_2 &= \det(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC}) = AC \times AA_1 \times \sin(\widehat{\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC}}). \end{aligned}$$

Mais il ressort de l'égalité $\overrightarrow{AA_1} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$ que

$$2S_1 = \frac{c}{b+c} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), \quad 2S_2 = \frac{b}{b+c} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}),$$

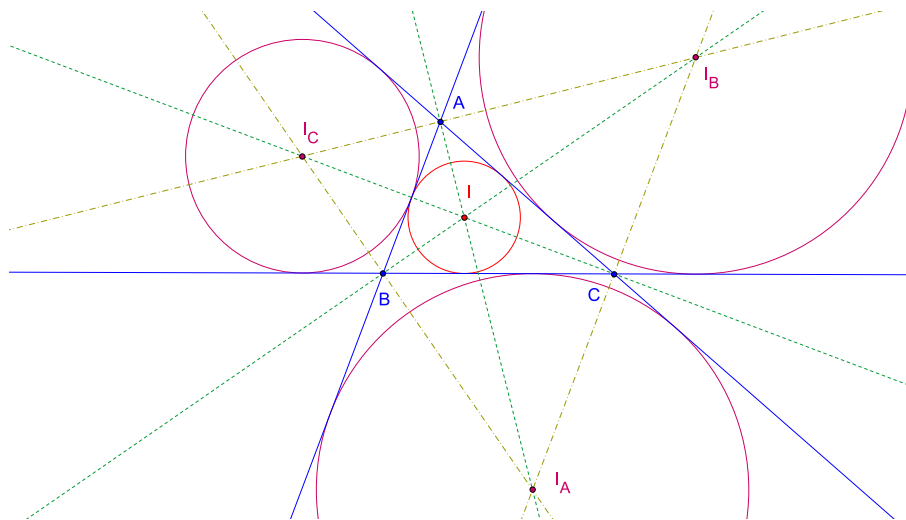
d'où $\sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA_1}}) = \sin(\widehat{\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC}})$ (on ne peut avoir $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC}}) = \pi$ sinon le triangle serait aplati). Le point A_1 appartient donc à la bissectrice intérieure en A du triangle ABC .

La démonstration est analogue pour le point A'_1 . □

Proposition 73. Les bissectrices intérieures d'un triangle ABC sont concourantes en un point de coordonnées barycentriques (a, b, c) dans le repère affine (A, B, C) . Ce point est centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle, appelé cercle inscrit dans le triangle ABC . Chaque bissectrice intérieure rencontre les bissectrices extérieures en les deux autres sommets en un point qui est également centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle. Ces trois cercles sont appelés cercles exinscrits.

Il y a donc exactement quatre points équidistants des trois côtés d'un triangle ; chacun de ces points est intersection de trois bissectrices et centre d'un cercle tangent aux trois côtés.

Démonstration : Il suffit de vérifier que le point $I = \frac{a}{a+b+c}A + \frac{b}{a+b+c}B + \frac{c}{a+b+c}C$ appartient aux trois bissectrices intérieures du triangle. Ce point est intérieur au triangle. Les points de coordonnées barycentriques respectives $(-a, b, c)$, $(a, -b, c)$, $(a, b, -c)$ sont extérieurs au triangle et appartiennent tous à deux bissectrices extérieures et une bissectrice intérieure. Ils sont ainsi équidistants des trois droites portant les côtés du triangle. $\square$



Cercles

Définition 35. Soit E un plan affine euclidien, O un point de E et R un réel positif. On appelle cercle de centre O et de rayon R l'ensemble des points M de E vérifiant $OM = R$.

Si $OM > R$ (resp. $OM < R$), on dit que M est *extérieur* (resp. *intérieur*) au cercle.

Représentation paramétrique, équation

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a + R \cos t \\ y = b + R \sin t \end{cases} \quad (t \in [0, 2\pi[)$$

Son équation cartésienne s'écrit $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, et est donc de la forme $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, où $c = a^2 + b^2 - R^2$. Réciproquement, une équation de

cette forme est celle d'un cercle si $a^2 + b^2 - c \geq 0$ (si $a^2 + b^2 - c = 0$, ce cercle est réduit à un point ; si $a^2 + b^2 - c < 0$, l'ensemble des points la vérifiant est vide).

Intersection d'une droite et d'un cercle, tangentes

Proposition 74. *Soit, dans le plan affine euclidien, D une droite et C un cercle de centre O et de rayon R . L'intersection de D et de C est :*

- constituée de deux points si $d(O, D) < R$;
- réduite à un point si $d(O, D) = R$;
- vide si $d(O, D) > R$.

Si $d(O, D) = R$, l'unique point d'intersection de D et de C est le projeté orthogonal H de O sur D . On dit alors que D est *tangente* à C en H . La tangente à un cercle de centre O en un point M de ce cercle est donc la perpendiculaire menée par M au rayon OM .

Cette définition de la tangente, particulière au cercle, coïncide avec la définition usuelle de la tangente à une courbe paramétrée comme position limite d'une sécante, comme on le vérifie immédiatement en partant de la représentation paramétrique.

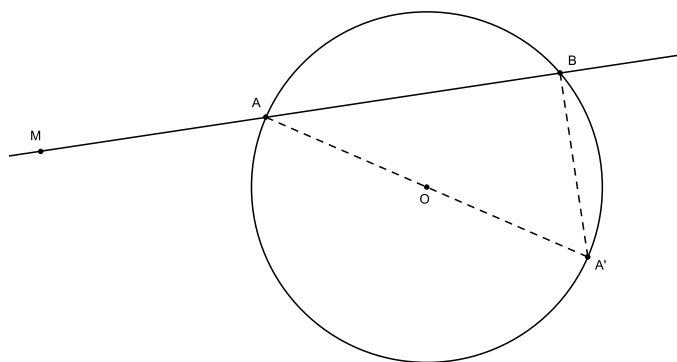
Positions relatives de deux cercles

Proposition 75. *Soient C et C' deux cercles distincts du plan affine euclidien, de centres respectifs O et O' et de rayons R et R' . On note $d = OO'$ la distance de leurs centres. Alors cinq cas sont possibles :*

- si $d < |R - R'|$, les deux cercles sont disjoints et l'un est intérieur à l'autre ;
- si $d = |R - R'|$, les cercles sont tangents intérieurement (leur intersection est réduite à un point, ils ont même tangente en ce point, et l'un est intérieur à l'autre, à l'exception de ce point) ;
- si $|R - R'| < d < R + R'$, ils sont sécants (leur intersection est constituée de deux points, symétriques par rapport à la droite des centres) ;
- si $d = R + R'$, ils sont tangents extérieurement (leur intersection est réduite à un point, ils ont même tangente en ce point, et chacun d'eux est extérieur à l'autre, à l'exception de ce point) ;
- si $d > R + R'$, ils sont disjoints et chacun d'eux est extérieur à l'autre.

Puissance d'un point par rapport à un cercle

Proposition 76. *Soit C un cercle de centre O et de rayon R , M un point du plan et D une droite passant par M et coupant C en deux points A et B . Alors le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ est égal à $MO^2 - R^2$ et ne dépend donc pas de la droite D . Ce nombre est appelé puissance de M par rapport au cercle C et noté $p_C(M)$.*



Démonstration : Soit A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle C . On a :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA'}) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = MO^2 - R^2.$$

□

Ce nombre permet de situer le point M par rapport au cercle. Plus précisément :

- M est extérieur au cercle si et seulement si $p_C(M) > 0$;
- M appartient au cercle si et seulement si $p_C(M) = 0$;
- M est intérieur au cercle si et seulement si $p_C(M) < 0$.

En particulier, si le point M est extérieur au cercle, on a $p_C(M) = MT^2 = MT'^2$, où T et T' sont les points de contact des deux tangentes menées par M au cercle C .

Expression analytique. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, la puissance du point $M(x, y)$ par rapport au cercle C d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ est $p_C(M) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$.

Axe radical de deux cercles

Proposition 77. Soient C et C' deux cercles distincts du plan affine euclidien. L'ensemble des points du plan ayant même puissance par rapport à C et C' est :

- vide si C et C' sont concentriques ;
- une droite perpendiculaire à la droite des centres si leurs centres sont distincts.

Cette droite est alors appelée *axe radical* des deux cercles.

Dans le cas où les cercles sont sécants, leur axe radical est la droite passant par les deux points d'intersection de ces cercles. Dans le cas où ils sont tangents, leur axe radical est leur tangente commune.

Faisceaux linéaires de cercles

Définition 36. Soient C_1 et C_2 deux cercles non concentriques du plan affine euclidien. On appelle faisceau de cercles engendré par C_1 et C_2 l'ensemble des cercles C du plan tels que l'axe radical de C et C_1 soit égal à l'axe radical de C_1 et C_2 .

Proposition 78. Soient C_1 et C_2 deux cercles non concentriques du plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, d'équations respectives $f_1(x, y) = 0$ et $f_2(x, y) = 0$. Le faisceau de cercles engendré par C_1 et C_2 est l'ensemble des cercles du plan d'équation $\alpha f_1(x, y) + (1 - \alpha)f_2(x, y) = 0$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a supposé ici les équations normalisées (les coefficients de x^2 et y^2 égaux à 1). L'équation $f_1(x, y) - f_2(x, y) = 0$ est alors l'équation de l'axe radical de deux quelconques des cercles du faisceau.

Théorème de l'angle inscrit, cocyclicité

Proposition 79. (Théorème de l'angle inscrit).

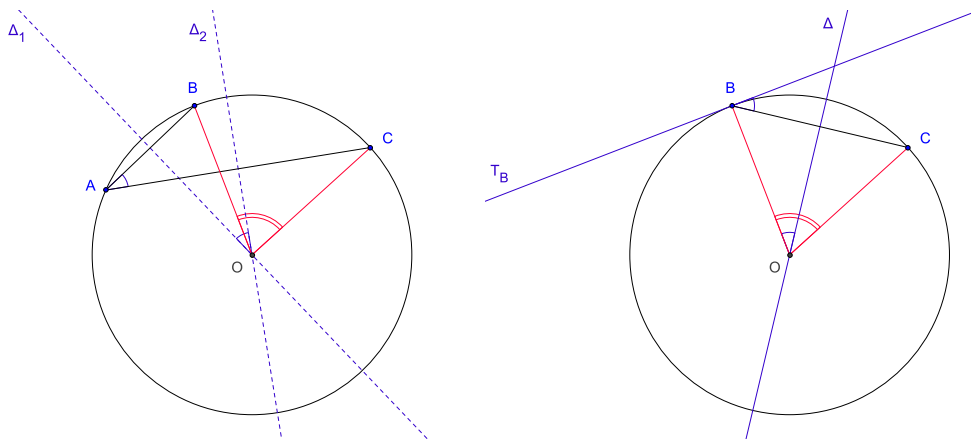
Soient A , B et C trois points distincts d'un cercle de centre O , T_B la tangente en B à ce cercle. Alors on a les égalités d'angles orientés de vecteurs :

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = 2(\widehat{AB, AC}) = 2(\widehat{T_B, BC}) .$$

L'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est un angle orienté de vecteurs, et les angles $(\widehat{AB, AC})$ et $(\widehat{T_B, BC})$ des angles orientés de droites ; mais $2(\widehat{AB, AC})$ (resp. $2(\widehat{T_B, BC})$) est alors aussi un angle orienté de vecteurs (dont la mesure, en supposant le plan orienté, est définie modulo 2π).

Démonstration : Soit s_1 (resp. s_2) la réflexion d'axe la médiatrice Δ_1 de $[AB]$ (resp. la médiatrice Δ_2 de $[AC]$). La composée $s_2 \circ s_1$ est une rotation de centre O (puisque Δ_1 et Δ_2 se coupent en O) qui transforme B en C . Son angle est donc $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$; mais c'est aussi $2(\Delta_1, \Delta_2)$ d'après la proposition 24, qui est égal à $(\widehat{AB, AC})$, puisque Δ_1 est orthogonale à (AB) et Δ_2 à (AC) .

De même, si s_4 est la réflexion d'axe la médiatrice Δ de $[BC]$ et s_3 la réflexion d'axe (OB) , la composée $s_4 \circ s_3$ est la rotation de centre O transformant B en C , i.e. la rotation de centre O et d'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, d'où $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = 2(\widehat{OB, \Delta}) = 2(\widehat{T_B, BC})$, puisque les droites (OB) et Δ sont respectivement orthogonales à (OB) et (BC) . $\square$



Remarque : l'égalité impliquant la tangente peut être vue comme le cas limite de l'égalité précédente quand le point A tend vers le point B .

Proposition 80. *Quatre points distincts A, B, C, D du plan sont cocycliques ou alignés si et seulement si les angles orientés de droites $(\widehat{AB, AC})$ et $(\widehat{DB, DC})$ sont égaux.*

Plus précisément, ils sont alignés si et seulement si ces deux angles de droites sont nuls (ce qui revient à dire que les angles de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$ sont nuls ou plats), cocycliques si ces angles sont égaux mais non nuls.

Démonstration : Le cas des points alignés est trivial.

Si les quatre points sont cocycliques et si O est le centre du cercle les contenant, le théorème de l'angle inscrit nous dit que $(\widehat{OB, OC}) = 2(\widehat{AB, AC}) = 2(\widehat{DB, DC})$ (égalité d'angles orientés de vecteurs). Il en résulte que $(\widehat{AB, AC}) = (\widehat{DB, DC})$ (égalité d'angles orientés de droites).

Réciproquement, si $(\widehat{AB, AC}) = (\widehat{DB, DC})$ n'est pas l'angle nul, les triangles ABC et DBC ne sont pas aplatis. Soient alors Γ_1 et Γ_2 les cercles circonscrits à ces triangles, T_1 et T_2 les tangentes en B à ces cercles. Il résulte de la proposition 79 que $T_1 = T_2$. Les deux cercles Γ_1 et Γ_2 ont même tangente en B et passent par les deux points B et C : ils sont donc confondus et les points A, B, C et D sont cocycliques. $\square$

2 Entraînement

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. Soit E un espace vectoriel euclidien. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ Deux vecteurs u et v sont orthogonaux si et seulement si $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
2. ☒ Deux vecteurs u et v sont orthogonaux si et seulement si $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
3. ☐ Deux vecteurs u et v ont même norme si et seulement si les vecteurs $u+v$ et $u-v$ ont même norme.
4. ☒ Deux vecteurs u et v ont même norme si et seulement si les vecteurs $u+v$ et $u-v$ sont orthogonaux.
5. ☒ Deux vecteurs u et v sont orthogonaux si et seulement si les vecteurs $u+v$ et $u-v$ ont même norme.
6. ☒ Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. Alors $B^\perp \subset A^\perp$.
7. ☐ Soient A et B deux parties non vides de E telles que $B^\perp \subset A^\perp$. Alors $A \subset B$.
8. ☒ Soient A et B deux parties non vides de E telles que $B^\perp \subset A^\perp$. Alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.
9. ☐ Soient A et B deux parties non vides de E telles que $A^\perp = B^\perp$. Alors $A = B$.
10. ☒ Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(F) \leq \dim(G)$. Alors $\dim(G^\perp) \leq \dim(F^\perp)$.
11. ☒ Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
12. ☒ Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors $(F \cup G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
13. ☐ Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors $(F \cap G)^\perp = F^\perp \cup G^\perp$.
14. ☐ Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors $(F^\perp \cap G^\perp)^\perp = F \cup G$.
15. ☒ Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors $(F^\perp \cap G^\perp)^\perp = F + G$.
16. ☒ Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . Alors $F^\perp$ et $G^\perp$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .
17. ☐ Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F + G = E$. Alors $F^\perp \cap G^\perp = \emptyset$.

Vrai-Faux 2. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 2$, $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Si une famille $(v_1, \dots, v_m)$ de vecteurs de E est orthogonale ($\langle v_i, v_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$), alors $m \leq n$.
2. ☒ Si une famille $(v_1, \dots, v_m)$ de vecteurs est orthonormée ($\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$, 1 si $i = j$), alors $m \leq n$.

