

Géométrie affine

Jean-Marc Decauwert

La géométrie affine est l'étude des propriétés géométriques qui sont conservées par toute transformation affine, comme l'alignement, le parallélisme, les milieux, et plus généralement les rapports de mesures algébriques pour des points alignés. Le cadre naturel en est un espace affine, généralisation en dimension quelconque du plan et de l'espace que vous avez déjà étudiés. Ses éléments sont des points et un espace vectoriel lui est attaché, qui permet d'associer à tout couple de points un vecteur. La notion de barycentre, issue de la mécanique, y joue un rôle essentiel, analogue à celui que joue la notion de combinaison linéaire dans un espace vectoriel. Nous étudierons ensuite les applications affines : ce sont celles qui conservent les barycentres. Leur importance vient de ce que la quasi-totalité des transformations géométriques que vous avez pu rencontrer, en particulier les isométries et plus généralement les similitudes, sont affines. Mais l'étude des notions spécifiquement euclidiennes, comme celles de distances et d'angles, sera abordée dans un autre chapitre.

Table des matières

1 Cours	2
1.1 Espace affine	2
1.2 Barycentres	5
1.3 Sous-espaces affines	8
1.4 Repérage	11
1.5 Convexité	16
1.6 Applications affines	21
1.7 Le groupe affine	26
1.8 Homothéties et translations	28
1.9 Projections, symétries, affinités	30
2 Entraînement	35
2.1 Vrai ou faux	35
2.2 Exercices	38
2.3 QCM	49
2.4 Devoir	52
2.5 Corrigé du devoir	54
3 Compléments	58
3.1 Notations de Grassmann	58
3.2 Courbes de Bézier	59

3.3	Perspective centrale et géométrie projective	60
3.4	Desargues dans le plan et dans l'espace	61
3.5	Birapport	64
3.6	La formule d'Euler pour les polyèdres	66
3.7	Le théorème fondamental de la géométrie affine	67

1 Cours

1.1 Espace affine

Une fois qu'on a choisi un repère, le plan s'identifie à \mathbb{R}^2 (resp. l'espace à \mathbb{R}^3), autrement dit à un espace vectoriel de dimension 2 (resp. 3) sur \mathbb{R} muni d'une base particulière (la base canonique de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3). On pourrait donc se contenter de faire de la géométrie dans \mathbb{R}^2 ou dans \mathbb{R}^3 . Mais cette identification repose sur le choix d'un repère et il est souvent plus agréable et plus clair de raisonner de manière intrinsèque. De plus, se fixer un repère une fois pour toutes n'est souvent pas la meilleure solution : il est préférable, même quand on calcule en coordonnées, d'avoir la liberté de choisir un repère bien adapté au problème posé. De fait, le cadre naturel pour faire de la géométrie serait un espace homogène, dont tous les points jouent le même rôle, ce qui n'est pas le cas dans un espace vectoriel, où le vecteur nul joue un rôle particulier et tient naturellement lieu d'origine. Moralement, un espace affine n'est rien d'autre que cela : un espace vectoriel dont on a oublié où se trouve l'origine. Cette définition est naturellement beaucoup trop vague pour être utilisable telle quelle. Nous allons commencer par lui donner un sens précis. Nous verrons alors que tout espace vectoriel est naturellement muni d'une structure d'espace affine et que, inversement, tout espace affine s'identifie à un espace vectoriel dès qu'on y choisit une origine (mais cette identification dépend du choix de l'origine). Mathématiquement, la définition est la suivante :

Définition 1. Soit \vec{E} un espace vectoriel sur un corps K . Un espace affine de direction \vec{E} est un ensemble non vide E muni d'une application $(M, N) \mapsto \vec{MN}$ de $E \times E$ dans \vec{E} vérifiant :

1. pour tout triplet (M, N, P) de points de E :

$$\vec{MN} + \vec{NP} = \vec{MP} \quad (\text{relation de Chasles});$$

2. pour tout point O de E , l'application $M \mapsto \vec{OM}$ de E dans \vec{E} est bijective.

Les éléments de E s'appellent des points, ceux de \vec{E} des vecteurs.

On appelle dimension de l'espace affine E la dimension de l'espace vectoriel \vec{E} .

Dans le cadre de la géométrie élémentaire usuelle, le corps de base est toujours le corps \mathbb{R} des nombres réels. On supposera donc toujours dans ce qui suit que $K = \mathbb{R}$ (cette hypothèse sera même indispensable dès qu'on abordera les notions de convexité), mais la plupart des résultats restent vrais si K est le corps des nombres complexes ou même un corps fini.

Exemple fondamental. Tout espace vectoriel \vec{E} est muni d'une structure naturelle d'espace affine sur lui-même.

Il suffit de prendre dans la définition $E = \vec{E}$ et de définir l'application de $E \times E$ dans \vec{E} par $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{v} - \vec{u}$.

Plus généralement, l'image $\overrightarrow{F} + \vec{v} = \{ \vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} \in \overrightarrow{F} \}$ d'un sous-espace vectoriel \overrightarrow{F} d'un espace vectoriel \overrightarrow{E} par une translation de vecteur $\vec{v} \in \overrightarrow{E}$ est un espace affine de direction \overrightarrow{F} . Il suffit ici aussi de considérer l'application $(\vec{u}_1 + \vec{v}, \vec{u}_2 + \vec{v}) \mapsto \vec{u}_2 - \vec{u}_1$.

Réciproquement, le choix d'une origine permet de munir un espace affine d'une structure d'espace vectoriel : si O est l'origine, il suffit d'identifier un point M de E et le vecteur OM . Mais *attention* : cette structure dépend du choix de l'origine ; on ne peut définir la somme de deux points d'un espace affine sans se référer explicitement à une origine, c'est pourquoi on n'additionnera jamais des points.

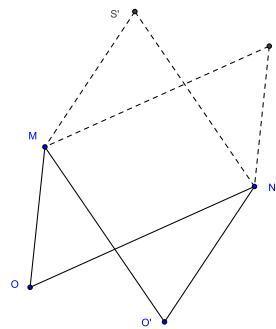


FIGURE 1 – L'addition dépend de l'origine.

Exemples en algèbre et en analyse

La structure d'espace affine ne se rencontre pas qu'en géométrie : elle intervient de manière naturelle dans tous les problèmes linéaires. L'ensemble des solutions d'un système linéaire avec second membre en constitue l'exemple type : ce n'est pas un espace vectoriel, mais c'est un espace affine de direction l'espace vectoriel des solutions du système homogène associé. De même l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire avec second membre constitue un espace affine de direction l'espace vectoriel des solutions du système homogène associé, l'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = au_n + b$ constitue un espace affine de direction l'espace vectoriel des suites vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n$, l'ensemble des fonctions f d'une variable réelle vérifiant $f(0) = 1$ est un espace affine de direction l'espace vectoriel des fonctions nulles en 0.

Ce dernier exemple est un espace affine de dimension infinie. Nous ne nous intéresserons ici qu'à des espaces affines de *dimension finie* (principalement 2 ou 3). **Dans toute la suite de ce chapitre, espace affine signifiera donc toujours espace affine de dimension finie.**

Définition 2. On appelle droite (resp. plan) affine tout espace affine de dimension 1 (resp. 2).

On emploiera parfois le terme *espace* (sans autre qualificatif) pour désigner un espace affine de dimension 3, comme dans l'expression *géométrie dans l'espace*.

Conséquences immédiates de la définition

Proposition 1. *Pour tous points M, N, O de E , on a :*

1. $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$ si et seulement si $M = N$;
2. $\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN}$;
3. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$.

Démonstration : 1) En faisant $N = M$ dans la relation de Chasles, on voit que $\overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MP}$ pour tout point P , d'où $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$. Réciproquement, si $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$, il résulte de la relation $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MM}$ et de l'injectivité de l'application $N \mapsto \overrightarrow{MN}$ que $N = M$.

2) En faisant $P = M$ dans la relation de Chasles, on obtient

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$$

d'où $\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN}$.

3) Par la relation de Chasles et la propriété précédente

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}.$$

□

Translations

Soit E un espace affine de direction \vec{E} . Pour tout point M de E , l'application $N \mapsto \overrightarrow{MN}$ est une bijection de E sur \vec{E} . Pour tout vecteur \vec{u} de \vec{E} , il existe donc un point N de E et un seul tel que $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$.

Notation 1. *Pour tout point M de E et tout vecteur \vec{u} de \vec{E} , on note $M + \vec{u}$ l'unique point N de E vérifiant $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$.*

Avec cette notation, la relation de Chasles s'écrit sous la forme suivante : pour tout point M et tout couple (\vec{u}, \vec{v}) de vecteurs, on a :

$$(M + \vec{u}) + \vec{v} = M + (\vec{u} + \vec{v}).$$

En effet, en posant $N = M + \vec{u}$ et $P = N + \vec{v}$, on a $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$, $\overrightarrow{NP} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \vec{u} + \vec{v}$.

Définition 3. *Soit E un espace affine de direction \vec{E} . Pour tout vecteur \vec{u} de \vec{E} , on appelle translation de vecteur \vec{u} , et on note $t_{\vec{u}}$, l'application de E dans E qui à tout point M associe le point $M + \vec{u}$.*

Proposition 2. *L'ensemble T des translations d'un espace affine E est un sous-groupe du groupe des permutations de E et l'application $\vec{u} \mapsto t_{\vec{u}}$ est un isomorphisme du groupe additif de \vec{E} sur T .*

Démonstration : La translation de vecteur nul est l'identité, qui appartient donc à T . La relation de Chasles implique, comme on l'a vu

$$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u} + \vec{v}} \quad \text{pour tout couple } (\vec{u}, \vec{v}) \text{ de vecteurs. \quad (*)}$$

La composée de deux translations est donc une translation, et toute translation $t_{\vec{u}}$ admet une application réciproque, qui est la translation $t_{-\vec{u}}$. Il en résulte que toute translation est bijective et que T est un sous-groupe du groupe des permutations de E (applications bijectives de E sur E).

La relation (*) montre que l'application $\vec{u} \mapsto t_{\vec{u}}$ est un morphisme du groupe additif de \vec{E} sur T . Ce morphisme est surjectif par définition de T et il est injectif car son noyau est réduit à $\vec{0}$: la translation $t_{\vec{u}}$ est l'identité si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$. \square

Remarque : la proposition précédente montre que le groupe additif $(\vec{E}, +)$ opère sur l'ensemble E au moyen des translations ; cette opération est transitive et fidèle.

Bipoints, équipollence

En géométrie élémentaire classique, on commence par introduire les points et on définit ensuite les vecteurs à partir des points. On suit donc la démarche inverse de la nôtre.

Dans ce cadre, les vecteurs sont introduits de la manière suivante. On appelle *bipoint* un couple de deux points, i.e. un élément du produit cartésien $E \times E$, où E est le plan ou l'espace. On dit que deux bipoints (A, B) et (C, D) sont *équipollents* si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme, i.e. si les bipoints (A, D) et (B, C) ont même milieu. On verra plus loin que cette condition équivaut à la relation $\vec{AB} = \vec{CD}$, qui signifie que c'est la même translation qui transforme A en B et C en D . On montre alors que la relation d'équipollence est une relation d'équivalence sur $E \times E$ et on définit l'ensemble \vec{E} des vecteurs comme l'ensemble quotient de $E \times E$ par cette relation d'équivalence.

Dans notre approche, il est immédiat que la relation \mathcal{R} définie sur l'ensemble $E \times E$ par $(A, B)\mathcal{R}(C, D)$ si et seulement si $\vec{AB} = \vec{CD}$ est une relation d'équivalence et que l'ensemble quotient de $E \times E$ par cette relation d'équivalence est en bijection avec \vec{E} : à la classe d'équivalence d'un bipoint (A, B) , on associe le vecteur \vec{AB} .

1.2 Barycentres

La notion de barycentre est essentielle en géométrie affine. Elle joue un rôle identique à celui que tient la notion de combinaison linéaire en algèbre linéaire.

Définition 4. Un système de points pondérés d'un espace affine E est une famille finie $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$ de couples (A_i, λ_i) , où, pour tout i , A_i est un élément de E et λ_i un réel. Le poids total du système est le réel $\sum_{i=1}^n \lambda_i$.

À tout système de points pondérés de E , on associe une fonction \vec{f} de E dans \overrightarrow{E} , appelée *fonction vectorielle de Leibniz* du système, par :

$$\vec{f}(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{MA_i}.$$

Proposition 3. Soit $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$ un système de points pondérés d'un espace affine E .

1. Si le poids total du système est nul, la fonction vectorielle de Leibniz associée est constante.
2. Si le poids total du système n'est pas nul, la fonction vectorielle de Leibniz associée est une bijection de E sur \overrightarrow{E} . En particulier, il existe un point de E et un seul où cette fonction s'annule.

Démonstration : Soit O un point fixé de E . On a pour tout point M de E :

$$\vec{f}(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \overrightarrow{MO} + \vec{f}(O).$$

Il en résulte que si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, alors $\vec{f}(M) = \vec{f}(O)$ pour tout point M de E . Sinon, pour tout vecteur \vec{u} de \overrightarrow{E} , il existe un unique point M de E vérifiant $\vec{f}(M) = \vec{u}$, ce point étant défini par $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} [\vec{f}(O) - \vec{u}]$. \square

Définition 5. Soit $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$ un système de points pondérés d'un espace affine E de poids total non nul : $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$. On appelle *barycentre* de ce système l'unique point G de E vérifiant $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

Le barycentre d'un système de points pondérés n'est donc défini que si le poids total du système n'est pas nul.

Propriétés du barycentre

- Proposition 4.**
1. Le barycentre ne dépend pas de l'ordre des points.
 2. Homogénéité : le barycentre d'un système de points pondérés ne change pas lorsque l'on multiplie tous les poids par un même réel non nul.

3. Associativité : *le barycentre d'un système de points pondérés ne change pas lorsque l'on remplace certains de ces points par leur barycentre affecté de la somme des coefficients correspondants (à condition naturellement que cette somme ne soit pas nulle).*
4. *Si G est le barycentre du système de points pondérés $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$, on a, pour tout point O de E :*

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}.$$

Démonstration : Les deux premières propriétés sont évidentes. Pour démontrer la troisième, soit G le barycentre du système pondéré $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$. Il suffit de considérer (en réordonnant éventuellement les points) le cas où les points que l'on regroupe sont A_1, \dots, A_p avec $\sum_{i=1}^p \lambda_i \neq 0$. En notant H le barycentre du système pondéré $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$, on a alors $\sum_{i=1}^p \lambda_i \overrightarrow{HA_i} = \vec{0}$ et

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \right) \overrightarrow{GH} + \sum_{i=p+1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} &= \sum_{i=1}^p \lambda_i (\overrightarrow{GA_i} + \overrightarrow{AH}) + \sum_{i=p+1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} + \sum_{i=1}^p \lambda_i \overrightarrow{AH} \\ &= \vec{0} - \sum_{i=1}^p \lambda_i \overrightarrow{HA_i} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

ce qui montre que G est le barycentre du système pondéré $[(H, \sum_{i=1}^p \lambda_i), (A_{p+1}, \lambda_{p+1}), \dots, (A_n, \lambda_n)]$.

La dernière propriété provient de la relation

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_i}) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \overrightarrow{GO} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}.$$

□

Définition 6. *On appelle isobarycentre d'une famille finie A_1, \dots, A_n de points de E le barycentre des points de cette famille affectés de poids tous égaux. En particulier, on appelle milieu d'un couple de points l'isobarycentre de ces deux points.*

La notion de milieu est donc purement affine et ne fait pas appel à la notion de distance, ce qui n'empêche naturellement pas le milieu I d'un couple (A, B) de points d'être caractérisé, en géométrie euclidienne, par la double égalité $IA = IB = AB/2$.