3. ☒ Si un vecteur x de E est orthogonal à chacun des vecteurs $e_1, \dots, e_n$, alors x est nul.
4. ☐ Une base $(v_1, \dots, v_n)$ de E est orthonormée si et seulement si le déterminant de la matrice de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ à la base $(v_1, \dots, v_n)$ est égal à ± 1 .
5. ☒ Les coordonnées $x_1, \dots, x_n$ d'un vecteur $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ de E dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ sont données par $x_i = \langle e_i, x \rangle$.
6. ☒ Toute famille orthonormée de n vecteurs de E est une base de E .
7. ☒ Si une famille $v_1, \dots, v_{n+1}$ de $n+1$ vecteurs de E est orthogonale, alors au moins un de ces vecteurs est nul.
8. ☒ Une famille $v_1, \dots, v_n$ de n vecteurs de E est une base de E si et seulement si la matrice A de coefficients $a_{i,j} = \langle e_i, v_j \rangle$ ($1 \leq i, j \leq n$) est inversible.
9. ☒ Une famille $v_1, \dots, v_n$ de n vecteurs de E est une base orthonormée de E si et seulement si la matrice A de coefficients $a_{i,j} = \langle e_i, v_j \rangle$ ($1 \leq i, j \leq n$) est orthogonale.

Vrai-Faux 3. Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, u, v, w des vecteurs de E . Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Si $\langle u, v \rangle = 0$, alors $u = 0$ ou $v = 0$.
2. ☒ $\det(u, v, u \wedge v) = \|u \wedge v\|^2$.
3. ☒ Si $\det(u, v, u \wedge v) = 0$, alors u et v sont colinéaires.
4. ☒ Si $\langle u, v \rangle = 0$ et $u \wedge v = 0$, alors $u = 0$ ou $v = 0$.
5. ☒ $(u \wedge v) \wedge w = w \wedge (v \wedge u)$.
6. ☐ $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$.
7. ☒ Si $\langle u \wedge v, w \rangle = 0$, alors le système (u, v, w) est lié.
8. ☐ Si $\|u\| = \|v\| = 1$, alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormée directe de E .
9. ☒ Si le système (u, v) est libre, alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe de E .

Vrai-Faux 4. Soit E un espace vectoriel euclidien. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Toute application f de E dans E qui conserve la norme ($\|f(v)\| = \|v\|$ pour tout $v \in E$) est linéaire.
2. ☒ Toute transformation orthogonale f de E conserve le produit scalaire : $\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ pour tout couple (u, v) de vecteurs de E .
3. ☐ Toute symétrie vectorielle par rapport à un sous-espace vectoriel de E est un endomorphisme symétrique.

4. ☒ Une projection vectorielle p sur un sous-espace vectoriel de E est un endomorphisme symétrique si et seulement si elle vérifie $\|p(u)\| \leq \|u\|$ pour tout vecteur u de E .
5. ☐ Toute transformation orthogonale de E est un endomorphisme symétrique.
6. ☐ Tout endomorphisme symétrique de E est bijectif.
7. ☒ Toute application f de E dans E qui conserve le produit scalaire ($\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ pour tout couple (u, v) de vecteurs de E) est linéaire.
8. ☐ Toute application f de E dans E qui conserve l'orthogonalité ($\langle f(u), f(v) \rangle = 0$ pour tout couple (u, v) de vecteurs de E vérifiant $\langle u, v \rangle = 0$) est linéaire.

Vrai-Faux 5. On se place dans un plan affine euclidien. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ Deux rotations commutent si et seulement si elles ont même centre.
2. ☐ Le composé de deux rotations est toujours une rotation.
3. ☒ Le composé d'une rotation et d'une translation est toujours une rotation.
4. ☒ Le composé de deux réflexions d'axes parallèles est une translation.
5. ☒ Toute translation peut s'écrire comme composé de deux réflexions.
6. ☐ Le composé de deux rotations d'angles opposés et de centres respectifs O_1 et O_2 est une translation de vecteur colinéaire à $\overrightarrow{O_1O_2}$.
7. ☐ Deux réflexions d'axes sécants commutent.
8. ☒ Deux réflexions commutent si et seulement si leurs axes sont confondus ou perpendiculaires.

Vrai-Faux 6. Soit C_1 et C_2 deux cercles, de centres O_1 et O_2 et de rayons R_1 et R_2 . Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ C_1 et C_2 sont tangents si et seulement si $O_1O_2 = R_1 + R_2$.
2. ☒ C_1 et C_2 sont orthogonaux si et seulement si $O_1O_2^2 = R_1^2 + R_2^2$.
3. ☐ C_1 et C_2 sont sécants si et seulement si $O_1O_2 < R_1 + R_2$.
4. ☐ Il existe toujours une homothétie et une seule transformant C_1 en C_2 .
5. ☐ Si C_1 est extérieur à C_2 , alors il existe exactement deux tangentes communes à C_1 et C_2 .
6. ☒ Si C_1 et C_2 sont sécants, alors il existe exactement deux tangentes communes à C_1 et C_2 .

Vrai-Faux 7. On se place dans un espace affine euclidien de dimension 3. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Tout déplacement est une translation ou une rotation.

2. ☐ Tout déplacement peut s'écrire comme composé de deux réflexions.
3. ☒ Tout déplacement peut s'écrire comme composé de deux demi-tours.
4. ☒ Une translation et une rotation commutent si et seulement si le vecteur de la translation appartient à la direction de l'axe de la rotation.
5. ☒ Toute rotation peut s'écrire comme composé de deux réflexions.
6. ☐ Une symétrie centrale est une rotation d'angle plat.
7. ☐ Une symétrie centrale est un déplacement.
8. ☐ Le composé de deux rotations d'angles θ_1 et θ_2 est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$.
9. ☒ Deux rotations de même axe commutent.

Vrai-Faux 8. On se place dans le plan complexe. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Deux vecteurs d'affixes z_1 et z_2 sont orthogonaux si et seulement si $z_1 z_2 = 0$.
2. ☐ Deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ d'affixes z_1 et z_2 non nulles vérifient $\|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\| = \|\vec{v}_1\| + \|\vec{v}_2\|$ si et seulement si le quotient $\frac{z_1}{z_2}$ est réel.
3. ☒ Deux points d'affixes z_1 et z_2 non nulles sont alignés avec l'origine si et seulement si $z_1 \bar{z}_2$ est réel.
4. ☒ L'application qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe $2 - iz$ est une rotation.
5. ☒ L'application qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe $2 - z$ est une symétrie centrale.
6. ☐ L'application qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe $2\bar{z}$ est une réflexion.
7. ☒ L'application qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe $i\bar{z}$ est une réflexion.
8. ☐ L'application qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe $z - 2\bar{z}$ est une similitude.

2.2 Exercices

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n , $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E , H un hyperplan vectoriel de E d'équation $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ dans cette base. Donner la matrice dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ des projections orthogonales sur $H^\perp$ et sur H .

Exercice 2. 1) Soit v un vecteur non nul d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n . Exprimer en fonction de u et v le projeté orthogonal u' d'un vecteur u de E sur l'hyperplan orthogonal à v .

2) Soient $v_0, v_1, \dots, v_m$ $m+1$ vecteurs de E vérifiant $\langle v_i, v_j \rangle < 0$ pour tout couple (i, j) d'indices distincts. Montrer que les projetés orthogonaux $v'_1, \dots, v'_m$ des vecteurs $v_1, \dots, v_m$ sur l'hyperplan orthogonal à v_0 vérifient $\langle v'_i, v'_j \rangle < 0$ pour tout couple (i, j) d'indices distincts.

3) En déduire par récurrence sur n que $m \leq n$.

4) Montrer qu'il existe $n+1$ vecteurs $v_0, v_1, \dots, v_n$ de E vérifiant $\langle v_i, v_j \rangle < 0$ pour tout couple (i, j) d'indices distincts. La borne dans l'inégalité de la question précédente ne peut donc pas être améliorée.

Exercice 3. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien E . Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $F^\perp \subset G$;
- (ii) $G^\perp \subset F$;
- (iii) $F^\perp$ et $G^\perp$ sont orthogonaux.

Exercice 4. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien E tels que $F \subset G$, p_F et p_G les projections orthogonales sur F et G . Montrer que $p_F \circ p_G = p_F$.

Exercice 5. Soit u, v, w trois vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Montrer que la famille (u, v, w) est libre si et seulement si la famille $(u \wedge v, u \wedge w)$ est libre.

Exercice 6. Soit, dans un espace vectoriel euclidien E , f une transformation orthogonale et F un sous-espace vectoriel de E tels que $f(F) = F$. Montrer que $f(F^\perp) = F^\perp$.

Exercice 7. Soit, dans un plan vectoriel euclidien, r une rotation vectorielle et s une réflexion vectorielle.

- 1) Déterminer $s \circ r \circ s$ et $r \circ s \circ r$.
- 2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que r et s commutent.

Exercice 8. Soit, dans un espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée, f l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que f est une rotation vectorielle dont on précisera l'axe et l'angle.

Exercice 9. Soit, dans un espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée, f l'endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que f est une antirotation dont on déterminera l'axe et l'angle.

Exercice 10. Dans un espace vectoriel euclidien de dimension 3, déterminer le produit de deux demi-tours. Montrer que toute rotation vectorielle peut s'écrire comme produit de deux demi-tours. Cette écriture est-elle unique ?

Exercice 11. 1) Soit, dans un espace vectoriel euclidien de dimension 3, s une réflexion vectorielle de plan P , r une rotation vectorielle d'axe D et u un vecteur directeur de D . Montrer que si $s \circ r = r \circ s$, alors $s(u) = \pm u$ et $r(P) = P$.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une rotation vectorielle et une réflexion vectorielle commutent.

Exercice 12. On se place dans un espace vectoriel euclidien de dimension 3.

1) Soient r_1 et r_2 deux rotations vectorielles de même axe. Montrer que $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1$.

2) Soient r_1 et r_2 deux demi-tours d'axes D_1 et D_2 orthogonaux. Montrer que $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1$ et déterminer cette rotation.

3) Soit r une rotation différente de l'identité, et D son axe. Soit Δ une droite vectorielle distincte de D telle que $r(\Delta) = \Delta$. Montrer que D et Δ sont orthogonales et que r est un demi-tour.

4) Soient r_1 et r_2 deux rotations vectorielles distinctes de l'identité d'axes D_1 et D_2 distincts. On suppose $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1$. Montrer que $r_2(D_1) = D_1$. En déduire que r_1 et r_2 sont deux demi-tours d'axes orthogonaux.

5) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux rotations vectorielles commutent.

Exercice 13. 1) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $\langle x, f(x) \rangle = 0$ pour tout vecteur x de E ;
- (ii) $\langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$ pour tout couple (x, y) de vecteurs de E ;
- (iii) la matrice de f dans toute base orthonormale de E est antisymétrique ;
- (iv) il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f est antisymétrique ;
- (v) $f = -f^*$.

Un endomorphisme vérifiant ces propriétés est dit *antisymétrique*.

2) Montrer que l'ensemble des endomorphismes antisymétriques d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n est un sous-espace vectoriel $\mathcal{A}$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ de l'espace vectoriel $\mathcal{L}$ des endomorphismes de E .

3) Soit $\mathcal{S}$ l'espace des endomorphismes symétriques de E . Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{L}$. Écrire la décomposition d'un endomorphisme f de E suivant ces deux sous-espaces.

4) Montrer que le noyau et l'image d'un endomorphisme antisymétrique sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux.

5) Montrer que le déterminant de tout endomorphisme antisymétrique d'un espace vectoriel euclidien de dimension impaire est nul.

6) Déduire des deux questions précédentes que le rang d'un endomorphisme antisymétrique est toujours pair (on pourra considérer la restriction de cet endomorphisme à son image).

7) Décrire les endomorphismes antisymétriques d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2.

8) Soit f un endomorphisme antisymétrique d'un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3. Montrer qu'il existe un vecteur v de E et un seul tel que $f(x) = v \wedge x$ pour tout vecteur x de E . Exprimer le noyau et l'image de f en fonction de v .

9) Soient u et v deux vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3. Discuter en fonction de u et v l'existence et le nombre de solutions de l'équation $u \wedge x = v$.

Exercice 14. Montrer qu'une matrice réelle carrée d'ordre 2 symétrique $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est définie positive si et seulement si $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$.

Exercice 15. On identifie, dans tout cet exercice, toute matrice réelle à n lignes et p colonnes à l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ qui lui est associée. On identifie également tout vecteur de $\mathbb{R}^p$ à la matrice colonne de ses composantes.

1) Soit M une matrice à n lignes et p colonnes et X un vecteur de $\mathbb{R}^p$. Exprimer ${}^tX {}^tMMX$ en fonction de la norme euclidienne de MX .

2) Montrer que la matrice tMM est symétrique positive.

3) Comparer les noyaux, puis les rangs, de M et tMM .

4) Montrer que tMM est définie positive si et seulement si les vecteurs colonnes de M sont linéairement indépendants.

Exercice 16. *Matrice de Gram*

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et $v_1, \dots, v_p$ une famille de p vecteurs de E . On appelle *matrice de Gram* de $(v_1, \dots, v_p)$ la matrice $\text{Gram}(v_1, \dots, v_p) = (g_{i,j})_{i,j=1..p}$ de coefficients

$$g_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle$$

et *déterminant de Gram* de cette famille le déterminant

$$G(v_1, \dots, v_p) = \det(\text{Gram}(v_1, \dots, v_p))$$

de sa matrice de Gram.

1) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et M la matrice des vecteurs $(v_1, \dots, v_p)$ dans cette base. Montrer que $\text{Gram}(v_1, \dots, v_p) = {}^tMM$. En déduire que $G(v_1, \dots, v_p) \geq 0$.

2) Montrer que les vecteurs $v_1, \dots, v_p$ sont linéairement indépendants si et seulement si $G(v_1, \dots, v_p) > 0$.

3) Soient $a \in E$, F un sous-espace vectoriel de E et $(w_1, \dots, w_p)$ une base (non nécessairement orthonormée) de F . Montrer que la distance $d(a, F)$ de a au sous-espace vectoriel F est donnée par :

$$d(a, F)^2 = \frac{G(a, w_1, \dots, w_p)}{G(w_1, \dots, w_p)}.$$

4) On suppose E orienté de dimension 3. Montrer que $G(v_1, v_2) = \|v_1 \wedge v_2\|^2$ pour tout couple (v_1, v_2) de vecteurs de E .

5) Soient u_1, u_2, u_3 trois vecteurs unitaires de E et α, β, γ trois éléments de $[0, \pi]$ tels que

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \cos \alpha, \quad \langle u_2, u_3 \rangle = \cos \beta, \quad \langle u_3, u_1 \rangle = \cos \gamma.$$

Calculer $G(u_1, u_2, u_3)$ et en déduire les inégalités

$$\alpha + \beta + \gamma \leq 2\pi, \quad \alpha \leq \beta + \gamma, \quad \beta \leq \gamma + \alpha, \quad \gamma \leq \alpha + \beta.$$

Interpréter géométriquement ces inégalités.

Exercice 17. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n , $(v_1, \dots, v_n)$ une base de E , G la matrice de Gram de la famille $(v_1, \dots, v_n)$, f un endomorphisme de E de matrice A dans la base $(v_1, \dots, v_n)$.

1) Exprimer en fonction de A et de G la matrice de l'endomorphisme adjoint f^* de f dans la base $(v_1, \dots, v_n)$.

2) Montrer que f est symétrique si et seulement si $GA = {}^tAG$.

Exercice 18. Quotient de Rayleigh

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n . On définit, pour tout vecteur colonne non nul $X \in \mathbb{R}^n$, le quotient de Rayleigh $R_A(X)$ par

$$R_A(X) = \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}.$$

1) Montrer que $R_A(\lambda X) = R_A(X)$ pour tout réel λ non nul.

2) Montrer que la plus grande (resp. la plus petite) valeur propre $\lambda_{\min}$ (resp. $\lambda_{\max}$) de A est donnée par

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} &= \max_{X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0} R_A(X) = \max_{X \in \mathbb{R}^n, \|X\|=1} R_A(X) \\ \lambda_{\min} &= \min_{X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0} R_A(X) = \min_{X \in \mathbb{R}^n, \|X\|=1} R_A(X). \end{aligned}$$

Exercice 19. 1) Montrer que toute matrice symétrique positive A (i.e. vérifiant ${}^tXAX \geq 0$ pour tout X) possède une racine carrée symétrique positive (i.e. une matrice A_1 symétrique positive vérifiant $A_1^2 = A$).

2) En déduire que toute matrice symétrique positive d'ordre n est la matrice de Gram d'une famille de n vecteurs.

Exercice 20. Inégalité de Hadamard

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille libre de n vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n , $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et $(e'_1, \dots, e'_n)$ la base orthonormale de E obtenue à partir de $(v_1, \dots, v_n)$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On note

- M la matrice de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ à la base $(v_1, \dots, v_n)$;
- Q la matrice de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ à la base $(e'_1, \dots, e'_n)$;
- T la matrice de passage de la base $(e'_1, \dots, e'_n)$ à la base $(v_1, \dots, v_n)$.

- 1) Que peut-on dire des matrices Q et T ?
- 2) Montrer que $M = QT$.
- 3) Comparer les matrices tMM et tTT .
- 4) En déduire une relation entre les normes des vecteurs colonnes de M et celles des vecteurs colonnes de T .
- 5) Exprimer la valeur absolue du déterminant de M en fonction des coefficients diagonaux $t_{i,i}$ de T .

6) En déduire que la valeur absolue du déterminant d'une matrice carrée réelle est inférieure ou égale au produit des normes euclidiennes de ses vecteurs colonnes et que la valeur absolue du déterminant de n vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n est inférieure ou égale au produit des normes de ces vecteurs. Interpréter ces inégalités en termes d'aire ou de volume quand $n = 2$ ou 3 . Dans quels cas a-t-on l'égalité?

Exercice 21. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et V l'ellipsoïde plein

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid {}^tXAX \leq 1\}$$

où $X = {}^t(x_1, x_2, x_3)$. Exprimer en fonction des valeurs propres de A le rayon R de la plus petite boule de centre l'origine contenant V et le rayon r de la plus grande boule de centre l'origine contenue dans V .

Exercice 22. *Méthode des moindres carrés*

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ une matrice réelle à n lignes et m colonnes et V un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On identifiera A à l'application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ qui lui est naturellement associée et V à la matrice colonne de ses composantes.

On dit que le vecteur colonne $U \in \mathbb{R}^m$ est solution du problème des moindres carrés associé au couple (A, V) si

$$\|AU - V\| = \min\{\|AW - V\| \mid W \in \mathbb{R}^m\}.$$

1) Montrer que $U \in \mathbb{R}^m$ est solution du problème des moindres carrés associé au couple (A, V) si et seulement si AU est le projeté orthogonal de V sur le sous-espace vectoriel $\text{Im } A$ de $\mathbb{R}^n$.

2) En déduire que $U \in \mathbb{R}^m$ est solution du problème des moindres carrés associé au couple (A, V) si et seulement si $AU - V$ est orthogonal à $\text{Im } A$, ou encore si et seulement si ${}^tAAU = {}^tAV$.

3) Montrer que si le rang de A est m , le problème des moindres carrés associé au couple (A, V) admet une unique solution, et que si le rang de A est strictement plus petit que m , l'ensemble des solutions est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^m$ de dimension $m - \text{rg } A$.

4) On suppose le rang de A égal à m . Montrer que l'erreur $\delta = \|AU - V\|$ au sens des moindres carrés du problème associé à (A, V) (dont U est l'unique solution) est donnée par :

$$\delta^2 = \frac{G(V, A_1, \dots, A_m)}{G(A_1, \dots, A_m)}$$

où $A_1, \dots, A_m$ sont les vecteurs colonnes de A et G le déterminant de Gram.

Exercice 23. Soient B et C deux points d'un espace affine euclidien E et b et c deux réels positifs vérifiant $b + c = BC$. Montrer qu'il existe un et un seul point A de E vérifiant $AB = c$ et $AC = b$ et que ce point appartient au segment $[BC]$. En particulier le milieu I de BC est l'unique point de E vérifiant $IB = IC = \frac{1}{2}BC$.

Exercice 24. *Fonction scalaire de Leibniz*

Soit $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$ un système de points pondérés d'un espace affine euclidien E . On définit une fonction φ de E dans $\mathbb{R}$ par $\varphi(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i MA_i^2$.

1) On suppose $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$. Montrer que $\varphi(M) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) MG^2 + \varphi(G)$, où G est le barycentre du système pondéré $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$.
En particulier, si I est le milieu d'un segment AB , on obtient l'identité de la médiane :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2AI^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

2) On suppose $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$. Montrer que $\varphi(M) = 2\overrightarrow{MN} \cdot \vec{u} + \varphi(N)$ pour tout couple (M, N) de points de E , où le vecteur $\vec{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{NA_i}$ ne dépend pas du point N .

3) Application : Soient A et B deux points d'un plan affine euclidien E et k un réel non nul. Déterminer l'ensemble des points M de E vérifiant $MA^2 + MB^2 = k$ (resp. $MA^2 - MB^2 = k$, $\frac{MA}{MB} = k$).

Exercice 25. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Donner l'expression en coordonnées de la projection orthogonale sur la droite D d'équation $x + 2y + 3 = 0$, puis de la symétrie orthogonale par rapport à cette même droite.

Exercice 26. *Théorème des trois perpendiculaires*

Soit P un plan de l'espace affine euclidien E de dimension 3 et D une droite incluse dans ce plan. On note p_P (resp. p_D) la projection orthogonale sur P (resp. D). Montrer que $p_D = p_D \circ p_P$. Si M est un point de E , $H = p_P(M)$ son projeté orthogonal sur P et $K = p_D(M)$ son projeté orthogonal sur D , écrire une relation entre MH , HK et MK .

Exercice 27. L'espace est rapporté à un repère orthonormé. Donner des équations de la perpendiculaire commune aux droites D_1 d'équations

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

et D_2 déterminée par le point A_2 de coordonnées $(1, 0, 1)$ et le vecteur directeur $\vec{v}_2$ de composantes $(1, -1, 0)$. Calculer la distance de ces deux droites.

Exercice 28. Montrer qu'un point d'un espace affine euclidien E est uniquement déterminé par ses distances aux points d'un repère affine, i.e. que si $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ est un repère affine de E , l'application $M \mapsto (MA_0, MA_1, \dots, MA_n)$ de E dans $\mathbb{R}^{n+1}$ est injective.

Exercice 29. Soit E un espace affine euclidien et p la projection affine sur un sous-espace affine F de E dans la direction d'un sous-espace affine G . Montrer que p est 1-lipschitzienne (i.e. vérifie $p(M)p(N) \leq MN$ pour tout couple (M, N) de points de E) si et seulement si p est une projection orthogonale (i.e. si et seulement si $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux de $\vec{E}$).

Exercice 30. L'espace affine euclidien de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux plans P et P' d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ soient perpendiculaires.

Exercice 31. Montrer que deux droites orthogonales de l'espace affine euclidien de dimension 3 se projettent orthogonalement sur un plan P en deux droites orthogonales si et seulement si l'une de ces droites est parallèle à P , l'autre n'étant pas orthogonale à P .

Exercice 32. Soit, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, D_1 la droite d'équations

$$x + 4y + z - 12 = 0, \quad 2x + 2y - z - 9 = 0$$

et D_2 la droite définie par le point B de coordonnées $(2, 1, 4)$ et le vecteur directeur $\vec{v}_2$ de composantes $(1, -1, 1)$.

- 1) Donner un vecteur directeur de D_1 .
- 2) Donner un vecteur directeur de la perpendiculaire commune Δ à D_1 et D_2 .
- 3) Donner une équation cartésienne du plan Q_1 défini par D_1 et Δ .
- 4) Donner une équation cartésienne du plan Q_2 défini par D_2 et Δ .
- 5) Donner les coordonnées des pieds de la perpendiculaire commune Δ .
- 6) Calculer la distance de la droite D_1 à la droite D_2 .

Exercice 33. Dans l'espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé d'origine O , on considère les trois points $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$, avec $abc \neq 0$.

- 1) Ecrire l'équation du plan (ABC) . Donner un vecteur normal à ce plan.
- 2) Montrer que le projeté orthogonal H de O sur le plan (ABC) est l'orthocentre du triangle ABC .
- 3) Ecrire l'équation de la sphère circonscrite au tétraèdre $OABC$. Déterminer son rayon et les coordonnées de son centre Ω . Comparer les vecteurs $\overrightarrow{O\Omega}$ et $\overrightarrow{OG}$, où G est l'isobarycentre des sommets du tétraèdre.

Exercice 34. Soit $ABCD$ un tétraèdre non aplati de l'espace affine euclidien de dimension 3. Montrer qu'il existe une sphère et une seule passant par les 4 points A , B , C et D . Cette sphère est appelée *sphère circonscrite* au tétraèdre.

Exercice 35. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère les deux sphères S_1 et S_2 d'équations respectives :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$$

et

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4z + 9 = 0.$$

- 1) Donner pour chacune de ces sphères les coordonnées de son centre et son rayon.
- 2) Montrer que S_1 et S_2 sont tangentes. Donner les coordonnées de leur point de contact et l'équation de leur plan tangent en ce point.
- 3) Montrer qu'il existe exactement deux homothéties transformant S_1 en S_2 . Donner pour chacune de ces homothéties son rapport et les coordonnées de son centre.

Exercice 36. Soient, dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, D et D' deux droites sécantes d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$. Ecrire l'équation de la réunion des deux bissectrices de ces droites.

Exercice 37. Soient P et P' deux plans de l'espace affine euclidien E de dimension 3 d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ dans un repère orthonormé. Déterminer l'ensemble des points M de E équidistants de P et P' .

Exercice 38. Montrer que, dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, la tangente en $M_0(x_0, y_0)$ au cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ a pour équation $x_0x + y_0y - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0$.

Exercice 39. Montrer que par tout point M du plan extérieur à un cercle C de centre O on peut mener deux tangentes à C et que ces tangentes sont symétriques par rapport à la droite OM . Donner une construction de ces tangentes.

Exercice 40. Ecrire l'équation de l'axe radical de deux cercles donnés par leurs équations cartésiennes en repère orthonormé $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ et $x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0$. Vérifier que cet axe radical est perpendiculaire à la droite des centres.

Exercice 41. On suppose les cercles C_1 et C_2 sécants en A et B . Montrer que le faisceau de cercles engendré par C_1 et C_2 est exactement l'ensemble des cercles du plan passant par A et B .

Exercice 42. On suppose les cercles C_1 et C_2 tangents en un point A . Montrer que le faisceau de cercles engendré par C_1 et C_2 est exactement l'ensemble des cercles du plan tangents en A à C_1 et C_2 .

Exercice 43. *Cercles orthogonaux*

Soient, dans le plan affine euclidien, C et C' deux cercles de centres respectifs O et O' et de rayons respectifs R et R' . Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

- (i) les cercles C et C' sont sécants et leurs tangentes en leurs points d'intersection sont orthogonales ;
- (ii) $OO'^2 = R^2 + R'^2$;
- (iii) $p_C(O') = R'^2$;
- (iv) $p_{C'}(O) = R^2$.

Deux cercles C et C' remplissant ces conditions sont dits *orthogonaux*.

Exercice 44. *Faisceaux de cercles orthogonaux*

1) Montrer qu'un cercle orthogonal à deux cercles d'un faisceau est orthogonal à tout cercle du faisceau.

2) En déduire que l'ensemble des cercles orthogonaux à tous les cercles d'un faisceau est un autre faisceau de cercles, et que l'axe radical de l'un ces faisceaux est la droite des centres de l'autre.

Exercice 45. *Arc capable.*

Soient A et B deux points distincts du plan affine euclidien orienté et α un réel. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que la mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ soit congrue à α modulo π (resp. modulo 2π). En déduire l'ensemble des points M du plan tels que la mesure de l'angle géométrique $\widehat{AMB}$ soit égale à α .

Exercice 46. Soient a, b, c trois réels positifs. Montrer qu'il existe un triangle de longueurs de côtés a, b, c si et seulement si on a la double inégalité : $|b - c| < a < b + c$.

Exercice 47. Montrer qu'un triangle ABC est isocèle en A si et seulement si les angles géométriques $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont égaux. Un triangle est donc équilatéral si et seulement si ses trois angles sont égaux.

Exercice 48. 1) Montrer que, pour tout quadruplet (A, B, C, M) de points d'un espace affine euclidien E , on a :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

2) Redémontrer en utilisant cette relation que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

3) Montrer que si deux des trois couples d'arêtes opposées d'un tétraèdre sont constitués de droites orthogonales, le troisième couple l'est aussi.

Exercice 49. Tétraèdres orthocentriques

1) Soit, dans l'espace affine euclidien de dimension 3, $ABCD$ un tétraèdre non aplati et A_1, B_1, C_1, D_1 les projetés orthogonaux des sommets A, B, C, D sur les faces opposées (les droites $(AA_1), (BB_1), (CC_1), (DD_1)$ sont appelées *hauteurs* du tétraèdre).

Démontrer l'équivalence des deux propriétés :

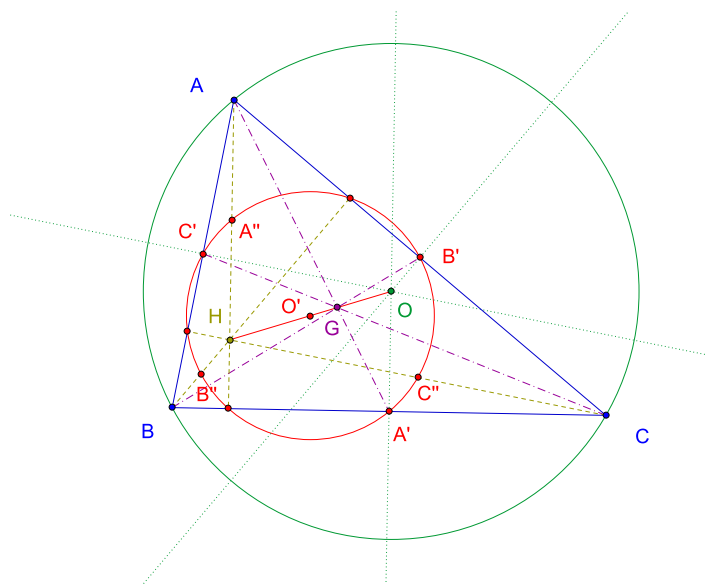
- (i) les droites (AB) et (CD) sont orthogonales ;
- (ii) les droites (AA_1) et (BB_1) sont sécantes.

2) Montrer que les quatre hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes si et seulement si toute arête de ce tétraèdre est orthogonale à l'arête opposée. Un tel tétraèdre est dit *orthocentrique*.

3) Montrer qu'un tétraèdre régulier est orthocentrique. Donner un exemple de tétraèdre orthocentrique qui n'est pas régulier.

Exercice 50. Cercle d'Euler

Soit dans le plan affine euclidien ABC un triangle non aplati, G son centre de gravité, H son orthocentre, A', B', C' les milieux des côtés BC, CA et AB , Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre.



1) Montrer que l'homothétie $h_{G,-1/2}$ de centre G et de rapport $-1/2$ transforme le triangle ABC en le triangle $A'B'C'$.

2) Montrer que les points O, G et H sont alignés. Écrire une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GO}$.

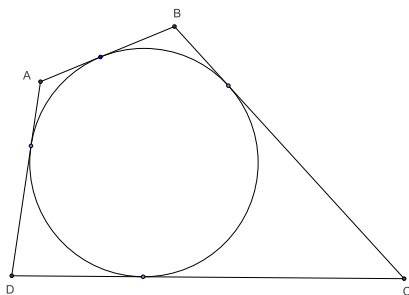
3) Soit Γ' le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ et O' son centre. Montrer que Γ' est l'image de Γ par l'homothétie $h_{G,-1/2}$, puis que O' est le milieu de HO . En déduire

que l'homothétie de centre H et de rapport $1/2$ transforme Γ en Γ' , puis que Γ' passe par les milieux A'' , B'' et C'' des segments HA , HB et HC .

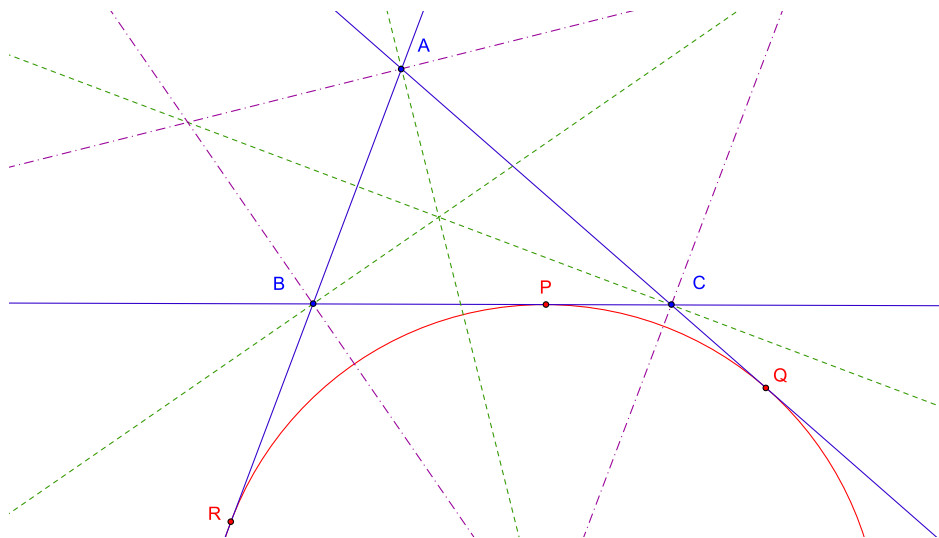
4) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{C'B'}$ et $\overrightarrow{B''C''}$, puis les vecteurs $\overrightarrow{C'B''}$ et $\overrightarrow{B'C''}$. Montrer que $C'B''C''B'$ est un rectangle. En déduire que $C'C''$ et $B'B''$ sont des diamètres du cercle Γ' .