Notations de Grassmann

Si $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$ est un système de points pondérés d'un espace affine E de poids total $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, le barycentre G de ce système vérifie $\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$ pour tout point O de E . On le notera $G = \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i$.

On définit ainsi sans se référer à une origine un calcul sur les points qui satisfait aux règles habituelles du calcul vectoriel. Par exemple, si G est l'isobarycentre des sommets d'un triangle ABC , on peut écrire

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\right) = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}A'$$

où $A' = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$ est le milieu de BC (cette égalité ne fait que refléter l'associativité du barycentre).

Mais **attention** : cette notation (parfois appelée *notation de Grassmann*) n'a de sens que pour un système de points pondérés de poids total 1. L'écriture $A + B$ ou $-A$ (où A est un point) n'a pas de sens.

On a par ailleurs vu, en étudiant la fonction vectorielle de Leibniz, que si $(A_i, \alpha_i)_{i=1, \dots, n}$ est un système de points pondérés de poids total nul : $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, le vecteur \vec{u} défini par $\vec{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$ ne dépend pas du choix de O . On peut donc noter également $\vec{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i$. Par exemple, si $n = 2$, $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = -1$, $A_1 - A_2$ est le vecteur $\overrightarrow{A_2A_1}$. Mais une expression telle que $2A - 3B$, ou $A + B$, ou $\frac{1}{2}A$, ne représente ni un point ni un vecteur.

1.3 Sous-espaces affines

Définition 7. Une partie F d'un espace affine E est un sous-espace affine de E s'il existe un point A de F tel que $\overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in F\}$ soit un sous-espace vectoriel de \overrightarrow{E} .

On a alors $F = \{A + \vec{u} \mid \vec{u} \in \overrightarrow{F}\}$.

Notation 2. Pour tout point A de E et tout sous-espace vectoriel \overrightarrow{F} de \overrightarrow{E} , l'ensemble

$$\text{Aff}(A, \overrightarrow{F}) = \{A + \vec{u} \mid \vec{u} \in \overrightarrow{F}\}$$

est un sous-espace affine de E . On l'appellera sous-espace affine de E passant par A de direction \overrightarrow{F} . Si \vec{u} est un vecteur non nul de \overrightarrow{E} , on notera $D(A, \vec{u})$ la droite affine passant par A et de direction la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{u}$. De même, si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs linéairement indépendants, on notera $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ le plan affine passant par A et de direction le plan vectoriel $\mathbb{R}\vec{u} \oplus \mathbb{R}\vec{v}$ engendré par les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Proposition 5. Soit $F = \text{Aff}(A, \vec{F})$ un sous-espace affine de E . On a alors, pour tout point B de F , $\{\vec{BM} \mid M \in F\} = \vec{F}$.

Démonstration : Puisque B appartient à F , le vecteur \vec{AB} appartient à \vec{F} . Or $\vec{BM} = \vec{AM} - \vec{AB}$ et l'application $\vec{u} \mapsto \vec{u} - \vec{AB}$ est une bijection de \vec{F} sur \vec{F} , puisque \vec{F} est un sous-espace vectoriel de \vec{E} . Il en résulte que

$$\{\vec{BM} \mid M \in F\} = \{\vec{AM} - \vec{AB} \mid M \in F\} = \{\vec{u} - \vec{AB} \mid \vec{u} \in \vec{F}\} = \vec{F}.$$

□

Le sous-espace vectoriel \vec{F} de \vec{E} ne dépend donc pas du choix de A dans F . On l'appelle *direction* du sous-espace affine F . La restriction de l'application $(M, N) \mapsto \vec{MN}$ à $F \times F$ munit F d'une structure naturelle d'espace affine de direction \vec{F} . Sa dimension $\dim(F)$ est celle de \vec{F} .

Un sous-espace affine de dimension 0 est constitué d'un point, un sous-espace affine de dimension 1 est une droite, un sous-espace affine de dimension 2 un plan.

Définition 8. On appelle *hyperplan* d'un espace affine E de dimension finie tout sous-espace affine de E de dimension $\dim(E) - 1$.

Caractérisation en termes de barycentres

Proposition 6. Une partie non vide F d'un espace affine E est un sous-espace affine de E si et seulement si tout barycentre de points de F appartient à F .

Démonstration : Si F est un sous-espace affine de E , A un point de F et $(A_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$ un système de points pondérés de F de poids total non nul, le barycentre G de ce système vérifie $\vec{AG} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{AA}_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$. Il en résulte que \vec{AG} appartient à \vec{F} , puisque \vec{F} est un sous-espace vectoriel de \vec{E} , et donc que G appartient à F .

Réiproquement, soit F une partie non vide de E telle que tout barycentre de points de F affectés de coefficients quelconques (de somme non nulle) appartient à F , et A un point de F . Pour tout couple (M, N) de points de F et tout couple (λ, μ) de réels, le point P de E défini par $\vec{AP} = \lambda \vec{AM} + \mu \vec{AN}$ est le barycentre du système de points pondérés $[(A, 1 - \lambda - \mu), (M, \lambda), (N, \mu)]$ et appartient donc à F . Il en résulte que $\vec{F} = \{\vec{AM} \mid M \in F\}$ est un sous-espace vectoriel de \vec{E} ($\vec{0} = \vec{AA}$ appartient à \vec{F} , qui n'est donc pas vide), et donc que F est un sous-espace affine de E . □

Parallélisme

Définition 9. Deux sous-espaces affines F et G d'un même espace affine E sont dits parallèles s'ils ont même direction : $\vec{F} = \vec{G}$.

Le parallélisme est une relation d'équivalence sur l'ensemble des sous-espaces affines de E . Deux sous-espaces affines parallèles, au sens de cette définition, ont même dimension.

Si deux sous-espaces affines F et G d'un même espace affine E vérifient $\vec{F} \subset \vec{G}$, on dit que F est *parallèle à* G (ou parfois *faiblement parallèle à* G) ; cette relation n'est naturellement pas symétrique.

Intersection, sous-espace engendré

Proposition 7. L'intersection de toute famille (finie ou infinie) de sous-espaces affines d'un même espace affine est soit vide, soit un sous-espace affine de direction l'intersection des directions de ces sous-espaces affines.

Démonstration : Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces affines de E . Si l'intersection $\bigcap_{i \in I} F_i$ de cette famille est vide, il n'y a rien à démontrer. Sinon, soit A un point de cette intersection. Pour tout $i \in I$, un point M de E appartient à F_i si et seulement si le vecteur \vec{AM} appartient à la direction \vec{F}_i de F_i , puisque A appartient à F_i . Il en résulte que M appartient à $\bigcap_{i \in I} F_i$ si et seulement si \vec{AM} appartient au sous-espace vectoriel $\bigcap_{i \in I} \vec{F}_i$ de \vec{E} , ce qui montre que $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace affine de E de direction $\bigcap_{i \in I} \vec{F}_i$. \square

Cette stabilité par intersection permet de poser la définition suivante :

Définition 10. Soit A une partie non vide d'un espace affine E . On appelle sous-espace affine engendré par A l'intersection de tous les sous-espaces affines de E contenant A .

Proposition 8. Le sous-espace affine engendré par une partie non vide A d'un espace affine E est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace affine de E contenant A . C'est aussi l'ensemble de tous les barycentres de tous les systèmes de points pondérés de A affectés de coefficients quelconques (de somme non nulle).

Démonstration : Soit A une partie non vide de E et F_A le sous-espace affine de E engendré par A . F_A est non vide, car il contient A , et c'est un sous-espace affine, comme intersection de sous-espaces affines. Par définition, il est inclus dans tout sous-espace affine de E contenant A , c'est donc bien le plus petit sous-espace affine de E contenant A .

Soit G_A l'ensemble de tous les barycentres de tous les systèmes de points pondérés de A affectés de coefficients quelconques (de somme non nulle). G_A n'est pas vide, car il

contient A (considérer un système réduit à un point), et tout barycentre d'un système de points pondérés de G_A appartient encore à G_A par associativité du barycentre. Il résulte de la proposition 6 que G_A est un sous-espace affine de E . Comme il contient A , il contient F_A . Mais F_A est un sous-espace affine de E et tout point de A appartient à F_A . Il en résulte que tout barycentre de points de A appartient à F_A , donc que G_A est inclus dans F_A . On a donc $F_A = G_A$. \square

Proposition 9. *Soient F et G deux sous-espaces affines d'un espace affine E , A un point de F et B un point de G . L'intersection $F \cap G$ est non vide si et seulement si le vecteur \overrightarrow{AB} appartient à la somme $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$ des directions de ces deux sous-espaces. En particulier, si \overrightarrow{F} et \overrightarrow{G} sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de \overrightarrow{E} , l'intersection $F \cap G$ consiste en un point.*

Démonstration : Si l'intersection $F \cap G$ n'est pas vide, soit I un point de cette intersection. Le vecteur \overrightarrow{AI} appartient à \overrightarrow{F} et le vecteur \overrightarrow{IB} à \overrightarrow{G} . Il en résulte que le vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ appartient à $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$.

Réciproquement, si \overrightarrow{AB} appartient à $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$, il existe un vecteur \vec{u} de \overrightarrow{F} et un vecteur \vec{v} de \overrightarrow{G} tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$. Soit I le point de E défini par $\overrightarrow{AI} = \vec{u}$. Le point I appartient à F puisque \overrightarrow{AI} appartient à \overrightarrow{F} . L'égalité

$$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} = \vec{u} - (\vec{u} + \vec{v}) = -\vec{v}$$

montre que \overrightarrow{BI} appartient à \overrightarrow{G} et donc que I appartient à G . Il en résulte que I appartient à l'intersection de F et de G , qui n'est donc pas vide.

Dans le cas où \overrightarrow{F} et \overrightarrow{G} sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de \overrightarrow{E} , tout vecteur de \overrightarrow{E} , en particulier le vecteur \overrightarrow{AB} , appartient à $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$. L'intersection $F \cap G$ n'est donc pas vide, et sa direction est $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G} = \{\vec{0}\}$ (proposition 7). Cette intersection est donc réduite à un point. \square

1.4 Repérage

1) Coordonnées cartésiennes

Repères cartésiens

On a déjà remarqué que le choix d'une origine O permet d'identifier un espace affine E de dimension n à sa direction \overrightarrow{E} , c'est-à-dire à un espace vectoriel. Le choix d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de \overrightarrow{E} permet d'identifier cet espace vectoriel à \mathbb{R}^n . Le couple $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}) = (O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est appelé *repère cartésien* de E . Pour tout point M de E , il existe alors un unique n -uplet (x_1, \dots, x_n) de réels vérifiant $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$. Ces nombres sont appelés *coordonnées cartésiennes* de M dans le repère \mathcal{R} . Si $n = 2$, on notera souvent ces coordonnées (x, y) et, si $n = 3$, (x, y, z) .

Mesure algébrique

Un repère cartésien d'une droite affine D est un couple (O, \vec{u}) , où O est un point de D et \vec{u} un vecteur non nul de \vec{D} (on dit que \vec{u} est un *vecteur directeur* de D). Si M et N sont deux points de D , le vecteur \overrightarrow{MN} s'écrit de manière unique $\overrightarrow{MN} = \lambda \vec{u}$ pour un réel λ . Ce réel λ est appelé *mesure algébrique* de MN et noté \overline{MN} . La mesure algébrique \overline{MN} dépend donc du choix d'un vecteur directeur de D : si on remplace \vec{u} par $\lambda \vec{u}$, où λ est un réel non nul, toutes les mesures algébriques sur D sont divisées par λ . Mais le *rapport* $\overline{MN}/\overline{PQ}$ de mesures algébriques de couples de points de D ne dépend pas du choix du vecteur directeur : il est donc défini de manière intrinsèque.

Equation d'un hyperplan

Proposition 10. *Soit E un espace affine de dimension n et $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ un repère cartésien de E . Tout hyperplan H de E admet dans \mathcal{R} une équation de la forme $a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, où les a_i sont des réels vérifiant $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$; cette équation est unique à multiplication près par un réel non nul. Réciproquement, toute équation de ce type représente un hyperplan. L'hyperplan vectoriel \vec{H} (direction de H) a pour équation $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de \vec{E} .*

Il en résulte que deux hyperplans H et H' , d'équations respectives $a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ et $a'_0 + \sum_{i=1}^n a'_i x_i = 0$, sont parallèles si et seulement si les n -uplets (a_1, \dots, a_n) et (a'_1, \dots, a'_n) de réels sont proportionnels.

Démonstration : Soit H un hyperplan de E , B un point de H de coordonnées (b_1, \dots, b_n) dans le repère \mathcal{R} , et $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$, où les a_i sont des réels non tous nuls, une équation de l'hyperplan vectoriel \vec{H} dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de \vec{E} . Un point M de E de coordonnées (x_1, \dots, x_n) appartient à H si et seulement si le vecteur \overrightarrow{BM} appartient à \vec{H} , i.e. si et seulement si $a_1(x_1 - b_1) + \dots + a_n(x_n - b_n) = 0$. Il en résulte que $a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$, où $a_0 = -a_1 b_1 - \dots - a_n b_n$, est une équation de H dans le repère \mathcal{R} .

Réciproquement, soient a_0, a_1, \dots, a_n des réels vérifiant $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ et B un point de coordonnées (b_1, \dots, b_n) vérifiant $a_0 + a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = 0$ (un tel point existe puisque a_1, \dots, a_n ne sont pas tous nuls). L'équation $a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ s'écrit encore $a_1(x_1 - b_1) + \dots + a_n(x_n - b_n) = 0$ et signifie que le vecteur \overrightarrow{BM} appartient à l'hyperplan vectoriel \vec{H} d'équation $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$. Cette équation est donc celle de l'hyperplan affine passant par B et de direction \vec{H} .

Deux hyperplans affines d'équations $a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ et $a'_0 + a'_1 x_1 + \dots + a'_n x_n = 0$ sont parallèles s'ils ont même direction, i.e. si les hyperplans vectoriels d'équations $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ et $a'_1 x_1 + \dots + a'_n x_n = 0$ sont confondus, ou encore si et seulement si les n -uplets (a_1, \dots, a_n) et (a'_1, \dots, a'_n) de réels sont proportionnels. Ils

sont confondus si (a_0, a_1, \dots, a_n) et $(a'_0, a'_1, \dots, a'_n)$ sont proportionnels, sinon ils sont strictement parallèles. \square

Equations de droites et de plans en dimensions 2 et 3

Une droite a donc, dans un repère cartésien du plan, une équation de la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$, et un plan, dans un repère cartésien de l'espace, une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Attention : une droite de l'espace est représentée par un système de *deux* équations (celles de deux plans distincts la contenant).

2) Coordonnées barycentriques

Une autre façon de repérer les points dans un espace affine consiste à les écrire comme barycentres de points d'un repère : par exemple, si A et B sont deux points distincts d'une droite D , tout point de D s'écrit comme barycentre de A et B , et cette écriture est unique à condition de normaliser les coefficients en imposant à leur somme de valoir 1.

Proposition 11. *Soient A_0, A_1, \dots, A_n $n+1$ points d'un espace affine E de dimension n . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$ constituent une base de \vec{E} ;*
- (ii) *aucun des points A_0, A_1, \dots, A_n n'appartient au sous-espace affine engendré par les autres.*

Démonstration : Si (i) est vérifiée, et si A_0 appartenait au sous-espace affine engendré par A_1, \dots, A_n , A_0 serait barycentre des points A_1, \dots, A_n affectés de coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de somme non nulle (proposition 8), d'où $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} = \vec{0}$; la famille $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$ ne serait donc pas libre, ce qui contredirait (i).

De même, si (i) était vérifiée, et si A_i appartenait au sous-espace affine engendré par $A_0, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n$, A_i serait barycentre de ces points affectés de coefficients $\lambda_0, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n$ de somme non nulle ; le vecteur $\overrightarrow{A_0A_i}$ serait donc combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_{i-1}}, \overrightarrow{A_0A_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$ et on conclut comme précédemment.