5) Montrer que le cercle Γ' passe par les pieds des hauteurs du triangle ABC .

Exercice 51. Montrer que si un quadrilatère convexe $ABCD$ possède un cercle inscrit, il vérifie $AB + CD = BC + DA$.



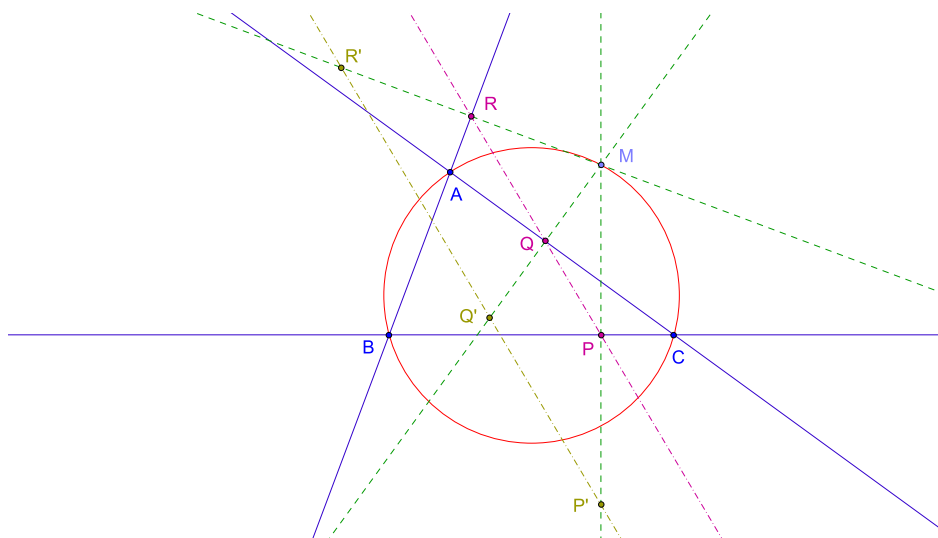
Exercice 52. Cercle exinscrit et périmètre (théorème des trois tangentes)



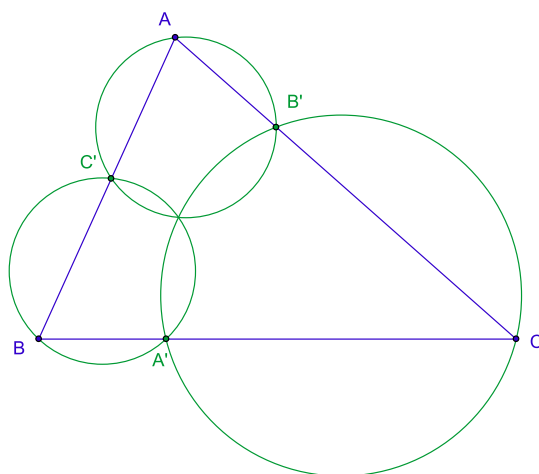
Soit ABC un triangle, P , Q , R les points de contact du cercle exinscrit dans l'angle en A avec les côtés (BC) , (CA) et (AB) . Montrer que la somme $AQ + AR$ est égale au périmètre du triangle ABC . En déduire le théorème des trois tangentes : soit A un point extérieur à un cercle Γ , (AQ) et (AR) les deux tangentes menées de A à Γ , P un point de l'arc $\widehat{QR}$ du cercle Γ situé du côté de A , B et C les points d'intersection de la tangente en P à Γ avec les droites (AR) et (AQ) ; alors le périmètre du triangle ABC ne dépend pas de P .

Exercice 53. *Droites de Simson et de Steiner*

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. Montrer qu'un point M du plan appartient au cercle circonscrit à ABC si et seulement si ses projetés orthogonaux sur les trois côtés (resp. ses symétriques par rapport aux trois côtés) sont alignés. La droite qui les porte s'appelle la *droite de Simson* (resp. la *droite de Steiner*) de ce point.



Exercice 54. Soit ABC un triangle et A' , B' , C' trois points situés respectivement sur les côtés BC , CA et AB de ce triangle et différents des sommets. Montrer que les cercles circonscrits aux trois triangles $AB'C'$, $BC'A'$ et $CA'B'$ ont un point commun.



Exercice 55. Montrer qu'un déplacement du plan qui admet deux points fixes distincts est l'identité. Que peut-on dire d'un antidéplacement du plan qui admet deux points fixes distincts ? d'une isométrie plane qui admet deux points fixes distincts ?

Exercice 56. Soit (A, B) et (A', B') deux couples de points distincts du plan affine euclidien vérifiant $AB = A'B'$. Montrer qu'il existe un et seul déplacement f (resp. un et un seul antidéplacement g) du plan vérifiant $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$ (resp. $A' = g(A)$ et $B' = g(B)$). Construire géométriquement les éléments caractéristiques de f et de g .

Exercice 57. Soient C_1 et C_2 deux cercles du plan de centres O_1 et O_2 distincts et de rayons R_1 et R_2 distincts.

1) Montrer qu'il existe exactement deux homothéties transformant C_1 en C_2 . Indiquer une construction des centres de ces homothéties.

2) Déterminer l'ensemble des centres des similitudes directes transformant C_1 en C_2 .

Exercice 58. Soit ABC un triangle, R le rayon de son cercle circonscrit, S son aire. On note H le pied de la hauteur issue de A et D le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit à ABC .

1) Montrer que les triangles AHC et ABD sont semblables.

2) En déduire la relation $AB \times BC \times CA = 4RS$.

Exercice 59. *Hauteurs et triangle orthique*

Soit ABC un triangle non aplati du plan affine euclidien et A', B', C' les pieds des hauteurs.

1) Montrer que les côtés du triangle ABC sont des bissectrices du triangle $A'B'C'$.

On suppose que le triangle ABC a tous ses angles aigus. Montrer que les hauteurs AA' , BB' et CC' du triangle ABC sont les bissectrices intérieures du triangle $A'B'C'$.

2) Soient P, Q, R trois points distincts situés respectivement sur les côtés BC, CA et AB du triangle ABC et tels que les côtés du triangle ABC soient des bissectrices du triangle PQR et $f = s_{AB} \circ s_{CA} \circ s_{BC}$ la composée des réflexions d'axes ces côtés. Montrer que f est une symétrie glissée laissant globalement invariante la droite PR . En déduire que cette droite est l'axe de la symétrie glissée f , puis que les points P, Q, R sont les pieds des hauteurs du triangle ABC .

Exercice 60. Soit D une droite du plan affine euclidien et P et Q deux points du plan situés d'un même côté de cette droite. Déterminer le point I de la droite D qui minimise la somme $PI + IQ$.

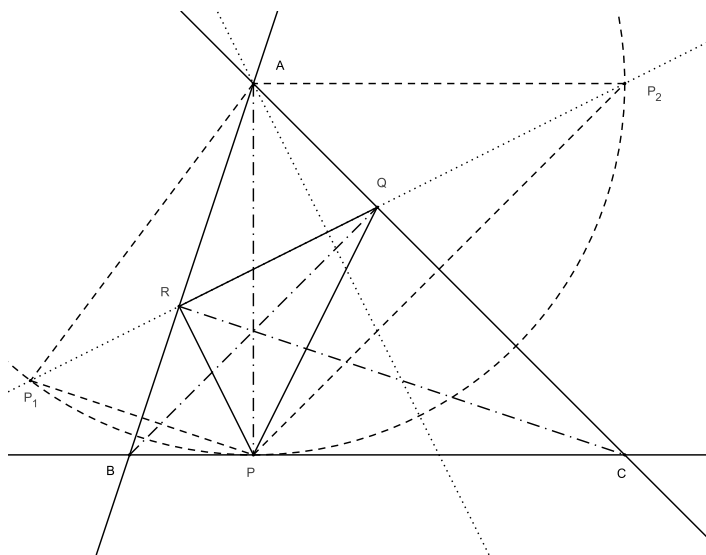
Exercice 61. *Problème de Fagnano*

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien dont tous les angles sont aigus. On cherche à déterminer un triangle de périmètre minimal inscrit dans le triangle ABC , c'est-à-dire un triangle PQR dont les sommets P, Q et R appartiennent respectivement aux côtés BC, CA et AB du triangle et tel que la somme $PQ + QR + RP$ soit minimale.

1) Montrer en utilisant l'exercice précédent que si P, Q et R sont trois points intérieurs aux côtés du triangle ABC tels que le triangle PQR soit solution de ce

problème, alors les côtés du triangle ABC sont les bissectrices extérieures du triangle PQR . En déduire que les points P, Q, R sont les pieds des hauteurs du triangle ABC .

2) Soit P le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC , P_1 et P_2 les symétriques de P par rapport à AB et AC . Montrer que les points P_1, R, Q et P_2 sont alignés et que le périmètre du triangle PQR est égal à P_1P_2 . Exprimer ce périmètre en fonction de AP et de l'angle en A du triangle ABC . En déduire que le problème de minimisation admet une solution unique donnée par les pieds des hauteurs.



Exercice 62. *Isométries du rectangle et du losange*

Déterminer le groupe des isométries planes conservant :

1. un carré ;
2. un rectangle qui n'est pas un carré ;
3. un losange qui n'est pas un carré ;
4. un parallélogramme qui n'est ni un rectangle ni un losange.

Exercice 63. L'espace affine euclidien E de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé. Déterminer la nature géométrique de la transformation f de E qui à un point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M' de coordonnées (x', y', z') définies par :

$$\begin{cases} x' = \frac{x + y - \sqrt{2}z - 3 + \sqrt{2}}{2} \\ y' = \frac{x + y + \sqrt{2}z - 1 - \sqrt{2}}{2} \\ z' = \frac{\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2 + \sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

(on précisera les éléments caractéristiques de cette transformation).

Exercice 64. L'espace affine euclidien E de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé. Déterminer la nature géométrique de la transformation de E qui à un point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M' de coordonnées (x', y', z') définies par :

$$\begin{cases} x' = \frac{x - 2y - 2z - 1}{3} \\ y' = \frac{-2x + y - 2z + 5}{3} \\ z' = \frac{-2x - 2y + z + 2}{3} \end{cases}$$

(on précisera les éléments caractéristiques de cette transformation).

Exercice 65. Soit E un espace affine euclidien de dimension 3, $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de E , A, B, C les points de E définis par $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{k}$. Déterminer le groupe G des isométries de E laissant globalement invariant l'ensemble $\{O, A, B, C\}$. Préciser la nature géométrique des éléments de G et écrire les matrices de leurs parties linéaires dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\vec{E}$. Montrer que G est isomorphe au groupe des permutations de trois éléments.

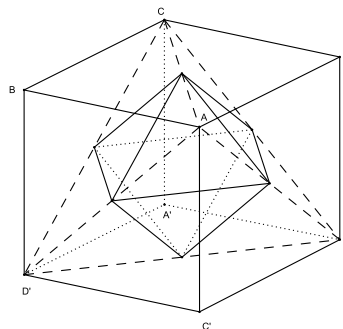
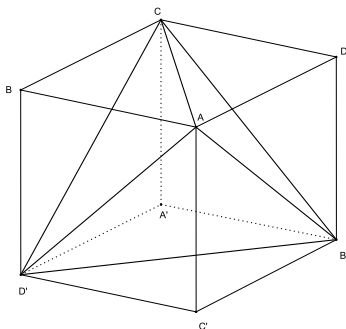
Exercice 66. Soit E un espace affine euclidien de dimension 3, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ une base orthonormée de l'espace vectoriel $\vec{E}$ associé, A et B deux points de E vérifiant $\overrightarrow{AB} = \vec{k}$. On note D_1 la droite de vecteur directeur $\vec{i}$ passant par A , D_2 la droite de vecteur directeur $\vec{j}$ passant par B , et, pour $i = 1, 2$, s_i le retournement d'axe D_i .

- 1) Écrire les matrices des parties linéaires de s_1 , s_2 , $s_2 \circ s_1$ et $s_1 \circ s_2$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- 2) Montrer que $f = s_2 \circ s_1$ est un vissage dont on précisera l'axe et le vecteur.
- 3) Calculer f^2 . Déterminer les images $f(A)$ et $f(B)$ de A et B par f .
- 4) Soit G le sous-groupe du groupe des isométries de E engendré par s_1 et s_2 . Montrer qu'il existe une droite de E globalement invariante par tout élément de G .
- 5) Décrire géométriquement tous les éléments de G .

Exercice 67. *Isométries du cube, du tétraèdre et de l'octaèdre*

Soit $ABCD A' B' C' D'$ un cube de diagonales AA' , BB' , CC' , DD' dont le carré $ABCD$ est une face. On se propose de déterminer le groupe G des isométries de l'espace conservant ce cube et de comparer ce groupe aux groupes des isométries du tétraèdre et de l'octaèdre.

- 1) Montrer que tout élément de G transforme toute diagonale du cube en une diagonale du cube. En déduire que tout élément de G laisse globalement invariant l'ensemble des sommets du cube. Réciproquement, montrer que toute isométrie de l'espace laissant globalement invariant l'ensemble des sommets du cube conserve le cube.



2) Soit φ l'application de G dans l'ensemble $\mathcal{S}$ des permutations des diagonales du cube qui à tout élément de G associe la permutation induite sur l'ensemble des diagonales. Montrer que φ est un morphisme de groupes et que sa restriction au sous-groupe G^+ des isométries directes de G est injective.

3) Identifier les éléments de G^+ et montrer que φ est un isomorphisme de G^+ sur $\mathcal{S}$.

4) En considérant la symétrie centrale de centre le centre du cube, montrer que G est isomorphe au produit direct de $\mathcal{S}$ par un groupe à 2 éléments.

5) Soit $T_1 = ACD'B'$ et $T_2 = A'C'DB$ les deux tétraèdres réguliers dont les arêtes sont les diagonales des faces du cube. Montrer que l'ensemble G_1 des éléments de G qui conservent T_1 est un sous-groupe de G , et que G est réunion disjointe de G_1 et de l'ensemble G_2 des éléments de G qui échangent T_1 et T_2 . Retrouver ainsi la structure de G (on rappelle que le groupe des isométries du tétraèdre régulier est isomorphe au groupe des permutations de 4 éléments).

6) Montrer que les ensembles des milieux des arêtes de T_1 et de T_2 sont les mêmes (ces milieux sont aussi les centres de gravité des faces du cube) et que ces milieux constituent les sommets d'un octaèdre régulier. Montrer que tout élément de G conserve cet octaèdre. En déduire une injection naturelle du groupe du tétraèdre dans celui de l'octaèdre.

7) Montrer que les groupes des isométries du cube et de l'octaèdre sont isomorphes.

Exercice 68. Isométries de l'hélice circulaire

Soit, dans l'espace affine euclidien E de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, H l'hélice circulaire de représentation paramétrique $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = at$, $t \in \mathbb{R}$, où R et a sont deux réels strictement positifs donnés.

1) Montrer que toute isométrie de $\mathbb{R}$ est de la forme $t \mapsto t + b$ ou $t \mapsto 2b - t$ pour un certain réel b .

2) Montrer que pour toute isométrie φ de $\mathbb{R}$, il existe un et un seul déplacement de E qui transforme, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point de paramètre t de H en le point de paramètre $\varphi(t)$ de H . Un tel déplacement conserve donc l'hélice. Expliciter la nature géométrique de ce déplacement (on discutera suivant la valeur de φ).

3) Montrer que toute isométrie conservant l'hélice H conserve l'axe Oz du repère. En déduire que les déplacements décrits à la question précédente sont les seuls à conserver H et que le groupe des déplacements de l'hélice est donc isomorphe au groupe des déplacements de la droite.

4) Montrer qu'il n'existe pas d'antidépacement de E qui conserve H .

Exercice 69. Montrer qu'une application f du plan complexe dans lui-même est affine si et seulement si elle est de la forme $f(z) = az + b\bar{z} + c$ pour 3 nombres complexes a, b et c . Donner l'expression complexe de $\vec{f}$, ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que f soit bijective.

Exercice 70. Montrer que tout cercle du plan complexe est défini par une équation de la forme $z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z + c = 0$, où a est un nombre complexe et c un réel vérifiant $c - |a|^2 < 0$. Montrer que réciproquement toute équation de ce type est celle d'un cercle.

Exercice 71. Soient a et b deux nombres complexes non nuls. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $|a + b| = |a| + |b|$. Interpréter géométriquement cette condition.

Exercice 72. Soient A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b, c .

1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que l'origine O soit le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que l'origine O soit le centre de gravité du triangle ABC .

3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la somme de trois nombres complexes non nuls de même module soit nulle.

Exercice 73. Soient f et g les deux applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par $f(z) = (1 + i)z - 1$, $g(z) = (1 - i)z - i$. Donner la nature géométrique de f , g et $g \circ f$ (on précisera les éléments caractéristiques de chacune de ces transformations).

Exercice 74. Déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques des applications f et g de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par $f(z) = 2j\bar{z} + j^2$ et $g(z) = j\bar{z} + j^2$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Exercice 75. Soient A, B, A', B' quatre points distincts du plan d'affixes respectives a, b, a', b' .

1) Montrer l'équivalence de :

(i) l'unique similitude directe f transformant A en A' et B en B' admet un point fixe ;

(ii) l'unique similitude directe g transformant A en B et A' en B' admet un point fixe.

2) On suppose cette condition remplie. Donner les expressions complexes de f et de g . Montrer que f et g ont même centre.

3) Retrouver géométriquement ce résultat.

Exercice 76. Montrer quatre points distincts d'affixes respectives z_1, z_2, z_3, z_4 sont alignés ou cocycliques si et seulement si leur *birapport* $\frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}$ est réel.

Exercice 77. *Théorème de Ptolémée*

Soient A, B, C, D quatre points du plan complexe, d'affixes respectives a, b, c et d .

1) Montrer qu'on a toujours l'inégalité :

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC \quad (*)$$

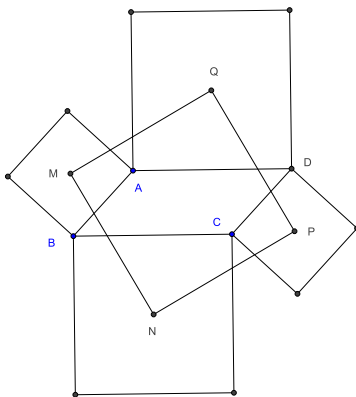
(le produit des longueurs des diagonales d'un quadrilatère est inférieur à la somme des produits des longueurs des côtés opposés).

2) Montrer qu'on a égalité dans $(*)$ si et seulement si les quatre points A, B, C, D sont cocycliques ou alignés dans cet ordre.

Exercice 78. Montrer que toute application linéaire non nulle d'un espace vectoriel euclidien dans lui-même qui préserve l'orthogonalité est une similitude.

Exercice 79. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les affixes a, b, c de trois points A, B, C du plan complexe pour que le triangle ABC soit équilatéral.

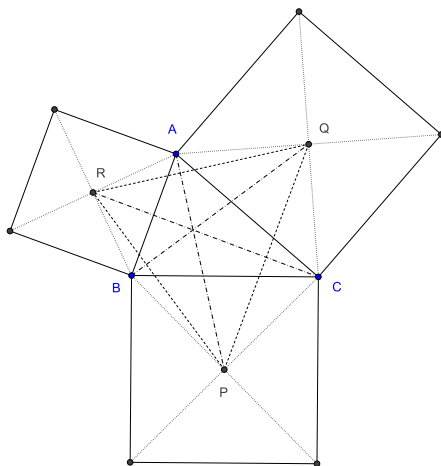
Exercice 80. On construit à l'extérieur d'un parallélogramme $ABCD$ quatre carrés de bases les côtés et de centres M, N, P, Q .



1) Calculer les affixes des points M, N, P, Q en fonction des affixes de A, B, C, D .

2) En déduire que $MNPQ$ est un carré.

Exercice 81. À l'extérieur d'un triangle ABC , on construit trois carrés de bases les côtés et de centres P, Q, R . Montrer que les segments $[AP]$ et $[QR]$ (resp. $[BQ]$ et $[RP]$, $[CR]$ et $[PQ]$) sont orthogonaux et de même longueur. En déduire que les droites (AP) , (BQ) et (CR) sont concourantes.



2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1. Soit E un espace vectoriel euclidien, A une partie non vide quelconque de E , $A^\perp$ son orthogonal.

- ☐ A $A = \{0\}$ si et seulement si $A^\perp = E$.
- ☐ B $(A^\perp)^\perp = A$.
- ☐ C $A = E$ si et seulement si $A^\perp = \{0\}$.
- ☐ D Si A est un sous-espace vectoriel de E , alors $\dim(A) = \dim(A^\perp)$.
- ☐ E $(A^\perp)^\perp = A$ si et seulement si A est un sous-espace vectoriel de E .

Question 2. Soit $n \geq 2$ un entier et A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels.

- ☐ A A est orthogonale si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.
- ☐ B Si A est orthogonale, alors $\det(A) = 1$.
- ☐ C Si A est orthogonale, ses vecteurs lignes sont deux à deux orthogonaux.
- ☐ D Si tA est orthogonale, alors A est orthogonale.
- ☐ E Si les vecteurs colonnes de A sont deux à deux orthogonaux, alors A est orthogonale.

Question 3. Soit E un espace vectoriel euclidien, $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E , $(v_1, \dots, v_n)$ une base quelconque de E , $(e'_1, \dots, e'_n)$ la base orthonormée de E obtenue à partir de la base $(v_1, \dots, v_n)$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, P la matrice de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ à la base $(v_1, \dots, v_n)$, Q la

matrice de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ à la base $(e'_1, \dots, e'_n)$, R la matrice de passage de la base $(v_1, \dots, v_n)$ à la base $(e'_1, \dots, e'_n)$.

- ☐ A $Q = RP$.
- ☐ B R est triangulaire inférieure.
- ☐ C Q est orthogonale.
- ☐ D $\det(P) = \det(R)$.
- ☐ E $Q = PR$.

Question 4. Soit E un espace vectoriel euclidien, f une application linéaire de E dans E .

- ☐ A Si f est un endomorphisme symétrique de E , sa matrice dans toute base de E est symétrique.
- ☐ B S'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est symétrique, alors la matrice de f dans toute base orthonormée de E est symétrique.
- ☐ C Si f est symétrique, alors f est diagonalisable.
- ☐ D Si $f \circ f = f$, alors f est symétrique.
- ☐ E Si $f \circ f = id_E$, alors f est symétrique.

Question 5. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, u, v, w des vecteurs quelconques de E .

- ☐ A $u \wedge v = 0$ si et seulement si u et v sont colinéaires.
- ☐ B $\det(u, v, u \wedge v) = 0$.
- ☐ C $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormée de E .
- ☐ D $\det(u, v, w) = \langle v \wedge w, u \rangle$.
- ☐ E $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$.

Question 6. Dans un espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée, les matrices suivantes sont des matrices de rotations :

- ☐ A $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- ☐ B $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
- ☐ C $C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$;
- ☐ D $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;
- ☐ E $E = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Question 7. Tous les triangles considérés sont supposés non aplatis.

- ☐ A Le centre du cercle circonscrit à un triangle est toujours intérieur à ce triangle.
- ☐ B L'orthocentre d'un triangle est toujours intérieur à ce triangle.
- ☐ C Le centre de gravité d'un triangle est toujours intérieur à ce triangle.
- ☐ D Il existe un point du plan et un seul équidistant des trois droites portant les côtés d'un triangle.
- ☐ E Pour tout triangle, l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont alignés.

Question 8. On se place dans un plan affine euclidien.

- ☐ A Le composé de deux rotations est toujours une rotation ou une translation.
- ☐ B Étant donné deux droites sécantes, il existe toujours une rotation et une seule transformant la première en la seconde.
- ☐ C Étant donné deux points distincts, il existe toujours une réflexion et une seule échangeant ces deux points.
- ☐ D Le composé d'une réflexion et d'une translation est toujours une réflexion.
- ☐ E Le composé d'une réflexion et d'une rotation est toujours une réflexion.

Question 9. On se place dans un espace affine euclidien de dimension 3.

- ☐ A Si f et g sont deux rotations d'axes sécants, alors $f \circ g = g \circ f$.
- ☐ B Si f et g sont deux rotations d'axes sécants, alors $f \circ g$ est une rotation.
- ☐ C Si P et Q sont deux plans non parallèles, alors le composé des réflexions de plans P et Q est une rotation.
- ☐ D Le composé de deux demi-tours est toujours une rotation.
- ☐ E Le composé d'une rotation et d'une symétrie centrale est une rotation ou un vissage.

Question 10. On se place dans le plan complexe.

- ☐ A L'application $z \mapsto 2z - \bar{z}$ est une similitude.
- ☐ B L'application $z \mapsto 2z - 1$ est une homothétie de centre $z_0 = -1$.
- ☐ C L'application $z \mapsto -\bar{z}$ est la réflexion d'axe Oy .
- ☐ D L'application $z \mapsto -iz + 2$ est une rotation d'angle droit.
- ☐ E L'application $z \mapsto -2\bar{z} + 2$ est une réflexion.

Réponses : 1-AE 2-CD 3-CE 4-BC 5-AD 6-DE 7-CE 8-AC 9-BC 10-CD

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Questions de cours :

1. Rappeler la définition de l'orthogonal d'une partie d'un espace vectoriel euclidien . Donner une relation entre les dimensions d'un sous-espace vectoriel et de son orthogonal.
2. Rappeler les définitions du produit mixte et du produit vectoriel dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur deux vecteurs pour que la norme de leur produit vectoriel soit nulle (resp. égale au produit de leurs normes).
3. Énoncer le théorème de diagonalisation des endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien . Caractériser la plus grande et la plus petite valeur propre d'un endomorphisme symétrique f d'un tel espace E en fonction des produits scalaires $\langle x, f(x) \rangle$ pour $x \in E$.
4. Soient $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ des réels. Montrer l'équivalence des deux propriétés :

$$(\mathcal{P}_1) \quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1 \\ aa' + bb' + cc' = a'a'' + b'b'' + c'c'' = aa'' + bb'' + cc'' = 0 \end{cases}$$

et

$$(\mathcal{P}_2) \quad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = b^2 + b'^2 + b''^2 = c^2 + c'^2 + c''^2 = 1 \\ ab + a'b' + a''b'' = bc + b'c' + b''c'' = ac + a'c' + a''c'' = 0 . \end{cases}$$

5. Donner l'écriture complexe d'une similitude directe du plan complexe. Déterminer les éléments caractéristiques (rapport, angle, points fixes) d'une similitude directe donnée sous forme complexe.

Exercice 1 : Soit A et B deux points distincts du plan affine euclidien E et k un réel strictement positif différent de 1. On se propose d'étudier l'ensemble Γ des points M de E vérifiant $\frac{MA}{MB} = k$:

$$\Gamma = \left\{ M \in E \mid \frac{MA}{MB} = k \right\} .$$

1. Montrer qu'un point M du plan appartient à Γ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux.
2. Montrer qu'il existe un point J (resp. K) du plan et un seul tel que $\overrightarrow{JA} - k\overrightarrow{JB} = \vec{0}$ (resp. $\overrightarrow{KA} + k\overrightarrow{KB} = \vec{0}$). Exprimer, pour tout point M du plan, le vecteur $\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}$ (resp. $\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}$) en fonction du vecteur $\overrightarrow{MJ}$ (resp. $\overrightarrow{MK}$).
3. En déduire que Γ est un cercle dont on précisera le centre.
4. Soit G le barycentre du système pondéré $[(A, 1), (B, -k^2)]$. Exprimer, pour tout point M du plan, $MA^2 - k^2 MB^2$ en fonction de MG^2 , GA^2 et GB^2 . Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

5. Montrer que la puissance $pr(I)$ du milieu I de $[AB]$ par rapport au cercle Γ est égale à IA^2 . En déduire que le cercle Γ et le cercle de diamètre $[AB]$ sont orthogonaux.
6. Montrer que tout cercle passant par les deux points A et B est orthogonal à Γ .

Exercice 2 :

Le but de cet exercice est d'étudier le groupe des isométries du tétraèdre régulier et en particulier de montrer que ce groupe est isomorphe au groupe $\mathcal{S}_4$ des permutations de quatre éléments. On considère donc un tétraèdre régulier $ABCD$ de l'espace affine euclidien E de dimension 3 et on note G le groupe des isométries de E laissant globalement invariant l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ des sommets de ce tétraèdre. On note G^+ le sous-ensemble de G constitué des isométries directes et G^- le sous-ensemble de G constitué des isométries indirectes.

1. Montrer qu'il existe un point O de E fixe par tout élément de G .
 2. Montrer que tout élément g de G induit une permutation $\varphi(g)$ des sommets du tétraèdre et que l'application φ ainsi définie est un homomorphisme injectif du groupe G dans le groupe $\mathcal{S}$ des permutations de ces sommets.
 3. Soit I le milieu du segment $[AB]$. Montrer que le plan (CDI) est le plan médiateur de $[AB]$. En déduire qu'il existe dans G une réflexion échangeant les points A et B et laissant fixes C et D .
 4. Montrer que l'image $\varphi(G)$ de φ contient toutes les transpositions des sommets. En déduire que φ est surjectif. On rappelle qu'une transposition est une permutation échangeant deux éléments et laissant les autres fixes et que les transpositions engendrent le groupe symétrique.
 5. En déduire les cardinaux de G , G^+ et G^- et montrer que l'image $\varphi(G^+)$ de G^+ par φ est égale au groupe alterné (sous-groupe de $\mathcal{S}$ constitué des permutations de signature $+1$).
 6. Montrer que tous les éléments de G^+ autres que l'identité sont des rotations. Préciser les axes et les angles de ces rotations.
 7. Montrer que G^- contient exactement 6 réflexions dont on précisera les plans. Donner la nature géométrique et l'ordre dans le groupe G des autres éléments de G^- .
-

2.5 Corrigé du devoir

Questions de cours :

1. L'orthogonal d'une partie A d'un espace vectoriel euclidien E est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tout vecteur de A :

$$A^\perp = \{u \in E \mid \langle u, x \rangle = 0 \quad \forall x \in A\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E .

Si F est un sous-espace vectoriel de E , on a $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.

2. Le produit mixte $\det(u, v, w)$ de trois vecteurs u, v, w d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 est le déterminant de ces trois vecteurs évalué dans une base orthonormée directe (ce déterminant ne dépend pas du choix d'une telle base).

Le produit vectoriel de deux vecteurs u et v d'un tel espace E est l'unique vecteur $u \wedge v$ vérifiant $\det(u, v, x) = \langle u \wedge v, x \rangle$ pour tout vecteur x de E .

3. Pour tout endomorphisme symétrique f d'un espace vectoriel euclidien E , il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f . La matrice de f dans une telle base est donc diagonale.

La plus grande et la plus petite des valeurs propres de f sont données par

$$\lambda_{\max} = \sup_{x \neq 0} \frac{\langle x, f(x) \rangle}{\|x\|^2} = \sup_{\|x\|=1} \langle x, f(x) \rangle .$$

resp.

$$\lambda_{\min} = \inf_{x \neq 0} \frac{\langle x, f(x) \rangle}{\|x\|^2} = \inf_{\|x\|=1} \langle x, f(x) \rangle .$$

4. Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$. Les relations $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$) expriment que

$A {}^tA = I_3$ (resp. ${}^tAA = I_3$). Elles sont donc vérifiées si et seulement si A est inversible et a pour inverse sa transposée, i.e. si et seulement si A est orthogonale, et sont donc équivalentes.

5. Toute similitude directe du plan complexe s'écrit sous la forme $z \mapsto az + b$ pour un nombre complexe b et un nombre complexe non nul a . Le rapport d'une telle similitude est $|a|$ et son angle $\text{Arg}(a)$. Elle admet comme unique point fixe $z = \frac{b}{1-a}$ si $a \neq 1$. Si $a = 1$ et $b \neq 0$, la similitude est une translation de vecteur non nul et n'admet pas de point fixe. Si $a = 1$ et $b = 0$, c'est l'identité et tout point est fixe.