On a donc montré que (i) impliquait (ii).

Si (i) n'est pas vérifiée, la famille de n vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$ n'étant pas une base de E n'est pas libre, puisque n est la dimension de E . Il existe donc des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} = \vec{0}$. Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$, cette relation montre que A_0 est barycentre des points A_1, \dots, A_n et appartient donc au sous-espace affine engendré par ces points. Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, en supposant $\lambda_1 \neq 0$ pour fixer les idées, on

aurait $\lambda_1 = -\sum_{i=2}^n \lambda_i$, d'où

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0 A_i} = \sum_{i=2}^n \lambda_i (\overrightarrow{A_0 A_i} - \overrightarrow{A_0 A_1}) = \sum_{i=2}^n \lambda_i \overrightarrow{A_1 A_i} = \vec{0},$$

ce qui montre que A_1 est barycentre de A_2, \dots, A_n (puisque $\sum_{i=2}^n \lambda_i = -\lambda_1 \neq 0$) et appartient donc au sous-espace affine de E engendré par ces points. On a donc montré par contraposition que (ii) implique (i). \square

Remarque : La condition (i) fait jouer un rôle particulier au point A_0 ; l'équivalence avec la seconde condition montre qu'en fait tous les points A_i jouent le même rôle : on aurait donc pu rajouter dans l'énoncé n conditions équivalentes à la première en permutant A_0 avec l'un des points A_1, \dots, A_n .

Définition 11. *On appelle repère affine de E toute famille (A_0, \dots, A_n) de points de E vérifiant les conditions précédentes.*

Attention : un repère affine d'un espace affine E de dimension n est donc une famille de $n+1$ points de E (2 points distincts pour une droite, les sommets d'un triangle non aplati pour un plan, les sommets d'un tétraèdre non aplati pour l'espace de dimension 3).

Proposition 12. *Soit (A_0, \dots, A_n) un repère affine d'un espace affine E . Pour tout point M de E , il existe une unique famille $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de réels de somme 1 telle que M soit le barycentre de la famille pondérée $(A_i, \alpha_i)_{i=0,1,\dots,n}$.*

Démonstration : Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une famille de réels de somme 1. Le point M est barycentre du système pondéré $(A_i, \alpha_i)_{i=0,1,\dots,n}$ si et seulement si $\overrightarrow{A_0 M} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{A_0 A_i}$. Or la famille $(\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n})$ étant une base de \overrightarrow{E} , il existe un n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de réels et un seul tel que $\overrightarrow{A_0 M} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{A_0 A_i}$. Le point M est donc barycentre du système pondéré $(A_i, \alpha_i)_{i=0,1,\dots,n}$ où $\alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Si M est barycentre du système pondéré $(A_i, \alpha'_i)_{i=0,1,\dots,n}$ avec $\sum_{i=0}^n \alpha'_i = 0$, alors $\overrightarrow{A_0 M} = \sum_{i=1}^n \alpha'_i \overrightarrow{A_0 A_i}$, d'où $\alpha'_i = \alpha_i$ pour $i = 1, \dots, n$ et $\alpha'_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \alpha'_i = 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i = \alpha_0$. \square

Définition 12. *Les coefficients $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ définis dans la proposition 12 sont appelés coordonnées barycentriques de M dans le repère affine (A_0, \dots, A_n) .*

Le point M s'écrit donc $M = \sum_{i=0}^n \alpha_i A_i$, avec $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$. Par homogénéité du barycentre, M est aussi barycentre du système $(A_i, \lambda \alpha_i)_{i=0,\dots,n}$ pour tout réel non nul λ . On

dit parfois que les $\lambda\alpha_i$ constituent un système de coordonnées barycentriques homogènes de M dans le repère affine (A_0, \dots, A_n) ; les α_i sont alors appelés coordonnées barycentriques *réduites* ou *normalisées* de M dans ce repère.

La démonstration de la proposition 12 montre que l'on passe très facilement des coordonnées cartésiennes dans un repère $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ aux coordonnées barycentriques dans le repère affine (A_0, \dots, A_n) : si (x_1, \dots, x_n) sont les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$, alors $(1 - \sum_{i=1}^n x_i, x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées barycentriques de M dans le repère affine (A_0, \dots, A_n) .

Réiproquement, si $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sont les coordonnées barycentriques de M dans le repère affine (A_0, \dots, A_n) , les coordonnées cartésiennes de M dans le repère cartésien $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ sont $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

On en déduit immédiatement l'équation barycentrique d'un hyperplan affine.

Proposition 13. *Soit E un espace affine de dimension n rapporté à un repère affine (A_0, \dots, A_n) et $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ les coordonnées barycentriques dans ce repère d'un point générique M de E . Tout hyperplan affine de E admet une équation barycentrique de la forme $\sum_{i=0}^n b_i\alpha_i = 0$, où (b_0, b_1, \dots, b_n) est une famille de réels non tous égaux. Cette équation est unique à multiplication près par un réel non nul. Réiproquement, toute équation de ce type est celle d'un hyperplan affine.*

Démonstration : On a vu à la proposition 10 que tout hyperplan affine admettait dans le repère cartésien $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ une équation de la forme $a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, où a_1, \dots, a_n sont des réels non tous nuls et (x_1, \dots, x_n) les coordonnées cartésiennes d'un point générique M . En remarquant que $\alpha_i = x_i$ pour $i = 1, \dots, n$ et $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$, cette équation s'écrit

$$a_0 \sum_{i=0}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i = \sum_{i=0}^n b_i \alpha_i = 0$$

en posant $b_0 = a_0$ et $b_i = a_0 + a_i$ pour $i = 1, \dots, n$. La condition « a_1, \dots, a_n non tous nuls » équivaut à « b_0, b_1, \dots, b_n non tous égaux ». \square

On remarque que cette équation est valable tant pour des coordonnées barycentriques normalisées ($\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$) que pour des coordonnées barycentriques quelconques ($\sum_{i=0}^n \alpha_i \neq 0$).

1.5 Convexité

Définition

Définition 13. Soient A et B deux points d'un espace affine E . Le segment AB , noté $[AB]$, est l'ensemble des barycentres de A et B affectés de coefficients tous deux positifs, i.e. $[AB] = \{\alpha A + (1 - \alpha)B \mid \alpha \in [0, 1]\}$.

Définition 14. Une partie C d'un espace affine E est dite convexe si pour tout couple (A, B) de points de C le segment $[AB]$ est inclus dans C .

Exemples :

- Tout sous-espace affine d'un espace affine (en particulier l'espace lui-même) est convexe.
- Un segment, une demi-droite (ouverte ou fermée) sont convexes (si A est un point d'un espace affine E et \vec{u} un vecteur non nul de \vec{E} , on appelle *demi-droite* fermée (resp. ouverte) d'origine A et de vecteur directeur \vec{u} l'ensemble $\{M \in E \mid \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}, \lambda \geq 0\}$ (resp. $\{M \in E \mid \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}, \lambda > 0\}$)).
- Une fonction réelle f définie sur un intervalle I de \mathbb{R} est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe (on appelle *épigraphe* de f l'ensemble

$$\{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$$

des points situés au-dessus du graphe de f).

Proposition 14. Une partie C d'un espace affine E est convexe si et seulement si tout barycentre de points de C affectés de coefficients tous positifs appartient à C .

Démonstration : Si tout barycentre de points de C affectés de coefficients tous positifs appartient à C , pour tout couple (A, B) de points de C le segment $[AB]$ est inclus dans C puisque ce segment est l'ensemble des barycentres de A et B affectés de coefficients tous deux positifs. C est donc convexe.

Réiproquement, si C est convexe, on démontre par récurrence sur n que tout barycentre de n points de C affectés de coefficients tous positifs appartient à C : la propriété est vraie pour $n = 2$ par hypothèse ; si elle est vraie pour n et si A_1, \dots, A_{n+1} sont $n+1$ points de C affectés des coefficients tous positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$, le barycentre G de ce système de points pondérés est barycentre du système $[(G', \alpha_1 + \dots + \alpha_n), (A_{n+1}, \alpha_{n+1})]$ où G' est le barycentre du système $(A_i, \alpha_i)_{i=1, \dots, n}$; G' appartient à C par l'hypothèse de récurrence et G appartient au segment $[G' A_{n+1}]$ qui est inclus dans C car C est convexe. \square

Proposition 15. Toute intersection de convexes est convexe.

Démonstration : Soit \mathcal{C} une famille quelconque de convexes et $\Gamma = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$. Pour tout couple (A, B) de points de Γ et tout $C \in \mathcal{C}$, A et B appartiennent à C , donc le segment $[A, B]$ est inclus dans C . Il en résulte que $[A, B]$ est inclus dans Γ . \square

Remarque : une intersection de convexes peut être vide, mais avec la définition que nous avons choisie l'ensemble vide est convexe.

Enveloppe convexe

Cette stabilité par intersection permet, comme dans le cas des sous-espaces affines, de poser la définition suivante :

Définition 15. Soit A une partie non vide d'un espace affine E . On appelle enveloppe convexe de A l'intersection de tous les convexes de E contenant A .

Proposition 16. L'enveloppe convexe d'une partie non vide A d'un espace affine E est le plus petit convexe de E contenant A . C'est aussi l'ensemble de tous les barycentres de points de A affectés de coefficients tous positifs.

Démonstration : Soit A une partie non vide d'un espace affine E et \mathcal{C}_A la famille de tous les convexes de E contenant A . L'enveloppe convexe $\text{Conv}(A) = \bigcap_{C \in \mathcal{C}_A} C$ de A est convexe comme intersection de convexes et contient A . Tout convexe C contenant A appartient à \mathcal{C}_A et contient donc $\text{Conv}(A)$, ce qui montre que $\text{Conv}(A)$ est le plus petit convexe de E contenant A .

Soit \hat{A} l'ensemble de tous les barycentres de points de A affectés de coefficients tous positifs. Tout point M de A est barycentre de la famille à un élément $(A, 1)$ et appartient donc à \hat{A} . Par ailleurs, \hat{A} est convexe par associativité du barycentre. Il en résulte que $\text{Conv}(A)$ est inclus dans \hat{A} .

Soit C un convexe contenant A . Tout point de \hat{A} est barycentre à coefficients tous positifs de points de C , donc appartient à C . Il en résulte que \hat{A} est inclus dans C pour tout $C \in \mathcal{C}_A$, et est donc inclus dans $\text{Conv}(A)$, d'où $\hat{A} = \text{Conv}(A)$. \square

Exemples : l'enveloppe convexe de deux points A et B est le segment $[AB]$; l'enveloppe convexe de 3 points A, B, C du plan est le triangle plein ABC .

Demi-espaces, régionnement

L'exemple des demi-droites n'est qu'un cas particulier d'un exemple fondamental de convexes : les demi-espaces. Si E est un espace affine de dimension n et H un hyperplan affine, H sépare l'espace en deux, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 17. Soit E un espace affine et H un hyperplan affine de E . La relation \mathcal{R} définie par « $A \mathcal{R} B$ si et seulement si $[AB] \cap H = \emptyset$ » est une relation d'équivalence sur le complémentaire $E \setminus H$ de H dans E qui partage $E \setminus H$ en exactement deux classes.

Ces classes sont appelés *demi-espaces ouverts* délimités par H . Les demi-espaces fermés sont obtenus en prenant leurs réunions avec H . Si deux points A et B sont en relation par \mathcal{R} , on dit que A et B sont *du même côté* de H .

Démonstration : Soit $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ un repère cartésien de E dont l'origine O appartient à H et les vecteurs $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}$ appartiennent à l'hyperplan vectoriel \vec{H} . L'hyperplan H admet $x_n = 0$ comme équation cartésienne dans ce repère. Soient A et B deux points de E n'appartenant pas à H , de coordonnées respectives (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) dans ce repère. On a donc $a_n b_n \neq 0$. Tout point M du segment $[AB]$ s'écrit $\alpha A + (1 - \alpha)B$ pour un $\alpha \in [0, 1]$. Ce point appartient à H si et seulement si $\alpha a_n + (1 - \alpha) b_n = 0$, soit encore $\alpha(b_n - a_n) = b_n$. Cette équation en α admet une solution dans $[0, 1]$ si et seulement si a_n et b_n sont de signes opposés. Le segment $[AB]$ rencontre donc H si et seulement si $a_n b_n < 0$. Autrement dit, $A \mathcal{R} B$ si et seulement si a_n et b_n sont de même signe. Il en résulte immédiatement que la relation \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur $E \setminus H$ et que les deux classes d'équivalence pour \mathcal{R} sont $\{M \in E \mid x_n > 0\}$ et $\{M \in E \mid x_n < 0\}$. \square

Si $f(x_1, \dots, x_n) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ est une équation cartésienne de H , ces demi-espaces sont définis par les inéquations $f(x_1, \dots, x_n) > 0$ et $f(x_1, \dots, x_n) < 0$.

Polyèdres convexes

Définition 16. *On appelle polyèdre convexe toute partie bornée non vide d'un espace affine qui peut s'écrire comme intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés.*

Dans le plan, on retrouve la notion usuelle de polygone convexe plein. Dans l'espace de dimension 3, un polyèdre est un solide convexe d'intérieur non vide (s'il n'est pas contenu dans un plan). On remarque que cette définition exclut le cas des dièdres ou des trièdres, qui sont intersection de deux ou trois demi-espaces fermés mais ne sont pas bornés.

On aurait pu donner une autre définition d'un polyèdre convexe, comme le montre la proposition suivante, que nous ne démontrerons pas :

Proposition 18. *Une partie d'un espace affine E est un polyèdre convexe si et seulement si elle est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de E .*

Il résulte immédiatement de la définition que toute intersection d'un polyèdre convexe et d'un sous-espace affine est vide ou est un polyèdre convexe (un sous-espace affine peut s'écrire comme intersection d'un nombre fini d'hyperplans affines et un hyperplan affine est l'intersection des deux demi-espaces fermés qu'il limite). De même toute intersection d'un nombre fini de polyèdres convexes est vide ou est un polyèdre convexe.

Un exemple de polyèdre convexe en dimension quelconque est le n -simplexe

$$\Delta_n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \text{ pour tout } i = 0, \dots, n\}.$$

(Δ_n est une partie de \mathbb{R}^{n+1} , mais il est inclus dans l'hyperplan d'équation $\sum_{i=0}^n x_i = 1$, si bien que sa dimension intrinsèque est n .)

Polyèdres dans l'espace de dimension 3

Théorème 1. Théorème de structure des polyèdres convexes

Pour tout polyèdre convexe d'intérieur non vide P de l'espace de dimension 3, il existe une écriture minimale (au sens du nombre de termes) $P = \bigcap_{i=1}^m P_i^+$ de P comme intersection de demi-espaces fermés. Cette écriture est unique à l'ordre près. L'intersection de P avec chacun des plans P_i est un polygone convexe plein d'intérieur non vide dans P_i . Ces polygones sont appelés faces du polyèdre. Les côtés de ces polygones sont appelés arêtes du polyèdre et leurs sommets sommets du polyèdre.

Théorème 2. Formule d'Euler

Pour tout polyèdre convexe P de l'espace de dimension 3, on a :

$$s - a + f = 2$$

où s est le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces de P .

Nous ne démontrerons pas ces deux théorèmes (voir néanmoins la section 3.6 dans la partie *Compléments*), pas plus que la proposition suivante.

Proposition 19. *Tout polyèdre convexe est l'enveloppe convexe de ses sommets.*

Définition 17. *On appelle tétraèdre (plein) l'enveloppe convexe de quatre points non coplanaires.*

Un tétraèdre possède 4 sommets, 4 faces et 6 arêtes. Ses faces sont des triangles. Si ces triangles sont tous équilatéraux, le tétraèdre est dit *régulier*. Un tétraèdre est donc régulier si et seulement si toutes ses arêtes ont même longueur (cette définition, comme d'autres qui suivront, suppose l'espace affine muni d'une structure euclidienne).