Exercice 1 :

1. Un point M de E appartient à Γ si et seulement si $MA^2 - k^2MB^2 = 0$, soit encore $(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0$.
2. L'égalité $\overrightarrow{JA} - k\overrightarrow{JB} = \vec{0}$ signifie que J est le barycentre du système pondéré $[(A, 1), (B, -k)]$. Ce barycentre existe et est unique puisque $1 - k \neq 0$. On a alors, pour tout point M de E :

$$\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA}) - k(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}) = (1 - k)\overrightarrow{MJ} .$$

De même, le point K est le barycentre du système pondéré $[(A, 1), (B, k)]$ et on a, pour tout point M de E :

$$\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA}) + k(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB}) = (1 + k)\overrightarrow{MK}.$$

3. L'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}$ équivaut donc à l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{MK}$. Un point M de E appartient à Γ si et seulement si ces vecteurs sont orthogonaux, on en déduit que Γ est le cercle de diamètre $[JK]$. Son centre est le milieu de ce segment et appartient donc à la droite (AB) , puisque ces deux points sont situés sur cette droite (K appartient au segment $[AB]$ et J au complémentaire de ce segment dans la droite).
4. Le barycentre du système pondéré $[(A, 1), (B, -k^2)]$ est bien défini puisque $1 - k^2 \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned} MA^2 - k^2 MB^2 &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 - k^2 (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 \\ &= MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + GA^2 - k^2 (MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + GB^2) \\ &= (1 - k^2) MG^2 + GA^2 - k^2 GB^2 \end{aligned}$$

puisque $\overrightarrow{GA} - k^2 \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Un point M de E appartient à Γ si et seulement si $MA^2 - k^2 MB^2 = 0$, i.e. si et seulement si

$$MG^2 = \frac{k^2 GB^2 - GA^2}{1 - k^2}$$

ce qui montre que Γ est un cercle de centre G (Γ n'est pas vide puisqu'il contient les deux points J et K). On pouvait vérifier directement que G est le milieu du segment $[JK]$, cette propriété découle aussi des deux dernières questions.

5. La puissance $p_\Gamma(I)$ du milieu I de $[AB]$ par rapport au cercle Γ est égale à $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK}$, puisque la droite (AB) coupe le cercle Γ en J et K .

En faisant $M = I$ dans le résultat de la question 2, on obtient les relations

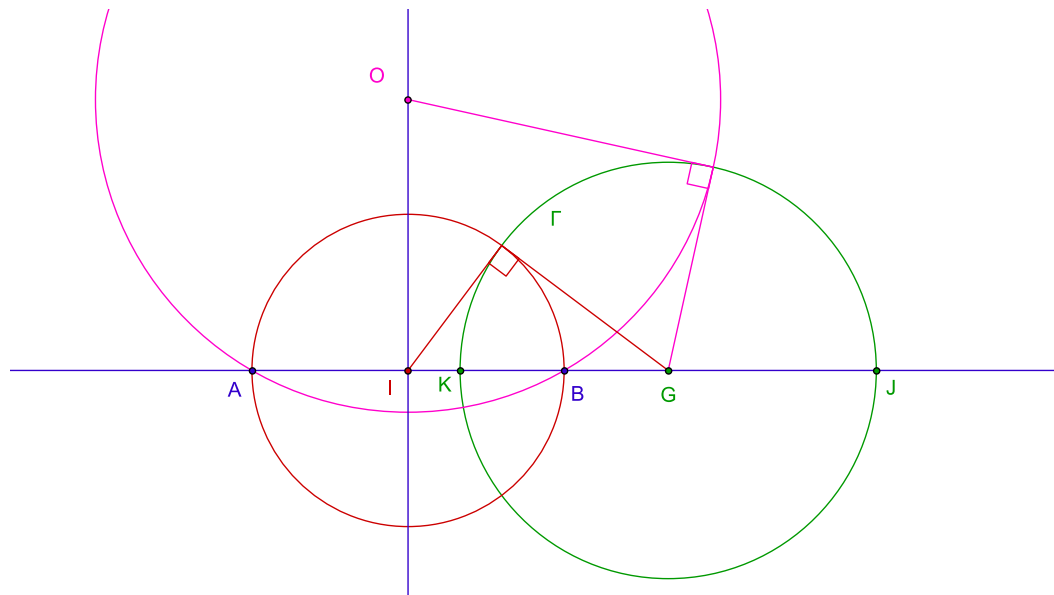
$$\begin{aligned} (1 - k) \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} - k \overrightarrow{IB} \\ (1 + k) \overrightarrow{IK} &= \overrightarrow{IA} + k \overrightarrow{IB}. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} (1 - k^2) \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} &= (\overrightarrow{IA} - k \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{IA} + k \overrightarrow{IB}) \\ &= IA^2 - k^2 IB^2 \\ &= (1 - k^2) IA^2 \end{aligned}$$

puisque $IA = IB$, d'où $p_\Gamma(I) = IA^2$, ce qui montre que le cercle Γ et le cercle de diamètre $[AB]$ sont orthogonaux.

6. La puissance du centre G du cercle Γ par rapport au cercle de diamètre $[AB]$ est égale au carré R^2 du rayon de Γ , puisque ces deux cercles sont orthogonaux. Mais la puissance de G par rapport à tout cercle passant par les deux points A et B est égale à la puissance de G par rapport au cercle de diamètre $[AB]$, puisqu'elle vaut $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB}$. Il en résulte que Γ est orthogonal à tout cercle passant par A et B .



Exercice 2 :

1. L'isobarycentre O des sommets A, B, C, D du tétraèdre est fixe par tout élément de G , puisqu'une isométrie est une transformation affine et qu'une transformation affine conserve les barycentres.
2. Tout élément de G permute les sommets du tétraèdre et induit donc une permutation de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$. L'application φ qui associe à tout élément de G sa restriction à l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ est un homomorphisme du groupe G dans le groupe $\mathcal{S}$ des permutations de ces sommets. Cet homomorphisme est injectif, puisque (A, B, C, D) constitue un repère affine de E et qu'une transformation affine est entièrement déterminée par les images des points d'un repère affine.
3. Le tétraèdre $ABCD$ étant régulier, on a $CA = CB$ et $DA = DB$, ce qui montre que C et D appartiennent au plan médiateur du segment $[AB]$. Le milieu I de $[AB]$ appartient également à ce plan. Les trois points C, D, I ne sont pas alignés et déterminent donc un plan, qui est le plan médiateur de $[AB]$. Ce plan est perpendiculaire en I à la droite (AB) et la symétrie orthogonale par rapport à ce plan échange les points A et B . Elle laisse fixe les points C et D et a donc comme image par φ la transposition échangeant A et B .

4. En procédant de même avec les autres arêtes du tétraèdre, on voit que G contient 6 réflexions de plans les plans médiateurs des 6 arêtes, dont les images par φ sont les 6 transpositions que contient le groupe $\mathcal{S}$. Ces transpositions engendrent le groupe $\mathcal{S}$. Comme l'image $\varphi(G)$ du groupe G par l'homomorphisme de groupes φ est un sous-groupe de $\mathcal{S}$, cette image est égale à $\mathcal{S}$. L'homomorphisme φ est donc surjectif; comme il est injectif, c'est un isomorphisme de G sur $\mathcal{S}$.
5. Il en résulte que G , étant en bijection avec $\mathcal{S}$, a même cardinal que $\mathcal{S}$, i.e. $4!=24$. G est réunion disjointe de G^+ et de G^- et ces deux ensembles ont le même nombre d'éléments : en effet G^- n'est pas vide, puisqu'il contient les 6 réflexions précédemment trouvées et l'application $g \mapsto s \circ g$, où s est l'une quelconque de ces réflexions, est une bijection de G^+ sur G^- . Il en résulte que G^+ et G^- ont tous deux 12 éléments.
6. Les éléments de G^+ autres que l'identité sont des déplacements de E ayant un point fixe O , donc des rotations d'axes passant par O . Pour chaque sommet du tétraèdre, la perpendiculaire à la face opposée à ce sommet passant par ce sommet rencontre la face opposée au centre de gravité de cette face. Les rotations d'angles $\pm \frac{2\pi}{3}$ autour de cet axe appartiennent donc à G . Leurs images par φ sont les 8 cycles de longueur 3 que contient $\mathcal{S}$. Par ailleurs, les demi-tours d'axes les bimédianes du tétraèdres (droites joignant les milieux de deux arêtes opposées) appartiennent à G , puisque ces bimédianes sont perpendiculaires aux arêtes dont elles joignent les milieux (par exemple si J est le milieu de $[CD]$, la droite (IJ) est incluse à la fois dans le plan médiateur de $[AB]$ et dans le plan médiateur de $[CD]$). On obtient ainsi 3 demi-tours d'axes les 3 bimédianes, dont les images par φ sont les 3 produits de deux transpositions de supports disjoints que contient $\mathcal{S}$. Le groupe G^+ des déplacements conservant le tétraèdre contient donc 8 éléments d'ordre 3, 3 éléments d'ordre 2 et un élément d'ordre 1 (l'identité).
7. On a déjà vu que G^- contenait 6 réflexions de plans les plans médiateurs des arêtes du tétraèdre. L'image par φ d'une réflexion est un élément d'ordre 2 de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire une transposition ou un produit de deux transpositions de supports disjoints. G ne peut donc contenir d'autre réflexions que les 6 déjà trouvées. Les autres éléments de G sont donc des antirotations d'axes et de plans passant par O . Ils ont pour images par φ les 6 permutations circulaires des quatre sommets et sont donc d'ordre 4 dans G . Si $s \circ r = r \circ s$ est la décomposition canonique d'une telle antirotation, avec s une réflexion et r une rotation d'axe perpendiculaire au plan de la réflexion, $(s \circ r)^2 = r^2$ doit être un élément d'ordre 2 de G^+ , i.e. un des trois demi-tours d'axes les bimédianes. La rotation r a donc pour axe une bimédiane et pour angle $\pm \frac{\pi}{2}$ et le plan de s est le plan perpendiculaire en O à cette bimédiane, i.e. le plan médiateur du segment joignant les milieux de deux arêtes opposées (ce plan contient les milieux des 4 autres arêtes).

3 Compléments

3.1 Constructions à la règle et au compas

Pendant des siècles, les *Éléments* d'Euclide ont été le livre de référence en géométrie. Ce traité, écrit vers 300 avant J.-C., constitue la première tentative connue d'une présentation axiomatique de la géométrie. Toutes les constructions y sont effectuées à la règle et au compas et les problèmes de construction à la règle et au compas sont restés longtemps au cœur des problèmes de la géométrie classique, en raison non seulement de la simplicité de ces instruments, mais aussi de la pureté mathématique des objets qu'ils permettent de construire, les droites et les cercles.

Très vite cependant, les grecs se sont aperçus de la difficulté de tracer certaines figures au seul moyen de ces seuls instruments. Trois problèmes classiques de la géométrie grecque sont ainsi restés célèbres : celui de la quadrature du cercle, dont le nom est passé dans le langage courant pour désigner une tâche impossible, celui de la duplication du cube, et celui de la trisection de l'angle.

Le premier consiste à construire un carré de même aire qu'un disque donné (autrement dit à construire le nombre $\sqrt{\pi}$), le second à construire l'arête d'un cube de volume double d'un cube donné (autrement dit à construire le nombre $\sqrt[3]{2}$), et le dernier à diviser en trois angles égaux un angle donné, toutes ces constructions devant s'effectuer à la règle et au compas seuls.

Précisons ce qu'on entend par construction à la règle et au compas : il s'agit de construire, à partir d'un certain nombre de points donnés, d'autres points au moyen d'une règle non graduée et d'un compas fixe (il est impossible de reporter des distances au moyen d'un tel compas, la seule opération possible est de tracer un cercle de centre déjà construit passant par un point déjà construit).

Un autre problème classique est celui de la construction des polygones réguliers. Il est facile de construire à la règle et au compas un triangle équilatéral ou un carré, et, par suite, les polygones réguliers à 6, 12, 8, 16, ... côtés (comme la construction des bissectrices se fait aisément à la règle et au compas, si on sait construire un polygone régulier à n côtés, on sait construire les polygones réguliers à $2^a n$ côtés pour tout entier a). Pour le pentagone régulier, c'est un peu plus difficile, mais la construction figurait déjà dans les *Éléments*. Le problème de la construction de l'heptagone (polygone régulier à 7 côtés) a tenu longtemps les géomètres en échec et les grecs avaient sans doute déjà pressenti l'impossibilité de sa construction.

Mais la démonstration de l'impossibilité de ces constructions nécessitait l'introduction d'outils mathématiques nouveaux, des outils issus de l'algèbre, en particulier la théorie des corps, outils qui ne se sont développés qu'au début du XIX^{ème} siècle.

Il fallut en effet attendre plus de vingt siècles pour que C. F. Gauss (1777-1855) démontre, en 1796, alors qu'il était âgé de 18 ans et encore étudiant à l'Université de Göttingen, que l'on pouvait construire à la règle et au compas un polygone régulier à 17 côtés. Quelques années à peine plus tard, en 1801, il énonce dans son livre *Disquisitiones*

Arithmeticae le théorème suivant :

Théorème 4. *Un polygone régulier à n côtés peut être construit à la règle et au compas si et seulement si n se décompose sous la forme*

$$n = 2^r p_1 \dots p_s$$

où r est un entier positif ou nul et les p_i ($i = 1, \dots, s$) des nombres premiers de Fermat distincts.

(Un nombre premier est dit *de Fermat* s'il est de la forme $2^a + 1$ pour un entier a . On montre assez facilement qu'alors a doit être une puissance de 2, mais tous les nombres de la forme 2^{2^m} ne sont pas premiers. En fait les seuls nombres de Fermat premiers connus sont 3, 5, 17, 257 et 65 537, correspondant à $m = 0, 1, 2, 3, 4$.)

En fait, Gauss démontre seulement que la condition énoncée est suffisante et conjecture qu'elle est nécessaire. C'est P.-L. Wantzel (1814-1848) qui en a démontré la nécessité en 1827, alors qu'il était encore élève-ingénieur des Ponts et Chaussées. C'est pourquoi ce théorème est connu sous le nom de *théorème de Gauss-Wantzel*.

Il en découle immédiatement qu'il n'est pas possible de construire à la règle et au compas un polygone régulier à 9 côtés, et donc de trisecter un angle de $\pi/3$, d'où :

Corollaire 12. *Il est impossible de trisecter tous les angles à la règle et au compas.*

Pour le problème de la quadrature du cercle, il faudra attendre la démonstration en 1882 de la transcendance de π par F. von Lindemann (1852-1939) pour en démontrer l'impossibilité. Un nombre est dit *algébrique* s'il est racine d'une équation polynomiale à coefficients entiers, *transcendant* sinon. Tous les nombres constructibles à la règle et au compas sont algébriques, et si $\sqrt{\pi}$ était algébrique, π le serait aussi, ce qui démontre l'impossibilité de la quadrature du cercle.

Constatant (sans savoir la démontrer) l'impossibilité de certaines de ces constructions, les grecs avaient essayé de contourner le problème en autorisant d'autres instruments que la règle et le compas, en particulier l'utilisation de courbes auxiliaires tracées, soit point par point, soit mécaniquement.

À l'opposé, on peut se demander lesquelles de ces constructions restent possibles à l'aide, soit du compas seul, soit de la règle seule.

Pour le compas, la réponse est simple :

Théorème 5. *Toute construction d'un point du plan pouvant être effectuée à la règle et au compas peut être effectuée au compas seul.*

Ce théorème, démontré en 1797 par l'italien L. Mascheroni (1750-1800) dans son livre *Geometria del Compasso*, est aujourd'hui appelé *théorème de Mohr-Mascheroni*. On a en effet découvert depuis que les résultats de Mascheroni avaient été largement anticipés dans un livre publié en 1672 à Amsterdam par le mathématicien danois G. Mohr (1640-1697) et intitulé *Euclides Danicus*.

Démontrer la possibilité d'une telle construction est une chose, la réaliser en pratique n'est pas forcément aussi simple (essayez déjà de construire par vous-mêmes au compas seul le milieu d'un segment ...). On attribue souvent à Napoléon le problème de construire au compas seul le centre d'un cercle donné.

Quant aux constructions à la règle seule, on constate immédiatement qu'il n'est pas possible de construire grand-chose si on ne se donne pas un nombre suffisant de points au départ (si on part des seuls sommets d'un triangle, on ne peut pas construire d'autres points). On démontre en fait le résultat suivant :

Proposition 81. *Si on se donne les quatre points du plan de coordonnées $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$ et $(2, 0)$, les points constructibles à la règle seule sont exactement les points du plan dont les deux coordonnées sont rationnelles.*

Pour aller plus loin, il faut se donner plus de points au départ. On a en particulier le *théorème de Poncelet-Steiner* :

Théorème 6. *Tout point constructible à la règle et au compas peut être construit à la règle seule à condition que soit donné dans le plan un cercle et son centre.*

3.2 Frises et pavages

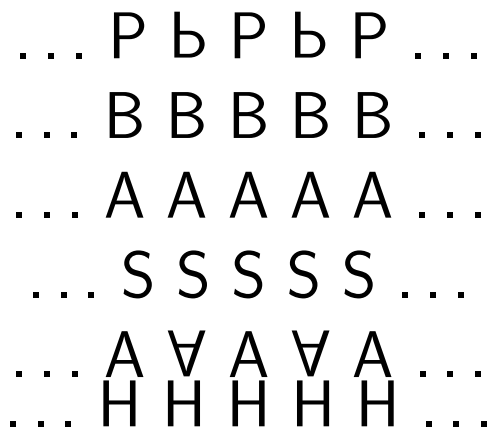
En architecture, une frise est une bande horizontale ornée d'un décor, généralement constitué par la répétition d'un même motif. Le groupe des isométries conservant une telle figure contient donc une translation dans une direction (mais pas dans deux directions, sinon la frise ne pourrait être contenue dans une bande), et par conséquent un sous-groupe de translations isomorphe à $\mathbb{Z}$.

On est ainsi amené à appeler *groupe de frise* un groupe d'isométries du plan dont le sous-groupe des translations est monogène, c'est-à-dire isomorphe à $\mathbb{Z}$. Si on prend un motif et si on représente les images de ce motif par toutes les isométries d'un groupe de frise, on obtient un dessin contenu dans une bande, qui se répète périodiquement comme une frise.

Un groupe de frise est un sous-groupe du groupe des isométries conservant un réseau linéaire, c'est-à-dire la figure constitué des images d'un point A_0 par toutes les translations de vecteur $k\vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur non nul et k décrit $\mathbb{Z}$. Un tel groupe ne peut contenir que des translations de vecteur $k\vec{u}$ ($k \in \mathbb{Z}$), des symétries centrales de centre situé sur la droite D définie par A_0 et le vecteur directeur $\vec{u}$, des réflexions d'axe D ou orthogonal à D , des symétries glissées d'axe D et de vecteur $k\vec{u}/2$.

On montre plus précisément qu'il existe exactement 7 types de groupes de frise, illustrés par les figures suivantes (les transformations appartenant au groupe sont exactement celles qui laissent la frise invariante) :

... P P P P P ...



De même, on appelle *groupe de pavage* (en anglais : *wallpaper group*) ou *groupe cristallographique* du plan un groupe d'isométries planes qui laisse invariant un réseau (i.e. un sous-groupe additif de $\mathbb{R}^2$ engendré par deux vecteurs linéairement indépendants) et contient deux translations de vecteurs linéairement indépendants.

Étant donné un tel groupe, on montre en effet qu'il existe un polygone plein (un pavé de base) tel que ses images par tous les éléments du groupe recouvrent le plan sans se chevaucher.

On montre qu'il y a 17 types de groupes de pavage. La plupart de ces groupes étaient connus depuis fort longtemps de manière empirique par les mosaïstes et les décorateurs. On peut ainsi en retrouver un grand nombre dans les mosaïques ornant l'Alhambra de Grenade (la discussion est encore ouverte parmi les historiens pour savoir si ces dix-sept groupes y sont effectivement tous représentés).

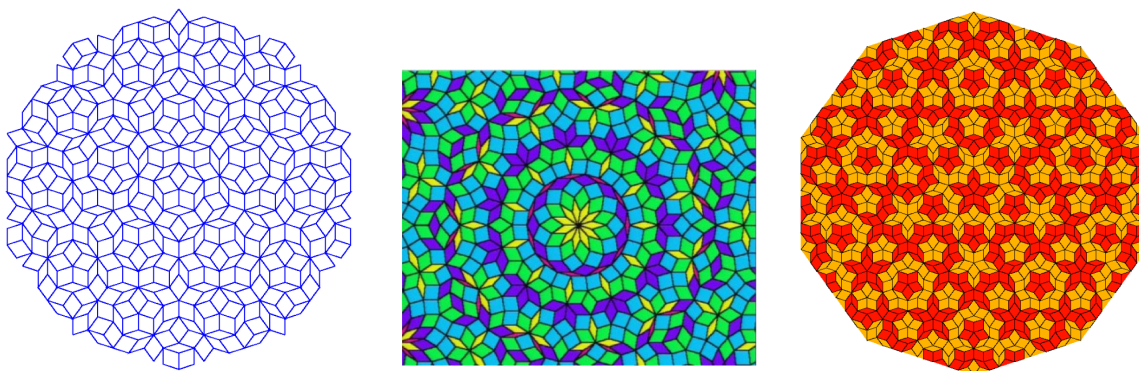
Vous pouvez télécharger aux adresses suivantes des logiciels libres vous permettant de réaliser vous-mêmes vos propres pavages ou vos propres frises :

<http://www.geom.uiuc.edu/java/Kali/welcome.html>

<http://www.morenaments.de/>

La classification complète de ces groupes est un peu fastidieuse. Une des premières étapes dans cette classification consiste à montrer que les seules rotations pouvant appartenir à un tel groupe sont d'ordre 2, 3, 4 ou 6 (i.e. ont pour angle un multiple de $\pi/2$ ou $\pi/3$). En particulier, un tel groupe ne peut contenir une rotation d'angle $2\pi/5$.

Il existe cependant des pavages du plan invariants par une rotation d'ordre 5, mais ces pavages ne sont pas périodiques. Les plus connus sont les *pavages de Penrose* (Roger Penrose, né en 1931, est un physicien et mathématicien britannique), dont certains sont représentés ci-dessous. Conçus au départ comme de simples jeux de l'esprit, ils sont apparus par la suite comme un modèle possible des quasi-cristaux après la découverte de ces derniers par les physiciens en 1984.



3.3 Polyèdres réguliers

Si dans le plan il existe une infinité de polygones réguliers (pour chaque entier $n \geq 3$, il existe un polygone régulier convexe à n sommets et n côtés, et un seul à similitude près), la situation est très différente dans l'espace. En effet il n'existe, à similitude près, que 5 types de polyèdres réguliers convexes : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre. Ces polyèdres sont connus depuis l'antiquité : un dialogue de Platon, le *Timée*, les mentionne déjà, plus de trois siècles avant notre ère, d'où le nom de *solides platoniciens* qui leur est parfois donné. De nombreuses interprétations ésotériques leur ont par la suite été données au fil des siècles.

Avant de donner une indication de démonstration de ce résultat, il convient de définir ce qu'on entend par polyèdre régulier. Il ne suffit pas en effet de demander que les faces soient toutes des polygones réguliers convexes isométriques : en collant deux tétraèdres réguliers isométriques selon une face, on obtient un polyèdre dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux isométriques, mais en 3 sommets aboutissent 4 faces, alors qu'en les 2 autres sommets n'en aboutissent que 3. Il faut donc demander de plus qu'en chaque sommet aboutissent le même nombre de faces.

Une première démonstration consiste à admettre le fait, assez intuitif, que la somme des angles des faces aboutissant en un sommet doit être strictement inférieure à 2π . En notant p le nombre de sommets de chaque face et q le nombre d'arêtes (ou de faces) aboutissant en un sommet, on obtient alors l'inégalité

$$q \frac{(p-2)\pi}{p} < 2\pi$$

soit encore $qp - 2q - 2p < 0$ ou $(p-2)(q-2) < 4$, puisque les angles d'un polygone régulier convexe à p côtés ont tous pour mesure $\frac{(p-2)\pi}{p}$. Il en résulte facilement que les faces ne peuvent être que des triangles équilatéraux, des carrés ou des pentagones réguliers.

Une autre démonstration repose sur la *formule d'Euler* pour les polyèdres convexes : si on note s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces d'un tel polyèdre, Euler a remarqué que $s - a + f = 2$ pour tout polyèdre convexe de l'espace.

Chaque arête est commune à 2 faces et relie 2 sommets. On obtient ainsi, en comptant de deux manières le nombre d'arêtes, les relations

$$2a = pf = qs .$$

Mais d'après la formule d'Euler

$$\frac{2a}{q} - a + \frac{2a}{p} = 2$$

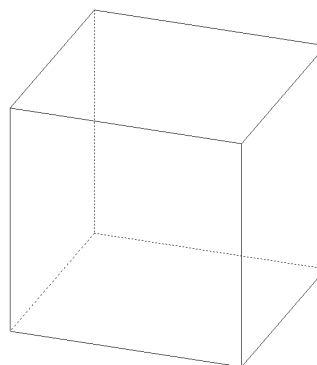
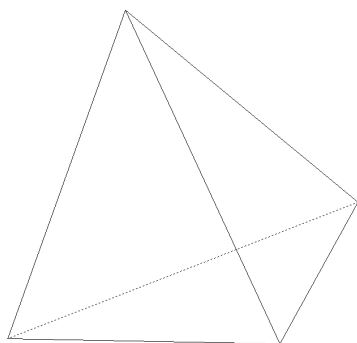
ou encore

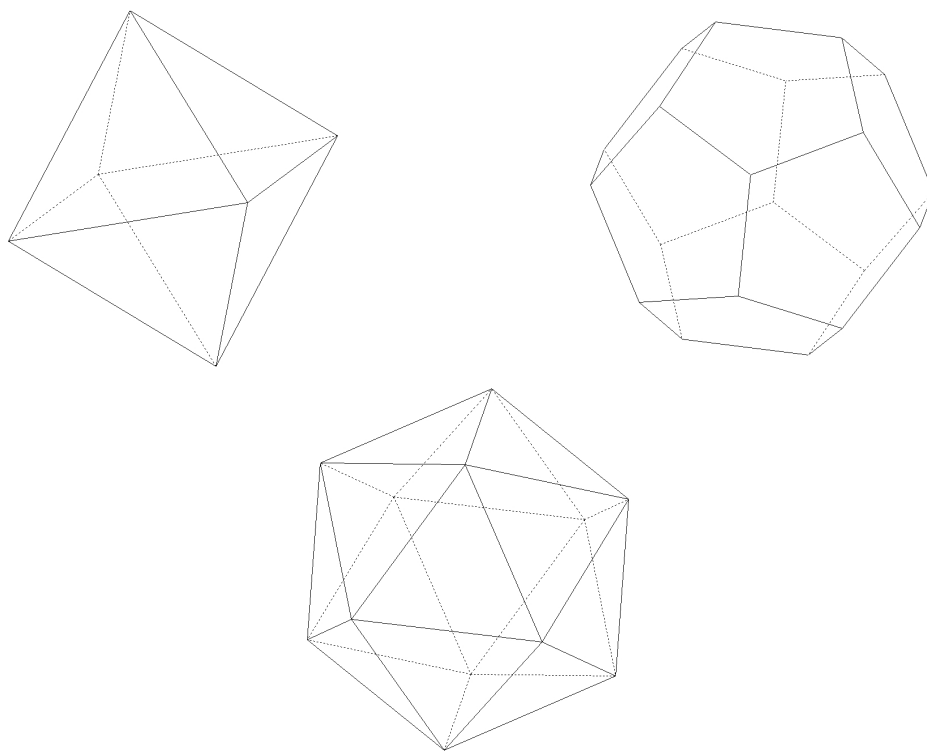
$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{a} > \frac{1}{2} .$$

Comme p et q sont tous deux supérieurs ou égaux à 3, il en résulte que le couple (p, q) ne peut prendre que l'une des 5 valeurs $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(5, 3)$.

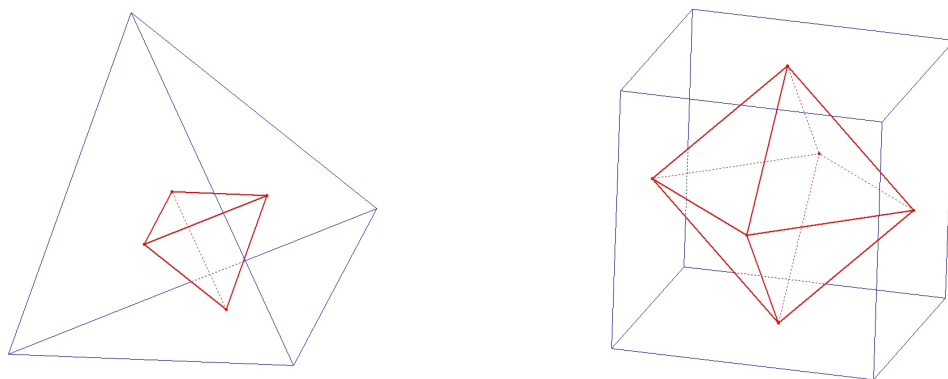
Solide	s	a	f
Tétraèdre	4	6	4
Cube	8	12	6
Octaèdre	6	12	8
Dodécaèdre	20	30	12
Icosaèdre	12	30	20

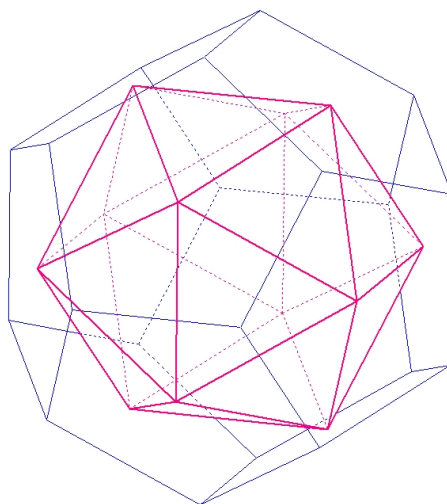
Une fois démontré qu'il ne peut exister plus de 5 types de polyèdres réguliers, il faut encore les construire. C'est élémentaire pour le cube, le tétraèdre et l'octaèdre, un peu moins pour le dodécaèdre et l'icosaèdre.





On remarque que p et q jouent des rôles symétriques dans les formules précédentes, ainsi que s et f . Géométriquement, cette remarque s'interprète de la façon suivante : les centres des faces d'un de ces polyèdres réguliers sont les sommets d'un autre polyèdre régulier, et en réitérant l'opération on retombe sur un polyèdre homothétique au polyèdre de départ. On obtient ainsi une dualité entre les polyèdres réguliers, le cube étant dual de l'octaèdre et l'icosaèdre du dodécaèdre, le tétraèdre étant quant à lui son propre dual.





3.4 Géométrie sphérique

On peut faire de la géométrie à la surface d'une sphère comme on en fait dans le plan euclidien. Cette géométrie, appelée *géométrie sphérique*, a toujours joué un rôle fondamental en navigation et en astronomie. Elle fournit également un modèle de géométrie dans lequel le cinquième postulat d'Euclide sur l'existence des parallèles n'est pas vérifié (une telle géométrie est dite *non-euclidienne*).

En géométrie euclidienne classique, le chemin le plus court entre deux points est le segment joignant ces points. La droite s'obtient en prolongeant ce segment. On appelle, sur une surface S , *géodésique* un chemin de longueur minimale parmi tous les chemins tracés sur cette surface reliant deux points donnés. Les géodésiques jouent donc sur une surface le rôle que tiennent les segments de droites dans le plan euclidien. La distance entre deux points de la surface est alors la longueur d'une géodésique reliant ces deux points.

Dans le cas où cette surface est une sphère, on montre que les géodésiques sont exactement les arcs de grands cercles tracés sur cette sphère (un *grand cercle* d'une sphère est l'intersection de cette sphère avec un plan passant par son centre) de longueur inférieure ou égale à πR , où R est le rayon de la sphère. Les grands cercles jouent donc sur une sphère le rôle des droites dans le plan.

On voit immédiatement que, par deux points non diamétralement opposés d'une sphère, il passe un grand cercle et un seul, qui est l'intersection de la sphère avec le plan défini par les deux points et le centre de la sphère. Il n'existe donc pas sur la sphère de parallèles (au sens de la géométrie euclidienne plane classique : des droites qui ne se rencontrent pas). Cependant, par deux points diamétralement opposés de la sphère, il passe une infinité de grands cercles, ce qui montre que la géométrie sphérique ne satisfait pas non plus le premier axiome d'Euclide (par deux points, il passe une droite et une seule). On peut cependant construire, à partir de la sphère, un modèle de

géométrie non-euclidienne satisfaisant ce premier axiome (mais pas celui des parallèles) en identifiant les points diamétralement opposés (nous ne développerons pas ici cette construction).