Définition 18. *Soit $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien (non nécessairement orthonormé) de l'espace. On appelle parallélépipède (plein) construit sur ce repère l'ensemble des points de l'espace dont les trois coordonnées dans ce repère appartiennent toutes à l'intervalle $[0, 1]$.*

Un parallélépipède a 8 sommets, 6 faces et 12 arêtes. Ses faces sont des parallélogrammes. Les sommets du parallélépipède construit sur un repère cartésien sont les points de coordonnées toutes égales à 0 ou 1 dans ce repère, ses faces sont portées par les plans d'équations $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$.

Un parallélépipède dont les faces sont des rectangles est appelé *parallélépipède rectangle*.

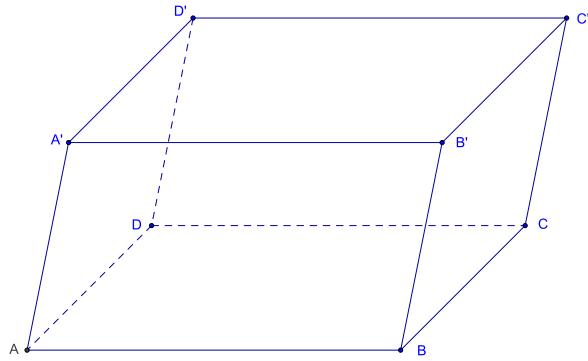


FIGURE 2 – Parallélépipède

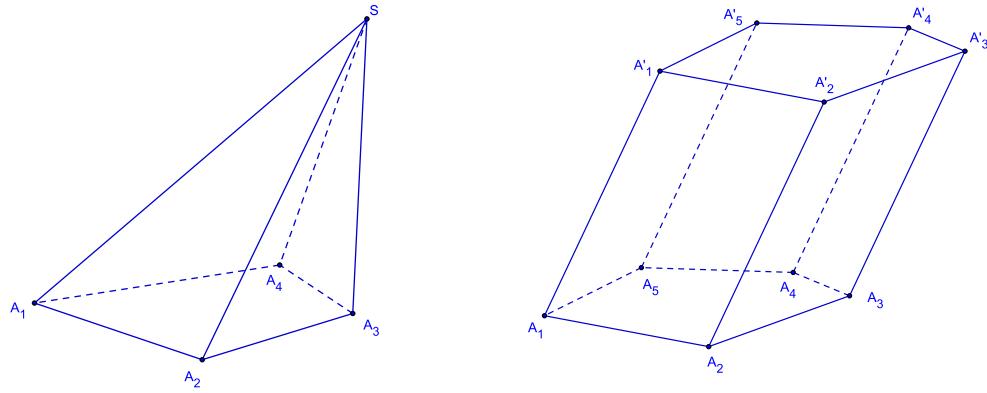


FIGURE 3 – Pyramide et prisme

Un *cube* est un parallélépipède dont les faces sont des carrés.

Une *pyramide* est l'enveloppe convexe d'un polygone plan convexe non aplati, appelé *base* de la pyramide, et d'un point *S* (le *sommet* de la pyramide) n'appartenant pas au plan de ce polygone.

Une pyramide dont la base a n sommets a $n + 1$ faces, $2n$ arêtes et $n + 1$ sommets.
Un tétraèdre est une pyramide ayant pour base un triangle.

Une *pyramide régulière* est une pyramide dont la base est un polygone régulier convexe et dont le sommet appartient à la droite perpendiculaire à la base menée par le centre de ce polygone.

Un *prisme* est l'enveloppe convexe de deux polygones plans convexes, appelés *bases* du prisme, déduits l'un de l'autre par une translation de vecteur n'appartenant pas à la direction commune de leurs plans. Le prisme est dit *droit* si le vecteur de la translation

est orthogonal aux plans des bases.

Un prisme dont les bases ont chacune n sommets a $n + 2$ faces, $3n$ arêtes et $2n$ sommets. Toutes les faces d'un prisme autres que les bases sont des parallélogrammes. Si le prisme est droit, ces faces sont des rectangles. Un parallélépipède est un prisme ayant pour base un parallélogramme.

1.6 Applications affines

Les transformations affines sont les transformations géométriques les plus utilisées en géométrie élémentaire. On verra en particulier au chapitre « Géométrie euclidienne » que toute similitude (et en particulier toute isométrie) est une transformation affine. On dira de fait qu'une propriété est *affine* si elle est conservée par toute transformation affine. En particulier, l'alignement, le parallélisme, le milieu sont des propriétés affines. Par contre l'orthogonalité, les angles, les longueurs ne sont pas des propriétés affines, car elles ne sont pas conservées par toutes les transformations affines (bien qu'elles soient conservées par les isométries).

Définition et premières propriétés

Définition 19. Soient E et F deux espaces affines. Une application f de E dans F est dite affine si il existe une application linéaire \vec{f} de \vec{E} dans \vec{F} telle que $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{f}(\overrightarrow{AB})$ pour tout couple (A, B) de points de E .

Cette propriété peut encore s'écrire $f(M + \vec{u}) = f(M) + \vec{f}(\vec{u})$ pour tout point M de E et tout vecteur $\vec{u} \in \vec{E}$.

L'application \vec{f} est alors uniquement déterminée, puisque pour tout vecteur \vec{u} de \vec{E} , il existe un (en fait une infinité de) couple (A, B) de points de E tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. On l'appelle *application linéaire associée à f* , ou *partie linéaire* de f .

Une application affine est entièrement déterminée par sa partie linéaire et l'image d'un point, puisque $f(B) = f(A) + \overrightarrow{f(A)f(B)} = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AB})$ pour tout point B de E .

Réciproquement, si E et F sont deux espaces affines, A un point de E , A' un point de F et \vec{f} une application linéaire de \vec{E} dans \vec{F} , il existe une (et une seule) application affine f de E dans F de partie linéaire \vec{f} vérifiant $f(A) = A'$.

Exemples :

- toute translation est une application affine d'application linéaire associée l'identité ;
- une application f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est affine si et seulement si elle est de la forme $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux réels ; l'application linéaire associée \vec{f} est alors donnée par $\vec{f}(x) = ax$;
- plus généralement, si E est un espace vectoriel, E est muni d'une structure naturelle d'espace affine sur lui-même ; toute application linéaire de E dans lui-même

est alors affine, et égale à sa partie linéaire ; toute application affine de E dans lui-même est composée d'une application linéaire et d'une translation, puisque, si f est affine, on a $f(\vec{u}) = \vec{f}(\vec{u}) + f(\vec{0})$ pour tout vecteur \vec{u} de E .

Si f est une application quelconque de E dans F , on ne peut en général pas lui associer d'application de \vec{E} dans \vec{F} indépendamment du choix d'une origine : en effet, on peut bien définir, pour tout point O de E , une application \vec{f}_O de \vec{E} dans \vec{F} par $\vec{f}_O(\vec{u}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$ pour tout vecteur \vec{u} de \vec{E} , où M est l'unique point de E tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$, mais cette application \vec{f}_O dépend en général du choix de O . Cependant, il suffit que cette application soit linéaire pour *un* point O de E pour que f soit affine comme le montre la proposition suivante :

Proposition 20. *Soient E et F deux espaces affines et f une application de E dans F . On suppose qu'il existe un point O de E tel que l'application \vec{f}_O précédemment définie soit linéaire. Alors f est affine et \vec{f}_O est l'application linéaire associée à f . En particulier, \vec{f}_O ne dépend alors pas du choix de O .*

Démonstration : On a, pour tout couple (A, B) de points de E :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f(A)f(B)} &= \overrightarrow{f(O)f(B)} - \overrightarrow{f(O)f(A)} \\ &= \vec{f}_O(\overrightarrow{OB}) - \vec{f}_O(\overrightarrow{OA}) \\ &= \vec{f}_O(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \quad \text{car } \vec{f}_O \text{ est linéaire} \\ &= \vec{f}_O(\overrightarrow{AB})\end{aligned}$$

ce qui montre que f est affine de partie linéaire \vec{f}_O . □

Composition

Proposition 21. *Toute composée d'applications affines est une application affine, et la partie linéaire de la composée est la composée des parties linéaires : $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$.*

En particulier, on ne change pas la partie linéaire d'une application affine en la composant (à droite ou à gauche) avec une translation.

Démonstration : Il suffit de remarquer que, pour tout couple (A, B) de points de l'espace de départ de f

$$\overrightarrow{g \circ f(A)g \circ f(B)} = \vec{g}(\overrightarrow{f(A)f(B)}) = \vec{g}(\vec{f}(\overrightarrow{AB})) = \vec{g} \circ \vec{f}(\overrightarrow{AB})$$

et que $\vec{g} \circ \vec{f}$ est linéaire. □

Caractérisation en termes de barycentres

Proposition 22. *Une application f d'un espace affine E dans un espace affine F est affine si et seulement si elle conserve les barycentres, i.e. si et seulement si, pour tout système $(A_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ de points pondérés de E de poids total non nul, l'image $f(G)$ du barycentre G de ce système par f est le barycentre du système de points pondérés $(f(A_i), \lambda_i)_{i=1,\dots,n}$.*

Démonstration : Si f est affine et si G est le barycentre du système $(A_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,n}$, l'égalité

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{f(GA_i)} = \vec{f} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} \right) = \vec{f}(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$$

montre que $f(G)$ est le barycentre du système $(f(A_i), \lambda_i)_{i=1,\dots,n}$.

Réiproquement, montrons que si f conserve les barycentres, l'application \vec{f}_O considérée à la proposition 20 est linéaire pour tout point O de E . Soient donc \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de \vec{E} , λ et μ deux réels, M et N les points de E définis par $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$, et P le point de E défini par $\overrightarrow{OP} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \lambda \overrightarrow{OM} + \mu \overrightarrow{ON}$. Le point P est le barycentre du système pondéré $[(O, 1 - \lambda - \mu), (M, \lambda), (N, \mu)]$. Il en résulte que $f(P)$ est le barycentre du système pondéré $[(f(O), 1 - \lambda - \mu), (f(M), \lambda), (f(N), \mu)]$, d'où

$$\begin{aligned} \vec{f}_O(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) &= \overrightarrow{f(O)f(P)} \\ &= \lambda \overrightarrow{f(O)f(M)} + \mu \overrightarrow{f(O)f(N)} \\ &= \lambda \vec{f}_O(\vec{u}) + \mu \vec{f}_O(\vec{v}), \end{aligned}$$

ce qui montre, d'après la proposition 20, que \vec{f}_O est linéaire. \square

Corollaire 1. *L'image (resp. l'image réciproque) d'un convexe par une application affine est un convexe.*

Démonstration : Il suffit de remarquer que, d'après la proposition précédente, l'image par une application affine f d'un segment $[AB]$ est le segment $[f(A)f(B)]$. \square

Image et image réciproque d'un sous-espace affine

Proposition 23. *Soient E et F deux espaces affines, et f une application affine de E dans F . L'image $f(G)$ par f d'un sous-espace affine G de E est un sous-espace affine de F , de direction l'image $\vec{f}(\vec{G})$ de \vec{G} par \vec{f} .*

De même, l'image réciproque $f^{-1}(H)$ par f d'un sous-espace affine H de F est, soit vide, soit un sous-espace affine de E de direction $\vec{f}^{-1}(\vec{H})$.

Démonstration : Soit G un sous-espace affine de E et A un point de G . L'égalité $G = \{A + \vec{u} \mid \vec{u} \in \vec{G}\}$ implique

$$\begin{aligned} f(G) &= \{f(M) \mid M \in G\} \\ &= \{f(A + \vec{u}) \mid \vec{u} \in \vec{G}\} \\ &= \{f(A) + \vec{f}(\vec{u}) \mid \vec{u} \in \vec{G}\} \\ &= \{f(A) + \vec{v} \mid \vec{v} \in \vec{f}(\vec{G})\}, \end{aligned}$$

ce qui montre que $f(G)$ est le sous-espace affine de F passant par $f(A)$ de direction $\vec{f}(\vec{G})$.

Soit H un sous-espace affine de F . Si $f^{-1}(H)$ n'est pas vide, soit A un point de $f^{-1}(H)$. Un point M de E appartient à $f^{-1}(H)$ si et seulement si $f(M)$ appartient à H , i.e. si et seulement si $\vec{f}(A)f(M) = \vec{f}(\vec{AM})$ appartient à \vec{H} , ou encore si et seulement si \vec{AM} appartient au sous-espace vectoriel $\vec{f}^{-1}(\vec{H})$ de \vec{E} , ce qui montre que $f^{-1}(H)$ est le sous-espace affine de E passant par A et de direction $\vec{f}^{-1}(\vec{H})$. \square

En particulier :

Corollaire 2. *Toute application affine conserve l'alignement et le parallélisme (les images par une application affine de deux sous-espaces affines parallèles sont deux sous-espaces affines parallèles).*

Proposition 24. *Une application affine est injective (resp. surjective, bijective) si et seulement si sa partie linéaire l'est. Il en résulte qu'une application affine d'un espace affine E de dimension finie dans lui-même est bijective si et seulement si elle est injective (resp. surjective).*

Démonstration : Une application affine f d'un espace affine E dans un espace affine F est injective si et seulement si pour tout couple (A, B) de points de E , $f(A) = f(B)$ équivaut à $A = B$. Mais $f(A) = f(B)$ équivaut à $\vec{f}(A)f(B) = \vec{f}(\vec{AB}) = \vec{0}$, i.e. à $\vec{AB} \in \text{Ker}(\vec{f})$ et $A = B$ équivaut à $\vec{AB} = \vec{0}$. Il en résulte que f est injective si et seulement si $\text{Ker}(\vec{f}) = \{\vec{0}\}$, i.e. si et seulement si \vec{f} est injective.

De même f est surjective si et seulement si $f(E) = F$. Mais $f(E)$ est un sous-espace affine de F de direction $\vec{f}(\vec{E}) = \text{Im}(\vec{f})$; c'est donc F si et seulement si $\text{Im}(\vec{f}) = \vec{F}$, i.e. si et seulement si \vec{f} est surjective. \square

Expression dans un repère

1) Repère cartésien

Proposition 25. *Soient E et E' deux espaces affines, de dimensions respectives n et m , $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}) = (O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ un repère cartésien de E , $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}') = (O', \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_m)$ un repère cartésien de E' , et f une application affine de E dans E' . Les coordonnées*

dans \mathcal{R}' de l'image $f(M)$ d'un point M de E par f sont données par $X' = AX + B$, où A est la matrice de \vec{f} dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' , X (resp. X') le vecteur colonne des coordonnées de M (resp. $f(M)$) dans \mathcal{R} (resp. \mathcal{R}'), et B le vecteur colonne des coordonnées de $f(O)$ dans \mathcal{R}' . Réciproquement, toute application de E dans E' donnée par de telles formules est affine.

Démonstration : Il suffit de remarquer que

$$\overrightarrow{O'f(M)} = \overrightarrow{O'f(O)} + \overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{O'f(O)} + \vec{f}(\overrightarrow{OM}).$$

□

Changement de repère

En appliquant cette formule au cas où $E' = E$ et $f = id_E$, on obtient les formules de changement de repère : si $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}) = (O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}') = (O', \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$ sont deux repères cartésiens de E , et si X (resp. X') est le vecteur colonne des coordonnées d'un point M dans le repère \mathcal{R} (resp. \mathcal{R}'), on obtient $X = AX' + B$, où A est la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' et B le vecteur colonne des coordonnées de l'origine O' du nouveau repère \mathcal{R}' dans l'ancien repère \mathcal{R} . Il suffit pour le voir d'appliquer la formule précédente en prenant $f = id_E$, l'espace E étant au départ muni du repère \mathcal{R}' , et à l'arrivée du repère \mathcal{R} . Les vecteurs colonnes de la matrice de passage sont obtenus en exprimant les vecteurs de la nouvelle base \mathcal{B}' de \vec{E} dans l'ancienne base \mathcal{B} .

Formes affines et hyperplans

Définition 20. On appelle forme affine (ou fonction affine) sur un espace affine E toute application affine de E dans \mathbb{R} .

L'application linéaire associée à une forme affine sur E est donc une forme linéaire sur \vec{E} . Une forme affine f sur E s'exprime en coordonnées cartésiennes par : $f(M) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, où les a_i sont des réels et les x_i les coordonnées de M . Toute forme affine non constante est surjective et l'ensemble des points où une forme affine non constante f s'annule est un hyperplan affine H de direction l'hyperplan vectoriel $\vec{H} = \ker \vec{f}$. Plus généralement, toutes les lignes de niveau de f sont des hyperplans affines parallèles à H et les demi-espaces fermés (resp. ouverts) délimités par H sont les ensembles $\{M \in E \mid f(M) \geq 0\}$ et $\{M \in E \mid f(M) \leq 0\}$ (resp. $\{M \in E \mid f(M) > 0\}$ et $\{M \in E \mid f(M) < 0\}$).

2) Repère affine

Proposition 26. Soit E et F deux espaces affines, (A_0, \dots, A_n) un repère affine de E , (A'_0, \dots, A'_n) une famille de $n + 1$ points de F , où $n = \dim(E)$. Alors il existe une application affine f et une seule de E dans F qui vérifie $f(A_i) = A'_i$ pour tout $i = 0, 1, \dots, n$. De plus f est bijective si et seulement si la famille (A'_0, \dots, A'_n) est un repère affine de F .

Démonstration : L'unicité est évidente : si $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ sont les coordonnées barycentriques normalisées ($\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$) du point M de E dans le repère affine (A_0, \dots, A_n) , son image par f est le point $f(M) = \sum_{i=0}^n \alpha_i A'_i$ de F puisqu'une application affine conserve les barycentres.

Pour démontrer l'existence, il suffit de vérifier que l'application f de E dans F qui à tout point $M = \sum_{i=0}^n \alpha_i A_i$ (où $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$) associe le point $f(M) = \sum_{i=0}^n \alpha_i A'_i$ de F est affine, et pour cela de vérifier qu'elle conserve les barycentres. Cette propriété résulte de l'associativité du barycentre.

L'application f est surjective si et seulement si tout point de F peut s'écrire comme barycentre des points A'_0, \dots, A'_n et elle est injective si et seulement si cette écriture est unique. Ces deux conditions signifient que (A'_0, \dots, A'_n) est un repère affine de F . \square

En particulier deux applications affines qui coïncident sur un repère affine sont égales :

Corollaire 3. *Soient E et F deux espaces affines, f et g deux applications affines de E dans F , et (A_0, \dots, A_n) un repère affine de E . Si $f(A_i) = g(A_i)$ pour tout $i = 0, 1, \dots, n$, alors $f = g$.*

1.7 Le groupe affine

Définition 21. *Soit E un espace affine. On appelle transformation affine de E toute application affine bijective de E dans lui-même. Les transformations affines de E constituent un sous-groupe (pour la composition) du groupe des permutations de E . Le groupe des transformations affines de E est appelé groupe affine de E , et noté $GA(E)$.*

Proposition 27. *L'application $f \mapsto \vec{f}$ est un homomorphisme surjectif du groupe affine $GA(E)$ dans le groupe linéaire $GL(\vec{E})$ (groupe des applications linéaires bijectives de \vec{E} dans lui-même). Son noyau est le sous-groupe des translations de E .*

Il en résulte que le groupe des translations de E est un sous-groupe distingué de $GA(E)$.

Démonstration : La première assertion résulte de la relation $\overline{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$ pour tout couple d'éléments de $GA(E)$ et du fait que pour tout $\vec{f} \in GL(\vec{E})$ et tout couple (O, O') de points de E , il existe une transformation affine $f \in GA(E)$ et une seule de partie linéaire \vec{f} vérifiant $f(O) = O'$. La seconde vient de ce qu'un élément f de $GA(E)$ est une translation si et seulement si sa partie linéaire \vec{f} est l'identité de \vec{E} . En effet la relation $\overline{f(A)f(B)} = \overline{AB}$ équivaut à la relation $\overline{Af(A)} = \overline{Bf(B)}$ (le quadrilatère $ABf(B)f(A)$

est alors un parallélogramme). Elle est donc vraie pour tout couple (A, B) de points de E si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{Af(A)}$ ne dépend pas du point A . \square

Stabilisateur d'un point

Le groupe affine $GA(E)$ de E opère sur E par l'application $(f, M) \mapsto f(M)$. Rappelons qu'on appelle alors *stabilisateur* d'un point O de E le sous-groupe $\text{Stab}(O)$ de $GA(E)$ constitué des transformations affines f laissant fixe le point O :

$$\text{Stab}(O) = \{f \in GA(E) \mid f(O) = O\}.$$

Proposition 28. *Pour tout point O de E , la restriction de l'application $f \mapsto \vec{f}$ à $\text{Stab}(O)$ est un isomorphisme de $\text{Stab}(O)$ sur le groupe linéaire $GL(\vec{E})$.*

Démonstration : L'application $f \mapsto \vec{f}$ est un morphisme de groupes de $GA(E)$ sur $GL(\vec{E})$ de noyau le groupe des translations de E (proposition 27). Sa restriction à $\text{Stab}(O)$ est injective car une translation ayant un point fixe est l'identité et elle est surjective (pour tout \vec{f} in $GL(E)$, l'application f de E dans E définie par $\overrightarrow{Of(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{OM})$ est l'unique élément de $\text{Stab}(O)$ de partie linéaire \vec{f}). \square

Points fixes d'une transformation affine

Proposition 29. *L'ensemble $\text{Fix}(f)$ des points fixes d'une transformation affine f de E est, soit vide, soit un sous-espace affine de direction $\ker(\vec{f} - id_{\vec{E}})$ (c'est-à-dire le sous-espace propre de \vec{f} associé à la valeur propre 1).*

Démonstration : Soit O une origine dans E . Un point A est fixe par f si et seulement si $\overrightarrow{f(O)f(A)} = \overrightarrow{f(O)A}$, i.e. si et seulement si $\overrightarrow{f(OA)} = \overrightarrow{f(O)O} + \overrightarrow{OA}$, soit encore $(\vec{f} - id_{\vec{E}})(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{f(O)O}$. Si le vecteur $\overrightarrow{f(O)O}$ n'appartient pas à l'image de $\vec{f} - id_{\vec{E}}$, f n'admet pas de point fixe. Si $\overrightarrow{f(O)O}$ appartient à l'image de $\vec{f} - id_{\vec{E}}$, il existe un point A fixe par f . Un point M de E est alors fixe par f si et seulement si $\overrightarrow{Af(M)} = \overrightarrow{AM}$, i.e. $\overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{f(AM)} = \overrightarrow{AM}$. L'ensemble des points fixes de f est alors le sous-espace affine de E passant par A de direction $\ker(\vec{f} - id_{\vec{E}})$. \square

En particulier :

Proposition 30. *Soit f une transformation affine d'un espace affine E . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) f admet un point fixe et un seul ;
- (ii) 1 n'est pas valeur propre de \vec{f} .

Démonstration : L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ résulte immédiatement de la proposition 29. Montrons que si 1 n'est pas valeur propre de \vec{f} , i.e. si $\vec{f} - id_{\vec{E}}$ est injective, alors f

admet un point fixe et un seul. L'application linéaire $\vec{f} - id_{\vec{E}}$ étant injective et E de dimension finie, elle est bijective et il résulte de la démonstration de la proposition 29 que f admet un point fixe et un seul. \square

Toute transformation affine est composée d'une transformation affine ayant un point fixe et d'une translation. Plus précisément, si f est une transformation affine de E et O un point quelconque de E , $g = t_{\overrightarrow{f(O)O}} \circ f$ laisse O fixe et l'on a $f = t_{\overrightarrow{O f(O)}} \circ g$. La proposition suivante étudie le cas où il existe une telle décomposition commutative.

Proposition 31. *Soit f une transformation affine d'un espace affine E telle que le noyau et l'image de $\vec{f} - id_{\vec{E}}$ soient des sous-espaces vectoriels supplémentaires de \vec{E} . Alors il existe une transformation affine g de E admettant un point fixe et une translation t de E telles que $f = t \circ g = g \circ t$.*

Démonstration : Soit O une origine dans E . Le vecteur $\overrightarrow{O f(O)}$ se décompose en somme d'un vecteur $\vec{u} \in \text{Ker}(\vec{f} - id_{\vec{E}})$ et d'un vecteur $\vec{v} \in \text{Im}(\vec{f} - id_{\vec{E}})$. Soit A un point de E tel que $(\vec{f} - id_{\vec{E}})(\overrightarrow{OA}) = -\vec{v}$, i.e. $\vec{f}(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA} - \vec{v}$, t la translation de vecteur \vec{u} et $g = t^{-1} \circ f$. L'égalité :

$$g(A) = f(A) - \vec{u} = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OA}) - \vec{u} = O + \overrightarrow{O f(O)} + \vec{f}(\overrightarrow{OA}) - \vec{u} = O + \vec{u} + \vec{v} + \overrightarrow{OA} - \vec{v} - \vec{u} = A$$

montre que A est fixe par g . Par ailleurs, $f = t \circ g$ et la relation

$$f(M + \vec{u}) = f(M) + \vec{f}(\vec{u}) = f(M) + \vec{u} \quad \text{pour tout point } M \text{ de } E$$

montre que f , et donc g , commute avec t . \square

1.8 Homothéties et translations

Définition 22. *Soit E un espace affine, O un point de E et k un réel non nul. L'homothétie $h_{O,k}$ de centre O et de rapport k est l'application qui à tout point M de E associe le point $M' = h_{O,k}(M)$ défini par $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.*

On vérifie immédiatement que $h_{O,k}$ est une transformation affine d'application linéaire associée l'homothétie vectorielle $k id_{\vec{E}}$ de rapport k , i.e. l'application linéaire qui à tout vecteur \vec{u} de \vec{E} associe le vecteur $k\vec{u}$, et que si k est différent de 1, O est le seul point fixe de $h_{O,k}$ (si $k = 1$, $h_{O,k}$ est l'identité).

La proposition 30 montre que, réciproquement, toute transformation affine f de partie linéaire $\vec{f} = k id_{\vec{E}}$, avec $k \neq 1$, admet un point fixe O et un seul ; il en résulte aussitôt que f est l'homothétie de centre O et de rapport k .

Proposition 32. *Soit E un espace affine, et k un réel différent de 0 et de 1. Une application affine de E dans E est une homothétie de rapport k si et seulement si sa partie linéaire est une homothétie vectorielle de rapport k .*

On a obtenu à la proposition 27 une caractérisation analogue des translations :

Proposition 33. *Une application affine d'un espace affine E dans lui-même est une translation si et seulement si sa partie linéaire est l'identité de \vec{E} .*

La proposition suivante se déduit immédiatement de ces deux caractérisations.

Proposition 34. *L'ensemble des homothéties et des translations d'un espace affine E constitue un sous-groupe du groupe affine de E , appelé groupe des homothéties-translations.*

Plus précisément, la composée de deux homothéties de rapports k_1 et k_2 est une homothétie de rapport k_1k_2 si $k_1k_2 \neq 1$, une translation si $k_1k_2 = 1$. La composée d'une homothétie de rapport $k \neq 1$ et d'une translation est une homothétie de rapport k . L'application réciproque d'une homothétie de rapport k est l'homothétie de même centre et de rapport $1/k$.

Le groupe des homothéties-translations est parfois aussi appelé groupe des *dilatations* (mais il faut se méfier : ce terme a, pour certains auteurs, un autre sens).

La proposition suivante caractérise géométriquement les éléments de ce sous-groupe :

Proposition 35. *Une transformation affine est une homothétie ou une translation si et seulement si elle transforme toute droite en une droite parallèle.*

Démonstration : Soit f une transformation affine de E . Pour tout vecteur non nul \vec{u} de \vec{E} et tout point A de E , la droite de vecteur directeur \vec{u} passant par A est transformée par f en la droite de vecteur directeur $\vec{f}(\vec{u})$ passant par $f(A)$. La condition de l'énoncé équivaut donc à « \vec{f} transforme tout vecteur non nul de \vec{E} en un vecteur colinéaire ».

Cette condition est évidemment vérifiée si f est une homothétie ou une translation.

Réciproquement, si cette condition est vérifiée, il existe pour tout vecteur non nul \vec{u} de \vec{E} un réel $\lambda(\vec{u})$ tel que $\vec{f}(\vec{u}) = \lambda(\vec{u})\vec{u}$. Il faut montrer que $\lambda(\vec{u})$ ne dépend pas de \vec{u} , autrement dit que $\lambda(\vec{u}) = \lambda(\vec{v})$ pour tout couple (\vec{u}, \vec{v}) de vecteurs non nuls de \vec{E} . Si \vec{v} est colinéaire à \vec{u} , il existe un réel α tel que $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ et par linéarité de \vec{f} $\vec{f}(\vec{v}) = \alpha\vec{f}(\vec{u}) = \alpha\lambda(\vec{u})\vec{u} = \lambda(\vec{u})\vec{v}$, d'où $\lambda(\vec{v}) = \lambda(\vec{u})$. Si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires, le système (\vec{u}, \vec{v}) est libre et l'égalité

$$\lambda(\vec{u} + \vec{v})\vec{u} + \lambda(\vec{u} + \vec{v})\vec{v} = \lambda(\vec{u} + \vec{v})[\vec{u} + \vec{v}] = \vec{f}(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{f}(\vec{u}) + \vec{f}(\vec{v}) = \lambda(\vec{u})\vec{u} + \lambda(\vec{v})\vec{v}$$

montre que $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda(\vec{u}) = \lambda(\vec{v})$. Le réel $\lambda = \lambda(\vec{u})$ ne dépend donc pas de \vec{u} et \vec{f} est l'homothétie vectorielle de rapport λ . Il résulte alors de la proposition 32 que f est une homothétie si $\lambda \neq 1$ et de la proposition 33 que f est une translation si $\lambda = 1$. \square

Il faut bien distinguer cette propriété de la conservation du parallélisme : toute transformation affine transforme des droites parallèles en des droites parallèles ; mais seules les homothéties et les translations transforment toute droite en une droite parallèle à elle-même.

1.9 Projections, symétries, affinités

Soit E un espace affine, F un sous-espace affine de E et \vec{G} un sous-espace vectoriel de \vec{E} supplémentaire de \vec{F} . Il résulte de la proposition 9 que, pour tout point M de E , l'intersection $F \cap \text{Aff}(M, \vec{G})$ de F et du sous-espace affine $\text{Aff}(M, \vec{G})$ de direction \vec{G} passant par M est constituée d'un point M' et d'un seul (ce point M' est l'unique point de F vérifiant $\overrightarrow{MM'} \in \vec{G}$). On peut donc définir une application p de E dans lui-même par $p(M) = M'$. Cette application est appelée *projection sur F parallèlement à \vec{G}* ou *dans la direction \vec{G}* .