On peut étudier en géométrie sphérique la plupart des problèmes de la géométrie euclidienne plane classique, à commencer par ceux concernant les triangles. On appelle, sur une sphère, *triangle sphérique* la figure formée par trois points de la sphère (les sommets), les côtés étant les géodésiques joignant ces points. Les angles d'un triangle sphérique sont les angles formés par les tangentes à ses côtés en ses sommets. Les triangles sphériques ont cependant des propriétés bien différentes des triangles usuels de la géométrie plane.

En premier lieu, en géométrie euclidienne plane, la somme des angles d'un triangle est toujours égale à π . En géométrie sphérique, cette somme peut varier : elle est toujours supérieure ou égale à π , et la différence entre cette somme et π est l'aire du triangle (en supposant que la sphère est de rayon unité). L'aire d'un triangle sphérique est donc complètement déterminée par ses angles.

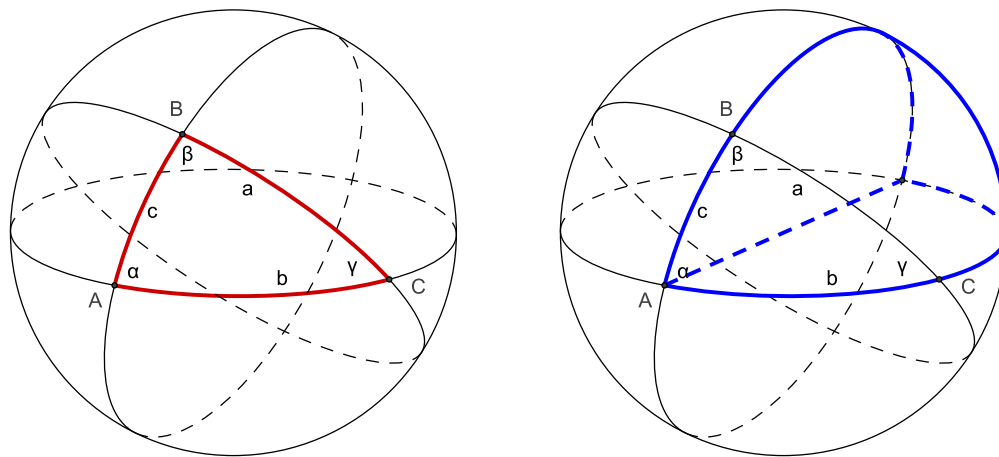
C'est la *formule de Girard* (Albert Girard, 1595-1632, mathématicien français ayant travaillé principalement aux Pays-Bas) :

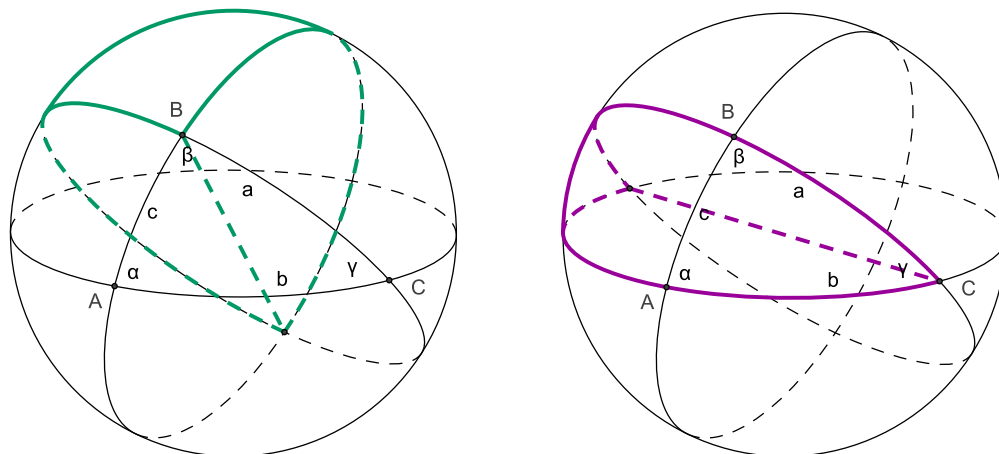
Proposition 82. *L'aire d'un triangle sphérique ABC d'angles α, β, γ d'une sphère de rayon 1 est donnée par*

$$\text{aire}(ABC) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

En particulier, si le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est orthonormal, les trois angles α, β, γ du triangle sphérique ABC sont droits. Il en résulte que l'aire d'un triangle sphérique trirectangle est égale à $\pi/2$, ce qui était immédiat, puisque la sphère est réunion de 8 triangles sphériques isométriques au précédent et que son aire totale est 4π .

Pour démontrer cette formule, on commence par remarquer que l'aire d'un fuseau de la sphère unité d'angles α est égale à $2\alpha\pi$ (un *fuseau* d'une sphère est une des portions de cette sphère délimitées par deux demi-grands cercles de mêmes extrémités) : en effet cette aire est proportionnelle à α et pour $\alpha = 2\pi$, c'est l'aire totale de la sphère.





On construit alors à partir d'un triangle sphérique ABC trois fuseaux de sommets A, B, C (voir figures). Ces fuseaux recouvrent la réunion d'une demi-sphère et du triangle symétrique de ABC par rapport au centre de la sphère ; de plus le triangle ABC lui-même est recouvert deux fois, si bien qu'on obtient la formule $2\pi + 2S = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma$ (où S est l'aire du triangle sphérique ABC), équivalente à la formule de Girard.

On peut également faire de la trigonométrie sur la sphère comme on en fait dans le plan. Donnons simplement une formule qui relie les longueurs des côtés d'un triangle sphérique aux mesures de ses angles (la longueur a du côté BC d'un triangle sphérique ABC de la sphère unité est la mesure de l'angle au centre $\widehat{BOC}$) :

Proposition 83. *Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique*

Soit ABC un triangle sphérique de la sphère unité, a, b, c les longueurs de ses côtés, α, β, γ les mesures de ses angles. Alors :

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

Il résulte en particulier de cette égalité que $\cos c$ est toujours compris entre $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$. On peut en déduire les inégalités

$$a + b + c \leq 2\pi, \quad a \leq b + c, \quad b \leq c + a, \quad c \leq a + b.$$

3.5 Cartographie

Si on assimile la surface de la terre à une sphère (elle est en fait plus proche d'un ellipsoïde légèrement aplati aux pôles), le problème de la cartographie est de représenter tout ou partie du globe terrestre sur une surface plane. Or on peut montrer qu'il n'est pas possible d'appliquer un domaine d'une sphère sur un plan sans déformation : on ne peut conserver à la fois les distances, les aires, les angles. Il importe donc de faire un choix.

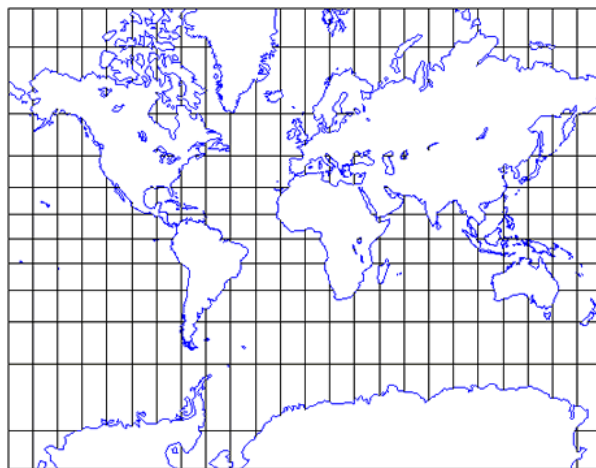
Une projection est dite *conforme* si elle conserve les angles (en particulier, les parallèles et les méridiens se coupent à angle droit), *équivalente* si elle conserve les aires.

Une projection quelconque ne conserve ni les aires, ni les angles, mais peut constituer un bon compromis entre ces deux exigences.

On peut par ailleurs projeter directement la sphère sur un plan (en général un plan tangent) ou sur une surface développable, c'est-à-dire une surface que l'on peut développer sans déformation sur un plan (un cylindre ou un cône, en général tangent ou presque à la sphère) et développer ensuite la figure obtenue. Le choix du centre et du type de projection est également important. C'est ainsi que plusieurs milliers de types de projection ont été développés par les géographes au cours du temps.

Si on veut représenter une petite surface du globe, le résultat diffère en général peu, car la projection entraîne peu de distorsions. S'il s'agit par contre de représenter une grande partie (voire la totalité : planisphère ou mappemonde) du globe terrestre, les distorsions deviennent beaucoup plus importantes et des systèmes de projection distincts mènent à des résultats radicalement différents.

Un des plus anciens systèmes de projection, encore utilisé de nos jours pour représenter une grande partie du globe, est le système de Mercator, établi en 1569 par le géographe flamand Gerardus Mercator (1512-1594).



L'idée était d'établir une représentation conforme de la terre, de sorte que les *loxodromies* (courbes faisant un angle constant avec les méridiens) apparaissent sous forme de droites. Ces trajets entre deux points, même s'ils ne sont pas les plus courts (les trajets les plus courts sont, comme on l'a vu, les arcs de grands cercles, appelés *orthodromies* en navigation), sont faciles à suivre par les navigateurs, puisqu'ils se font en maintenant le cap constant. Par contre, la carte de Mercator ne respecte ni les distances, ni les aires, si bien que les territoires ne sont pas représentés proportionnellement à leur importance réelle.

Pour établir une carte en projection de Mercator, on commence par projeter la surface de la terre sur un cylindre tangent le long de l'équateur, et on développe ensuite ce cylindre en le découpant le long d'une génératrice. Les méridiens sont ainsi espacés régulièrement, tandis que l'espace entre les parallèles croît à mesure que l'on s'approche

des pôles (on ne représente en général pas toute la surface de la terre, mais on se limite aux zones habitées).

Les formules exprimant les coordonnées (x, y) du point projeté en fonction de la latitude θ et de la longitude φ d'un point de la terre sont alors

$$x = \varphi, \quad y = \ln \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

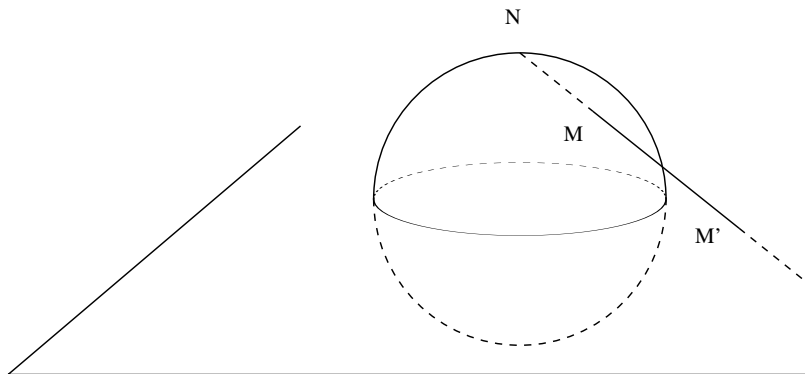
Ces formules s'obtiennent en exprimant la conservation des angles (la dérivée de y par rapport à θ est $\frac{1}{\cos \theta}$).

Naturellement, Mercator ne connaissait pas les logarithmes (la première table de logarithmes a été publiée en 1614 par John Napier) et encore moins le calcul différentiel (apparu seulement à la fin du XVII^{ème} siècle avec les travaux de Newton et Leibniz). Son approche était donc empirique, mais remarquablement précise.

3.6 Projection stéréographique et homographies

Une projection qui est moins utilisée par les géographes, mais qui présente de remarquables propriétés mathématiques, est la *projection stéréographique*.

On projette la surface de la terre, assimilée à la sphère unité, sur le plan de l'équateur par une projection centrale de centre le pôle Nord. Par tout point M de la terre distinct du pôle Nord N , on trace donc la droite (NM) , qui coupe le plan de l'équateur en un unique point $M' = p(M)$.



Si on rapporte l'espace à un repère orthonormé d'origine le centre O de la sphère et tel que N ait pour coordonnées $(0, 0, 1)$, cette transformation p est donnée en formules par

$$X = \frac{x}{1 - z}, \quad Y = \frac{y}{1 - z}$$

où (x, y, z) sont les coordonnées du point M et (X, Y) celles du point M' dans le plan Oxy . L'application p est une bijection de la sphère privée du point N sur le plan Oxy .

et la bijection réciproque est donnée par

$$x = \frac{2X}{1 + X^2 + Y^2}, \quad y = \frac{2Y}{1 + X^2 + Y^2}, \quad z = \frac{X^2 + Y^2 - 1}{1 + X^2 + Y^2}.$$

Ces formules permettent de montrer que l'image par p de tout cercle tracé sur la sphère est une droite ou un cercle : plus précisément, c'est une droite si le cercle passe par N et un cercle sinon.

Si on identifie le plan Oxy au corps des nombres complexes en associant à chaque point son affixe, on obtient ainsi une bijection de la sphère privée du point N sur $\mathbb{C}$. Pour obtenir une bijection définie sur la sphère tout entière, on complète $\mathbb{C}$ par un point à l'infini : en effet, quand un point M de la sphère s'approche de N , son image $p(M)$ s'éloigne à l'infini.

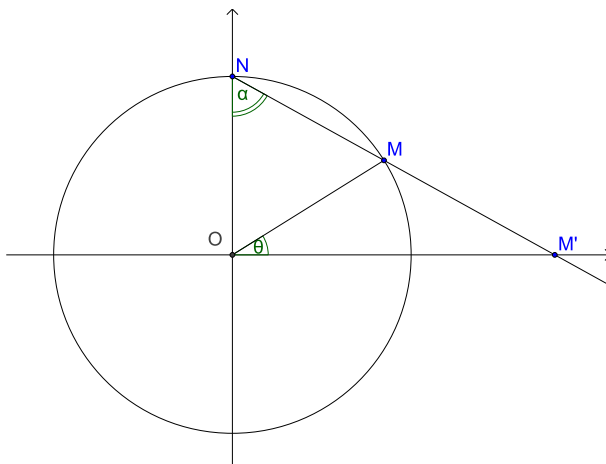
Le plan complexe ainsi complété, noté $\hat{\mathbb{C}}$, est appelé *sphère de Riemann* et constitue le cadre naturel pour étudier les homographies.

Une *homographie* est une application $f : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ où a, b, c, d sont des nombres complexes vérifiant $ad - bc \neq 0$ (sinon l'application serait constante). Cette application définit, si $c \neq 0$, une bijection de $\mathbb{C}$ privé du point $-d/c$ sur $\mathbb{C}$ privé du point a/c (si $c = 0$, c'est une similitude directe). On la complète en une bijection de $\hat{\mathbb{C}}$ sur $\hat{\mathbb{C}}$ en posant $f(-d/c) = \infty$ et $f(\infty) = a/c$. Elle a la propriété de transformer une droite ou un cercle en une droite ou un cercle.

Projection stéréographique et projection de Mercator

Si on repère le point M de la sphère par sa latitude θ et sa longitude φ et son projeté $M' = p(M)$ sur le plan Oxy par ses coordonnées polaires $r = OM'$ et φ , on voit sur la figure dans le plan OMN que

$$r = \tan \alpha = \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$



L'affixe du point M' est donc

$$Z = re^{i\varphi} = e^{\ln(\tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})) + i\varphi}.$$

Cette formule rappelle celle donnant les coordonnées de l'image de M par la projection de Mercator et ce n'est pas un hasard : en effet, si on échange les rôles de x et y dans les formules donnant la projection de Mercator (ce qui revient à noter Ox l'axe vertical et Oy l'axe horizontal) et si on note $z = x + iy$ l'affixe du point (x, y) , on obtient $Z = e^z$. La projection stéréographique comme la projection de Mercator sont en effet des projections conformes (elles conservent les angles). Si on les restreint à la sphère privée de ses deux pôles, elles définissent des bijections respectivement sur $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et sur la bande $\{z \mid -\pi < \text{Im}(z) \leq \pi\}$ et la fonction exponentielle réalise précisément une bijection conforme entre ces deux domaines de $\mathbb{C}$.

Pour en savoir plus sur la projection stéréographique et sur d'autres sujets abordés dans ces compléments (et sur bien d'autres choses encore), vous pouvez consulter le site : http://www.dimensions-math.org/Dim_fr.htm qui vous fera voyager jusque dans la quatrième dimension.