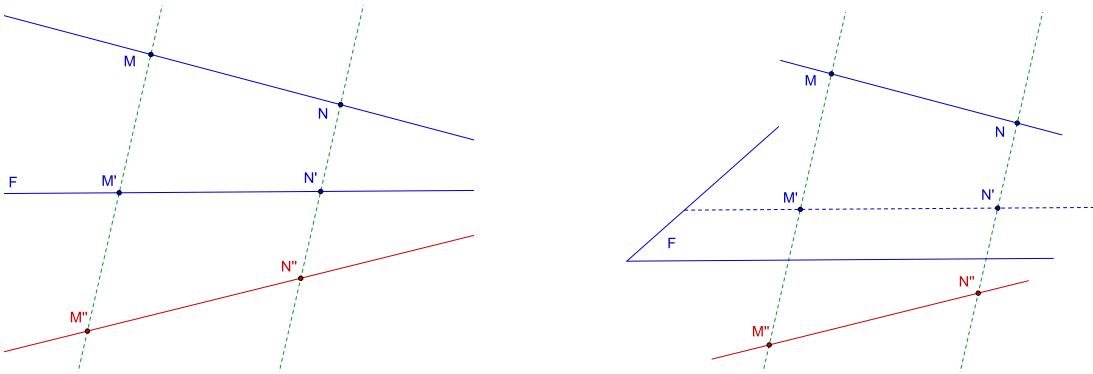


FIGURE 4 – Projection et symétrie dans le plan et dans l'espace.

Soit alors M'' le symétrique de M par rapport à M' : on a donc $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{MM'}$. L'application s de E dans lui-même qui à M associe M'' est appelée *symétrie par rapport à F parallèlement à \vec{G}* ou *dans la direction \vec{G}* .

Plus généralement, pour tout réel α , on définit l'*affinité* de base F , de direction \vec{G} et de rapport α comme l'application qui au point M associe M''' défini par $\overrightarrow{MM'''} = \alpha \overrightarrow{MM'}$. La projection et la symétrie sont donc des cas particuliers d'affinités correspondant respectivement à $\alpha = 0$ et $\alpha = -1$.

Remarques :

1. Si $F = E$, $\vec{G} = \{\vec{0}\}$; la projection, la symétrie, et les affinités précédemment définies sont alors toutes égales à l'identité. Si au contraire F est réduit à un point, $\vec{F} = \{\vec{0}\}$ et $\vec{G} = \vec{E}$. Il en résulte que la projection p est l'application constante envoyant tout point de E sur F , la symétrie s est l'homothétie de centre ce point et de rapport -1 (on parle alors de symétrie *centrale*) et, plus généralement, l'affinité de rapport α est l'homothétie de rapport α et de centre ce point.
2. Le sous-espace F ne suffit pas à déterminer la projection : il faut en préciser la direction. Si on remplace \vec{G} par un autre supplémentaire de \vec{F} , la projection p

est radicalement changée (quoique son image $p(E)$ soit toujours égale à F). Dans le cas des espaces affines euclidiens, on verra qu'il existe une direction privilégiée : celle de l'orthogonal de \vec{F} dans \vec{E} ; on omettra alors de mentionner \vec{G} , et on parlera simplement de *projection orthogonale*. La même remarque est valable pour les symétries et les affinités.

Rappels d'algèbre linéaire : projections et symétries vectorielles.

Soit \vec{E} un espace vectoriel de dimension finie et \vec{E}_1 et \vec{E}_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de \vec{E} . Tout vecteur \vec{u} de \vec{E} s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, avec $\vec{u}_i \in \vec{E}_i$ ($i = 1, 2$). Les deux applications \vec{p}_1 et \vec{p}_2 de \vec{E} dans lui-même définies par $\vec{p}_i(\vec{u}) = \vec{u}_i$ ($i = 1, 2$) sont linéaires et vérifient les relations :

- $\vec{p}_i \circ \vec{p}_i = \vec{p}_i$ ($i = 1, 2$) ;
- $\vec{p}_1 \circ \vec{p}_2 = \vec{p}_2 \circ \vec{p}_1 = 0$, $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = id_{\vec{E}}$;
- $\text{Ker } \vec{p}_1 = \text{Im } \vec{p}_2 = \vec{E}_2$, $\text{Ker } \vec{p}_2 = \text{Im } \vec{p}_1 = \vec{E}_1$.

Elles sont appelées *projection sur \vec{E}_1 (resp. \vec{E}_2) dans la direction (ou parallèlement à) \vec{E}_2 (resp. \vec{E}_1)*.

Les deux applications \vec{s}_1 et \vec{s}_2 de \vec{E} dans lui-même définies par $\vec{s}_1(\vec{u}) = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$, $\vec{s}_2(\vec{u}) = \vec{u}_2 - \vec{u}_1$ sont appelées *symétrie par rapport à \vec{E}_1 (resp. \vec{E}_2) de direction (ou parallèlement à) \vec{E}_2 (resp. \vec{E}_1)*.

Elles sont linéaires, bijectives et vérifient les relations :

- $\vec{s}_i \circ \vec{s}_i = id_{\vec{E}}$ ($i = 1, 2$) ;
- $\vec{s}_1 = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = 2\vec{p}_1 - id_{\vec{E}}$, $\vec{s}_2 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = 2\vec{p}_2 - id_{\vec{E}}$;
- $\vec{s}_1 \circ \vec{s}_2 = \vec{s}_2 \circ \vec{s}_1 = -id_{\vec{E}}$, $\vec{s}_1 + \vec{s}_2 = 0$.

Réciproquement, si \vec{p} est une application linéaire de \vec{E} dans lui-même vérifiant $\vec{p} \circ \vec{p} = \vec{p}$, les deux sous-espaces vectoriels $\text{Im } \vec{p}$ et $\text{Ker } \vec{p}$ de \vec{E} sont supplémentaires et \vec{p} est la projection sur $\text{Im } \vec{p}$ parallèlement à $\text{Ker } \vec{p}$.

De même, si \vec{s} est une application linéaire de \vec{E} dans lui-même vérifiant $\vec{s} \circ \vec{s} = id_{\vec{E}}$ (on dit que \vec{s} est *involutive*), \vec{s} admet exactement les deux valeurs propres +1 et -1 (sauf si $\vec{s} = \pm id_{\vec{E}}$, auquel cas elle n'admet qu'une valeur propre), et les noyaux des applications linéaires $\vec{s} - id_{\vec{E}}$ et $\vec{s} + id_{\vec{E}}$ (i.e. les sous-espaces propres de \vec{s} correspondant à ces deux valeurs propres) sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de \vec{E} ; \vec{s} est alors la symétrie par rapport au premier parallèlement au second.

Proposition 36. Soit F un sous-espace affine d'un espace affine E et \vec{G} un sous-espace vectoriel supplémentaire de \vec{F} dans \vec{E} . La projection p sur F parallèlement à \vec{G} (resp. la symétrie s par rapport à F parallèlement à \vec{G}) est une application affine, d'application linéaire associée la projection vectorielle \vec{p} sur \vec{F} parallèlement à \vec{G} (resp. la symétrie vectorielle $\vec{s} = 2\vec{p} - id_{\vec{E}}$ par rapport à \vec{F} parallèlement à \vec{G}). Plus généralement, l'affinité f de base F , de direction \vec{G} et de rapport α est une application affine, d'application linéaire associée $\vec{f} = \vec{p} + \alpha(id_{\vec{E}} - \vec{p})$.

Démonstration : Soient M et N deux points quelconques de E , M' et N' leurs projetés sur F dans la direction \vec{G} , M'' et N'' leurs symétriques par rapport à F dans la direction \vec{G} . Par la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'N'} + \overrightarrow{N'N}$. Mais le vecteur $\overrightarrow{M'N'}$ appartient à \vec{F} et le vecteur $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{N'N}$ appartient à \vec{G} comme somme de deux vecteurs de \vec{G} . On a donc $\overrightarrow{M'N'} = \vec{p}(\overrightarrow{MN})$ par définition de la projection vectorielle \vec{p} , ce qui montre que p est affine de partie linéaire \vec{p} .

De même l'égalité

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M''N''} &= \overrightarrow{M''M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN''} \\ &= \overrightarrow{MN} - 2(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{N'N}) \\ &= \overrightarrow{MN} - 2(\overrightarrow{MN} - \vec{p}(\overrightarrow{MN})) \\ &= (2\vec{p} - id_{\vec{E}})(\overrightarrow{MN}) \\ &= \vec{s}(\overrightarrow{MN})\end{aligned}$$

montre que la symétrie s est affine de partie linéaire la symétrie vectorielle \vec{s} .

La démonstration pour l'affinité est analogue. \square

Une projection, étant affine, conserve les rapports de mesures algébriques sur une même droite. La partie directe du *théorème de Thalès* ne fait que traduire cette propriété :

Théorème 3. (*Théorème de Thalès*)

Soient Δ_A , Δ_B , Δ_C trois droites parallèles distinctes d'un plan affine P coupant deux droites D et D' respectivement en A , B , C et A' , B' , C' . Alors

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}. \quad (*)$$

Réiproquement, soient Δ_A , Δ_B , Δ_C trois droites distinctes d'un plan affine P coupant deux droites D et D' respectivement en A , B , C et A' , B' , C' . On suppose Δ_A et Δ_B parallèles, C et C' distincts et

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}.$$

Alors Δ_C est parallèle à Δ_A et Δ_B .

Démonstration : La partie directe du théorème résulte immédiatement du caractère affine de la projection p sur D' dans la direction commune des droites Δ_A , Δ_B , Δ_C : si \vec{u} est un vecteur directeur de D et si les mesures algébriques sur D sont définies à partir de ce vecteur, les relations $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \overline{AC} \vec{u}$ impliquent $\overrightarrow{A'B'} = \overline{A'B'} = p(A)p(B) = \vec{p}(\overrightarrow{AB}) = \overline{AB} \vec{p}(\vec{u})$, $\overrightarrow{A'C'} = \overline{A'C'} = p(A)p(C) = \vec{p}(\overrightarrow{AC}) = \overline{AC} \vec{p}(\vec{u})$. En définissant les mesures

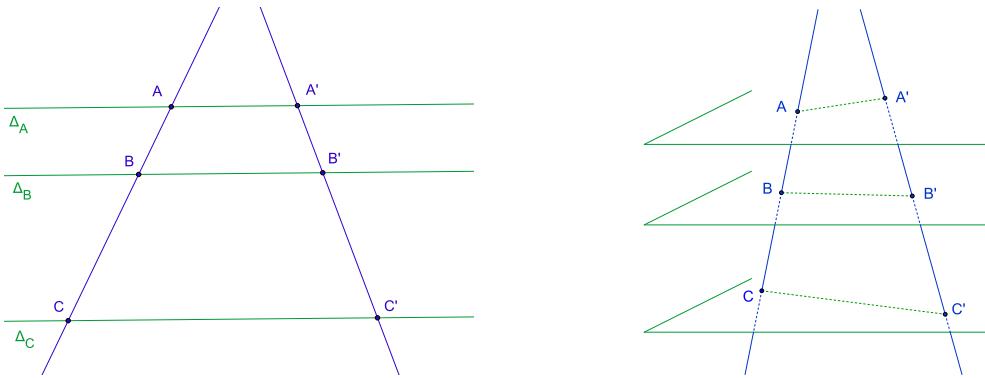


FIGURE 5 – Le théorème de Thalès dans le plan et dans l'espace.

algébriques sur D' en prenant $\vec{p}(\vec{u})$ comme vecteur directeur (ce vecteur n'est pas nul, et on rappelle que les rapports de mesures algébriques sur une droite ne dépendent pas du choix du vecteur directeur), la relation $(*)$ en résulte immédiatement.

Réiproquement, supposons la relation $(*)$ vérifiée. La parallèle à Δ_A menée par C coupe la droite D' en un point C'' qui vérifie $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}}$ par la partie directe du théorème. Il en résulte $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$, d'où $\overline{A'C''} = \overline{A'C'}$ et $C'' = C'$, ce qui montre que Δ_C est parallèle à Δ_A . \square

La partie directe du théorème de Thalès ne faisant que traduire le caractère affine des projections, on peut énoncer un théorème analogue en toute dimension, en particulier dans l'espace de dimension 3 :

Théorème 4. (*Théorème de Thalès dans l'espace*) Soient Π_A , Π_B , Π_C trois plans parallèles distincts de l'espace coupant deux droites D et D' respectivement en A , B , C et A' , B' , C' . Alors

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}. \quad (*)$$

Mais le théorème de Thalès dans l'espace n'admet pas de réciproque analogue à celle du théorème de Thalès dans le plan : si on suppose les plans Π_A et Π_B parallèles et la relation $(*)$ vérifiée, on ne peut en déduire que Π_C est parallèle à Π_A et Π_B . On a cependant :

Proposition 37. Soient D et D' deux droites de l'espace, A , B , C trois points de D , A' , B' , C' trois points de D' , ces six points étant supposés tous distincts. Si

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}},$$

alors les trois droites (AA') , (BB') , (CC') sont parallèles à un même plan.

Démonstration : Si les droites (AA') et (BB') sont parallèles, les droites D et D' sont coplanaires et (CC') est parallèle à (AA') et (BB') par le théorème de Thalès dans le plan.

Sinon, soient Π_A, Π_B, Π_C les plans passant respectivement par A, B, C de direction le plan vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$. Ces trois plans sont parallèles et la droite (AA') (resp. (BB')) est incluse dans Π_A (resp. Π_B) de sorte que Π_A (resp. Π_B) coupe D' en A' (resp. B'). Le plan Π_C coupe D' en un point C'' qui vérifie $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}}$ d'après le théorème direct. Il en résulte $\overline{A'C''} = \overline{A'C'}$, d'où $C'' = C'$. La droite (CC') est donc incluse dans Π_C . \square

2 Entrainement

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. Soit E un espace affine et \vec{E} l'espace vectoriel associé. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Pour tout vecteur \vec{v} de \vec{E} , il existe un couple (A, B) de points de E et un seul tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.
2. Pour tout vecteur \vec{v} de E , il existe un couple (A, B) de points de E tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.
3. Pour tout point A de E et tout vecteur \vec{v} de \vec{E} , il existe un point B de E et un seul tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.
4. Pour tout couple (A, B) de points de E , il existe un unique vecteur \vec{v} de \vec{E} tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.
5. Pour tout triplet (A, B, C) de points de E , on a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
6. Pour tout point B de E et tout vecteur \vec{v} de \vec{E} , il existe un unique point A de E tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.
7. Pour tout couple (A, B) de points de E , il existe un unique point C de E tel que $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$.

Vrai-Faux 2. Soit E un espace affine et A, B, C trois points de E . Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Le vecteur $\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ne dépend pas du point O de E .
2. Le point M défini par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ne dépend pas du point O de E .
3. Le point M défini par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ne dépend pas du point O de E .
4. Le point M défini par $4\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ne dépend pas du point O de E .
5. Le vecteur \vec{v} défini par $3\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ne dépend pas du point O de E .

Vrai-Faux 3. Soit E un espace affine, n et m deux entiers strictement positifs, A_1, \dots, A_n et B_1, \dots, B_m des points de E , G l'isobarycentre des points A_1, \dots, A_n , H l'isobarycentre des points B_1, \dots, B_m , K l'isobarycentre des $n+m$ points $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. K est toujours le milieu du segment $[GH]$.
2. K appartient toujours au segment $[GH]$.

3. $\square n \overrightarrow{KG} = m \overrightarrow{KH}$.
4. $\boxtimes n \overrightarrow{KG} + m \overrightarrow{KH} = \vec{0}$.
5. $\boxtimes H$ appartient à la droite (KG) (en supposant $G \neq K$).
6. $\square H$ appartient au segment $[KG]$.
7. $\boxtimes n \overrightarrow{KG} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{KA_i}$.
8. $\boxtimes K = H$ si et seulement si $H = G$.

Vrai-Faux 4. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. \boxtimes Tout segment est convexe.
2. \square Une droite privée d'un point est convexe.
3. \square Un plan privé d'un point est convexe.
4. \square Le graphe d'une fonction convexe de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est convexe.
5. \boxtimes Le graphe d'une fonction affine de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est convexe.
6. \boxtimes L'enveloppe convexe de la réunion de deux droites sécantes est le plan contenant ces droites.
7. \boxtimes L'enveloppe convexe d'une partie bornée du plan est bornée.
8. \square L'enveloppe convexe de la réunion de deux droites non coplanaires de l'espace E de dimension 3 est E .

Vrai-Faux 5. Soit, dans un espace affine E , h une homothétie de centre A et de rapport $\lambda \neq 1$ et f une transformation affine de E telle que $f(A) \neq A$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. $\square f \circ h = h \circ f$.
2. $\boxtimes f \circ h \circ f^{-1}$ est une homothétie de rapport λ .
3. $\square f \circ h \circ f^{-1}$ est une homothétie de centre A .
4. $\boxtimes h^{-1}$ est une homothétie de centre A .
5. $\square h \circ f \circ h^{-1}$ est une homothétie de centre A .

Vrai-Faux 6. Le cadre est un espace affine de dimension trois. Dire pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse (en justifiant votre réponse).

1. \square Si deux droites sont parallèles à un même plan, elles sont parallèles entre elles.
2. \boxtimes Si deux plans sont parallèles, toute droite qui coupe l'un coupe l'autre.
3. \square Si une droite D est parallèle à un plan P , tout plan non parallèle à P rencontre D .
4. \boxtimes Étant donnés deux plans sécants, toute droite parallèle à ces deux plans est parallèle à leur intersection.

5. Étant données deux droites non coplanaires, il existe toujours au moins un plan tel que ces deux droites soient parallèles à ce plan.
6. Étant donnés deux plans sécants, deux droites parallèles à chacun de ces deux plans sont nécessairement parallèles entre elles.
7. Soient D et D' deux droites non parallèles de l'espace ; il existe un plan P et un seul contenant D tel que D' soit parallèle à P .

Vrai-Faux 7. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Toute transformation affine qui transforme toute droite en une droite parallèle est une homothétie ou une translation.
2. Toute transformation affine dont la partie linéaire est $-id$ est une symétrie centrale.
3. Toute transformation affine admettant un point fixe et un seul est une homothétie.
4. Toute transformation affine dont la partie linéaire est l'identité est une translation.
5. Toute transformation affine qui transforme deux droites parallèles quelconques en deux droites parallèles est une homothétie ou une translation.
6. Toute transformation affine transforme un parallélogramme non aplati en un parallélogramme non aplati.

Vrai-Faux 8. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Une figure bornée du plan ne peut pas admettre deux centres de symétrie distincts.
2. Une figure bornée du plan ne peut pas admettre deux axes de symétrie distincts.
3. Toute transformation affine du plan conservant globalement une droite possède au moins un point fixe.
4. Toute transformation affine du plan conservant globalement un ensemble fini de points possède au moins un point fixe.
5. Toute application affine p du plan dans lui-même vérifiant $p \circ p = p$ est une projection.
6. Toute application affine p du plan dans lui-même vérifiant $\vec{p} \circ \vec{p} = \vec{p}$ est une projection.
7. Si s est une symétrie de l'espace par rapport à une droite D dans la direction d'un plan P , pour tout couple (M, N) de points n'appartenant pas à D les droites $(Ms(M))$ et $(Ns(N))$ sont parallèles.
8. Toute application affine s de l'espace affine E dans lui-même vérifiant $s \circ s = id_E$ est une symétrie affine .

2.2 Exercices

Exercice 1. On appelle *médianes* d'un triangle non aplati ABC les trois droites (AA') , (BB') , (CC') joignant un sommet de ce triangle au milieu du côté opposé.

1. Écrire l'isobarycentre G d'un triangle ABC comme barycentre des points A et A' (resp. B et B' , C et C'), où A' , B' , C' sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Montrer que $\overrightarrow{A'A} = 3\overrightarrow{A'G}$, $\overrightarrow{B'B} = 3\overrightarrow{B'G}$, $\overrightarrow{C'C} = 3\overrightarrow{C'G}$.
2. En déduire que l'isobarycentre d'un triangle non aplati appartient aux trois médianes de ce triangle, qui sont donc concourantes.

Exercice 2. Soient A et B deux points d'un espace affine E et I le milieu du segment $[AB]$. Pour tout point M de E , on note M' l'isobarycentre des trois points A , B , M .

1. Comparer les vecteurs \overrightarrow{IM} et $\overrightarrow{IM'}$.
2. En déduire la nature géométrique de l'application de E dans E qui à tout point M associe le point M' .

Exercice 3. Triangle des milieux

Soit ABC un triangle, A' , B' , C' les milieux des segments $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, G l'isobarycentre des points A , B , C .

1. Montrer que G est l'isobarycentre des trois points A' , B' , C' .
2. En déduire que le triangle $A'B'C'$ (qu'on appellera *triangle des milieux* du triangle ABC) est l'image du triangle ABC par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
3. Montrer que $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{C'A'}$, $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{A'B'}$.
4. Étant donné un triangle $A'B'C'$, montrer qu'il existe un triangle ABC et un seul dont il est le triangle des milieux. Donner, dans le cas où le triangle $A'B'C'$ n'est pas aplati, une construction du triangle ABC ne faisant intervenir que des tracés de parallèles.

Exercice 4. Quadrilatère des milieux

Soit, dans un plan affine E , $ABCD$ un quadrilatère, I , J , K , L , M , N les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[AC]$, $[BD]$.

1. Montrer que les segments $[IK]$, $[JL]$ et $[MN]$ ont tous pour milieu l'isobarycentre des quatre points A , B , C , D .
2. En déduire que $IJKL$, $IMKN$ et $JMLN$ sont des parallélogrammes.
3. Retrouver ces résultats en exprimant les vecteurs \overrightarrow{IJ} , \overrightarrow{LK} , \overrightarrow{IM} , \overrightarrow{NK} , \overrightarrow{JM} , \overrightarrow{NL} en fonction des vecteurs \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{BA} .

Exercice 5. Soit dans l'espace $ABCD$ un tétraèdre non aplati. On appelle *bimédianes* de ce tétraèdre les trois segments joignant les milieux de deux arêtes opposées et *médianes* les quatre segments $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$ joignant un sommet à l'isobarycentre des trois autres sommets. Montrer que l'isobarycentre G des points A , B , C , D

est le milieu des trois bimédianes et qu'il appartient aux quatre médianes. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{A'G}$ et $\overrightarrow{A'A}$ (resp. $\overrightarrow{B'G}$ et $\overrightarrow{B'B}$, $\overrightarrow{C'G}$ et $\overrightarrow{C'C}$, $\overrightarrow{D'G}$ et $\overrightarrow{D'D}$).

Exercice 6. Soit, dans l'espace affine de dimension 3, D_1 une droite définie par un point A et un vecteur directeur \vec{u} et D_2 une droite définie par un point B et un vecteur directeur \vec{v} . Montrer que D_1 et D_2 sont coplanaires si et seulement si les trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \overrightarrow{AB} sont liés.

Exercice 7. Soit, dans l'espace affine de dimension 3 rapporté à un repère cartésien, P un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et D une droite de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$. Donner une condition pour que D soit parallèle à P .

Exercice 8. L'espace de dimension 3 est rapporté à un repère cartésien. Écrire l'équation du plan passant par le point $(0, 1, 0)$ et parallèle au plan d'équation $x + y - z + 3 = 0$.

Exercice 9. Soit, dans l'espace affine de dimension 3 rapporté à un repère cartésien, D la droite d'équations $x + y - z + 3 = 0$, $2x + z - 2 = 0$. Donner l'équation du plan P contenant D et passant par le point $(1, 1, 1)$.

Exercice 10. Soient P_1 , P_2 , P_3 trois plans de l'espace de dimension trois, deux à deux non parallèles. Montrer que les trois droites $D_1 = P_2 \cap P_3$, $D_2 = P_3 \cap P_1$, $D_3 = P_1 \cap P_2$ sont parallèles ou concourantes.

Exercice 11. Dans l'espace affine de dimension 3 rapporté à un repère cartésien, soit D la droite de vecteur directeur $(3, -1, 1)$ passant par le point de coordonnées $(2, 0, 1)$, P le plan passant par le point $(1, -1, 1)$ et de vecteurs directeurs $(2, -3, 1)$ et $(1, 2, 0)$, P' le plan passant par le point $(-5, 3, 0)$ et de vecteurs directeurs $(-1, 1, 1)$ et $(0, 3, 1)$. Déterminer $P \cap D$ et $D \cap P'$.

Exercice 12. 1. Montrer que trois droites D , D' , D'' du plan affine, d'équations respectives $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$, $a''x + b''y + c'' = 0$ dans un repère cartésien, sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

2. En déduire le théorème de Céva : soit ABC un triangle, P , Q , R trois points situés respectivement sur les droites (BC) , (AC) , (AB) , distincts des sommets de ce triangle ; alors les droites (AP) , (BQ) , (CR) sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1.$$

Exercice 13. Soit ABC un triangle non aplati du plan affine E et (\vec{i}, \vec{j}) une base de \vec{E} . On note, pour tout couple (\vec{u}, \vec{v}) de vecteurs de \vec{E} , $\det(\vec{u}, \vec{v})$ le déterminant de ce couple de vecteurs dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

1. Montrer que $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

On appellera *aire orientée* du triangle ABC , l'unité d'aire étant l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs \vec{i} et \vec{j} , le nombre $\frac{1}{2}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

2. Soit M un point de E de coordonnées barycentriques réduites (α, β, γ) dans le repère (A, B, C) . Exprimer les vecteurs \overrightarrow{MB} et \overrightarrow{MC} en fonction des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} . En déduire une expression de $\det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$ en fonction α, β, γ et $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
3. Montrer que les médianes d'un triangle partagent ce triangle en six petits triangles de même aire.

Exercice 14. Soient A, B, C trois points distincts d'une droite affine. Montrer que l'un, et l'un seulement, de ces points appartient au segment défini par les deux autres.

Exercice 15. Soit (A, B, C) un repère affine du plan affine E . Montrer que trois points M_1, M_2, M_3 de E de coordonnées barycentriques réduites respectives $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ dans le repère affine (A, B, C) sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 16. 1. Soit E un espace affine, F_1 et F_2 deux sous-espaces affines de E et k un réel. Montrer que l'ensemble F des points $kM_1 + (1 - k)M_2$, pour M_1 parcourant F_1 et M_2 parcourant F_2 , est un sous-espace affine de E .

2. Préciser la nature de F quand F_1 et F_2 sont deux droites de l'espace affine de dimension 3 (on discutera selon la position de ces droites).

Exercice 17. Montrer que l'enveloppe convexe de trois points A, B, C non alignés du plan est la réunion des segments $[A, M]$ pour M parcourant le segment $[B, C]$. Représenter cette enveloppe convexe sur un dessin.

Exercice 18. Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux parties non vides d'un espace affine E . On appelle *jonction* de \mathcal{A} et \mathcal{B} , et on note $\text{Jonc}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ la réunion de tous les segments joignant un point quelconque de \mathcal{A} à un point quelconque de \mathcal{B} , i. e. l'ensemble des $M \in E$ tels qu'il existe $P \in \mathcal{A}$ et $Q \in \mathcal{B}$ tels que $M \in [PQ]$.

1. Soit \mathcal{P} une partie non vide de E . Comparer $\text{Conv}(\mathcal{P})$ et $\text{Jonc}(\mathcal{P}, \mathcal{P})$. Dessiner $\text{Conv}(\mathcal{P})$ et $\text{Jonc}(\mathcal{P}, \mathcal{P})$ lorsque \mathcal{P} est un ensemble de trois points non alignés.
2. Soit \mathcal{A} et \mathcal{B} deux convexes d'un espace affine E . Comparer $\text{Jonc}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ et $\text{Conv}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$.
3. Dans \mathbb{R}^2 , déterminer $\text{Conv}(\mathcal{P})$ lorsque \mathcal{P} est la réunion de la droite d'équation $y = 0$ et du point $(0, 1)$.

Exercice 19. *Cônes convexes*

Soit C un convexe d'un espace affine E et O un point de E . Montrer que la réunion des demi-droites fermées d'origine O passant par M , pour M décrivant C , est un convexe.

Exercice 20. *Régionnement du plan par les droites portant les côtés d'un triangle*

On considère dans le plan affine un triangle non aplati ABC et on note (α, β, γ) les coordonnées barycentriques réduites d'un point M dans le repère affine (A, B, C) .

1. Montrer que les droites (BC) , (CA) , (AB) portant les côtés du triangle ABC ont respectivement comme équations barycentriques $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.
2. Montrer que ces trois droites divisent le plan en 7 régions, qu'on caractérisera par les signes des coordonnées barycentriques réduites d'un point.

Exercice 21. *Régionnement de l'espace par les plans portant les faces d'un tétraèdre*

On considère dans l'espace un tétraèdre non aplati $ABCD$ et on note $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ les coordonnées barycentriques réduites d'un point M dans le repère affine (A, B, C, D) .

1. Montrer que les plans (BCD) , (CDA) , (DAB) , (ABC) portant les faces du tétraèdre ont respectivement comme équations barycentriques $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$.
2. Montrer que ces quatre plans divisent l'espace en 15 régions, qu'on caractérisera par les signes des coordonnées barycentriques réduites d'un point.

Exercice 22. Montrer que l'image d'un parallélogramme par une transformation affine est un parallélogramme. L'image par une transformation affine d'un quadrilatère qui n'est pas un parallélogramme peut-elle être un parallélogramme ?

Exercice 23. Soient A et A' deux points d'un espace affine E .

1. Montrer qu'il existe une unique symétrie centrale qui envoie A sur A' . Déterminer son centre.
2. Montrer que, pour tout $\lambda \neq 1$, il existe une unique homothétie de rapport λ qui envoie A sur A' . Déterminer son centre.

Exercice 24. Soit, dans le plan affine, ABC un triangle, A' , B' , C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, $s_{A'}$, $s_{B'}$, $s_{C'}$ les symétries centrales de centres ces points. Déterminer la nature géométrique des transformations $s_{B'} \circ s_{A'}$ et $s_{C'} \circ s_{B'} \circ s_{A'}$ (on pourra déterminer l'image de B par ces deux transformations).

Exercice 25. Déterminer le sous-groupe du groupe affine $GA(E)$ d'un espace affine E engendré par les symétries centrales.

Exercice 26. Soit, dans le plan affine, D et D' deux droites sécantes en un point A , et I un point n'appartenant à aucune de ces droites. Construire un triangle ABC tel que B appartienne à D , C appartienne à D' et I soit le milieu de $[BC]$:

- a) en considérant les parallèles à D et D' menées par I ;
- b) en considérant la droite symétrique de D' par rapport à I .

Exercice 27. *Conjuguée d'une translation*

1. Soit E un espace affine, f une transformation affine de E et \vec{u} un vecteur de \overrightarrow{E} . Montrer que $f \circ t_{\vec{u}} \circ f^{-1}$ est la translation de vecteur $\vec{f}(\vec{u})$.
2. En déduire que le centre du groupe affine est réduit à l'identité.

Exercice 28. Soit E un espace affine, O un point de E et f un élément de $GA(E)$. Montrer que l'application $g \mapsto f \circ g \circ f^{-1}$ est un isomorphisme de $\text{Stab}(O)$ sur $\text{Stab}(f(O))$.

Il en résulte que les stabilisateurs de tous les points de E sont des sous-groupes conjugués de $GA(E)$.

Exercice 29. Soit f une transformation affine d'un espace affine E dont la partie linéaire \vec{f} est une homothétie vectorielle de rapport $\lambda \neq 1$.

1. Soit A un point quelconque de E . Montrer que le barycentre O du système de points pondérés $[(A, \lambda), (f(A), -1)]$ est fixe par f .
2. En déduire (sans utiliser la proposition 35) que f est l'homothétie affine de centre O et de rapport λ .

Exercice 30. 1. Déterminer les droites globalement invariantes par une translation de vecteur non nul (resp. par une homothétie de rapport différent de 1).

2. En déduire que la composée de deux homothéties de centres distincts A et B est
 - soit une translation de vecteur proportionnel à \overrightarrow{AB} ;
 - soit une homothétie dont le centre appartient à la droite (AB) .

Exercice 31. Soient A et B deux points d'un espace affine E et f l'application de E dans E qui à tout point M de E associe le point $f(M)$ défini par

$$\overrightarrow{Mf(M)} = 4 \overrightarrow{AM} - 2 \overrightarrow{BM}.$$

1. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{f(M)f(N)}$ et \overrightarrow{MN} pour tout couple (M, N) de points de E .
2. En déduire que f est affine. Expliciter sa partie linéaire.
3. En déduire la nature géométrique de f . Préciser ses points fixes.

Exercice 32. Soit, dans le plan affine, (D_1, D_2, D_3) et (D'_1, D'_2, D'_3) deux triplets constitués chacun de trois droites distinctes concourantes en un point O (resp. O'). Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une transformation affine du plan transformant le premier triplet en le second.

- Soit A (resp. A') un point de D_1 (resp. D'_1) distinct de O (resp. O'), B (resp. B') son projeté sur D_2 (resp. D'_2) dans la direction de D_3 (resp. D'_3), C (resp. C') son projeté sur D_3 (resp. D'_3) dans la direction de D_2 (resp. D'_2). Montrer que $(O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ (resp. $(O', \overrightarrow{O'B'}, \overrightarrow{O'C'})$) est un repère cartésien du plan. Donner les coordonnées du point A (resp. A') dans ce repère.
- En déduire qu'il existe une transformation affine f et une seule du plan vérifiant $f(O) = O'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, $f(A) = A'$.
- Montrer que $f(D_i) = D'_i$ pour $i = 1, 2, 3$.
- Si f et g sont deux transformations affines du plan vérifiant $f(D_i) = D'_i$ et $g(D_i) = D'_i$ pour $i = 1, 2, 3$, montrer que $h = f^{-1} \circ g$ est une homothétie de centre O (on pourra considérer les images des points O, A, B, C par h).

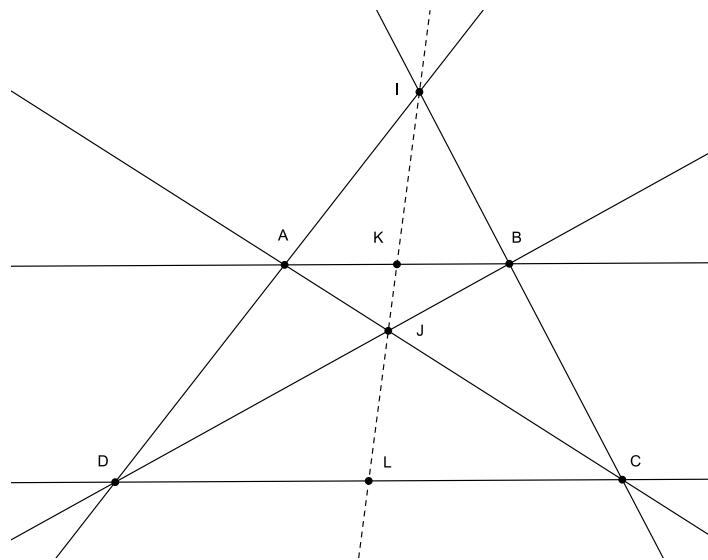
Exercice 33. Soit \mathcal{F} une partie d'un espace affine possédant deux centres de symétrie distincts A et B .

- Montrer qu'il existe une translation de vecteur non nul laissant \mathcal{F} globalement invariante, puis qu'il existe une infinité de telles translations.
- En déduire que \mathcal{F} ne peut être bornée.
- Montrer que \mathcal{F} possède une infinité de centres de symétrie.

Exercice 34. Soit f une application affine d'un espace affine E dans lui-même et $\mathcal{F} = \{M_1, \dots, M_n\}$ un ensemble fini de points de E . On suppose que $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice 35. Soit G un sous-groupe fini de $GA(E)$. Montrer qu'il existe au moins un point de E qui est fixe par tout élément de G . (On pourra considérer l'isobarycentre de la famille $f(M)$ où M est un point de E et f parcourt G .)

Exercice 36. *Le trapèze*

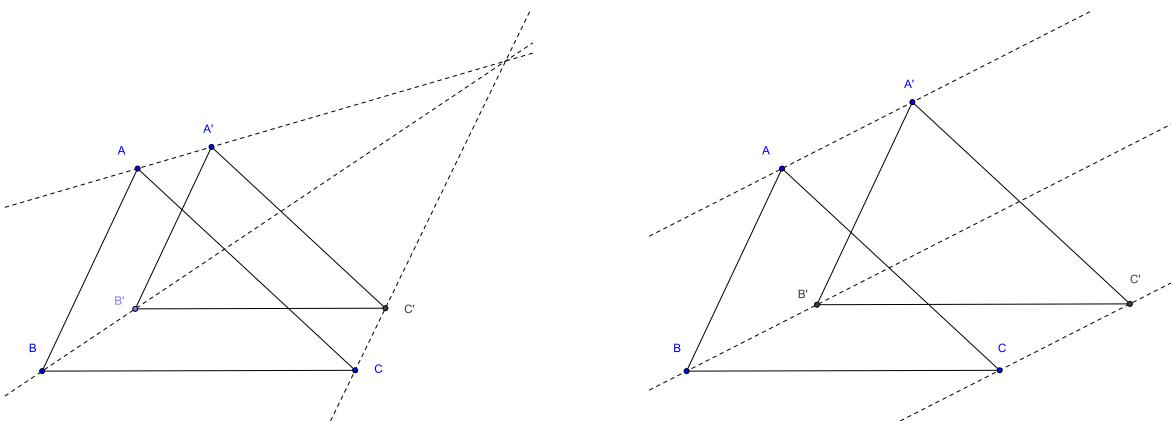


Soit $ABCD$ un trapèze de bases AB et CD . On note K et L les milieux des segments $[AB]$ et $[CD]$ et on suppose que les droites (AD) et (BC) se coupent en un point I et les droites (AC) et (BD) en un point J .

1. Montrer que l'homothétie h_I de centre I et de rapport $\frac{\overline{IA}}{\overline{ID}}$ transforme D en A , C en B et L en K . En déduire que les points I, K, L sont alignés.
2. Montrer de même, en considérant l'homothétie h_J de centre J et de rapport $\frac{\overline{JC}}{\overline{JA}}$, que les points J, K, L sont alignés.
3. Montrer que la composée $h_J \circ h_I$ de ces deux homothéties est la symétrie centrale de centre L .
4. En déduire que :

$$\frac{\overline{IK}}{\overline{IL}} \frac{\overline{JL}}{\overline{JK}} = -1 \quad .$$

Exercice 37. *Un cas particulier du théorème de Desargues*

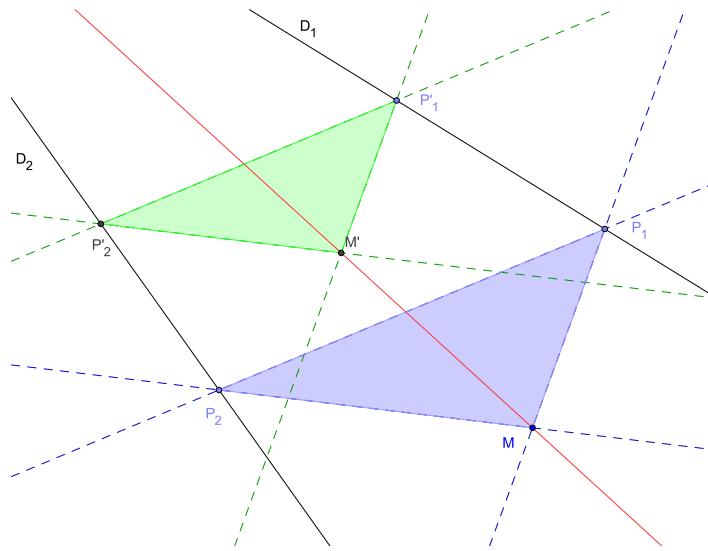


Montrer que deux triangles non aplatis du plan affine se déduisent l'un de l'autre par une homothétie ou une translation si et seulement si leurs côtés sont deux à deux parallèles.

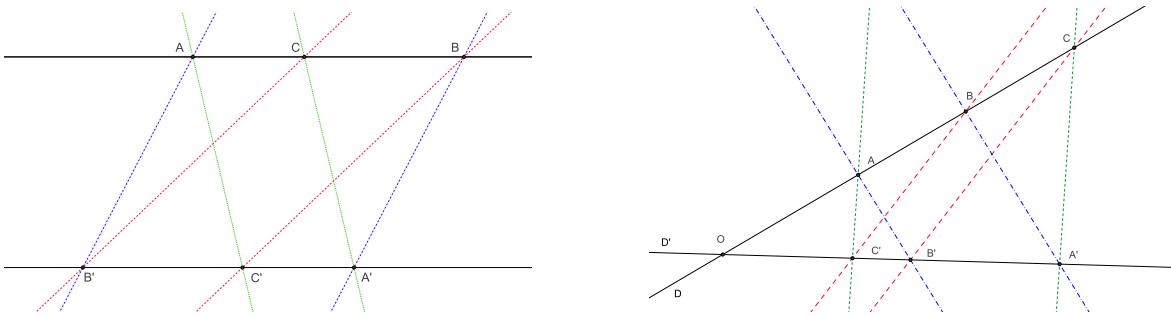
On verra en compléments (section 3.4) le théorème de Desargues dans toute sa généralité.

Exercice 38. *Un problème de construction*

Soient D_1 et D_2 deux droites sécantes du plan affine E et M un point de E n'appartenant à aucune de ces droites. On suppose que le point d'intersection O de D_1 et D_2 est situé hors du cadre de la figure. Donner une construction de la droite (OM) (on pourra s'inspirer de la figure).



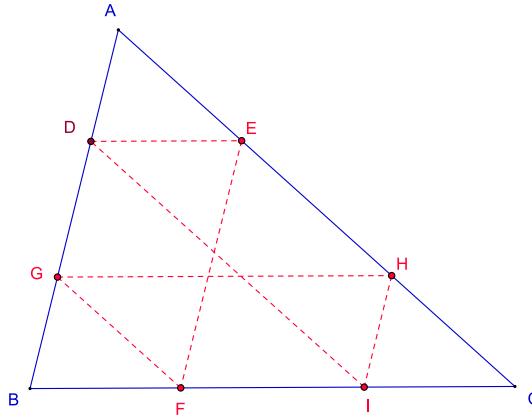
Exercice 39. Deux cas particuliers du théorème de Pappus



1. Soient D et D' deux droites parallèles du plan affine, A, B, C trois points de D , A', B', C' trois points de D' . On suppose (AB') et (BA') parallèles, ainsi que (AC') et (CA') . Montrer que (BC') et (CB') sont parallèles. (On pourra comparer les vecteurs \overrightarrow{BC} et $\overrightarrow{C'B'}$.)
2. Même question en supposant les droites D et D' sécantes en un point O (distinct des points A, B, C, A', B', C'). (On pourra utiliser le théorème de Thalès.)

Exercice 40. Le tourniquet dans le triangle

Par un point D du côté AB d'un triangle ABC on trace la parallèle à (BC) qui coupe (AC) en E ; par E on trace la parallèle à (AB) qui coupe (CB) en F ; par F on trace la parallèle à (CA) qui coupe (BA) en G ; par G on trace la parallèle à (BC) qui coupe (AC) en H ; par H on trace la parallèle à (AB) qui coupe (CB) en I ; par I on trace la parallèle à (CA) qui coupe (BA) en J .



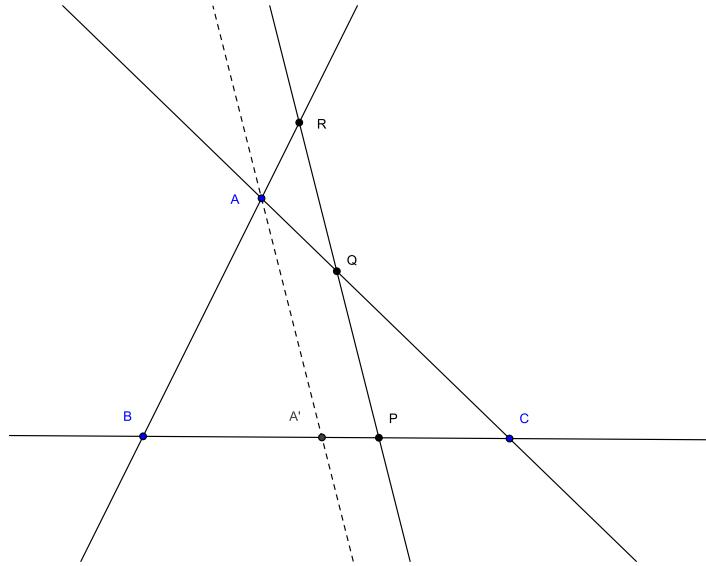
1. Montrer que l'application f de la droite (AB) dans elle-même qui au point D associe le point J est affine.
2. Déterminer les images des points A et B par f .
3. En déduire que $J = D$.
4. Redémontrer ce résultat en utilisant le théorème de Thalès.

Exercice 41. *Théorème de Ménélaüs*

Soit ABC un triangle non aplati, P, Q, R trois points situés respectivement sur les droites (BC) , (CA) et (AB) et distincts des sommets A, B, C . Alors les points P, Q, R sont alignés si et seulement si :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1.$$

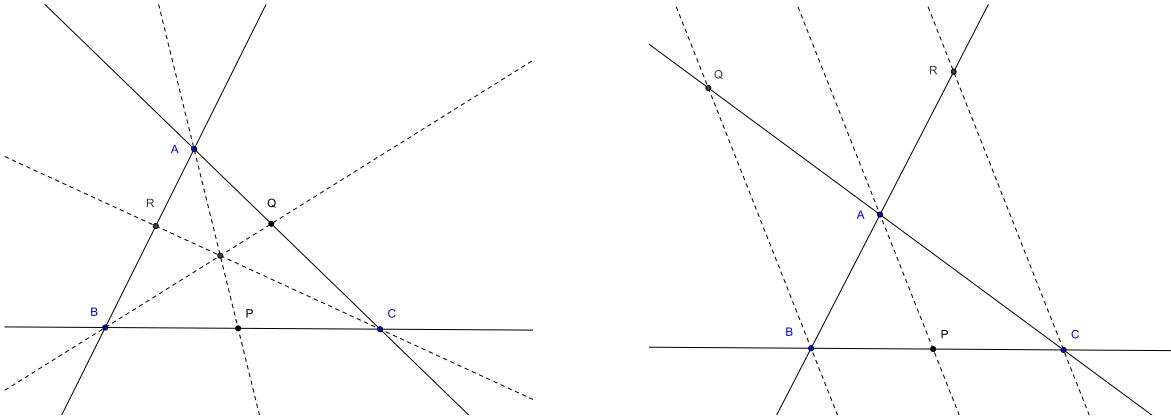
Indication : pour la partie directe, on pourra projeter sur une droite (par exemple BC) dans la direction de la droite PQR .


Exercice 42. *Le théorème de Ménélaüs en dimension quelconque*

Soit (A_0, A_1, \dots, A_n) un repère affine d'un espace affine E de dimension n . On pose $A_{n+1} = A_0$. Soit, pour $i = 0, \dots, n$, M_i un point de la droite $(A_i A_{i+1})$ distinct de A_i et A_{i+1} . Montrer que les points M_i ($i = 0, \dots, n$) appartiennent à un même hyperplan si et seulement si :

$$\prod_{i=0}^n \frac{\overline{M_i A_i}}{\overline{M_i A_{i+1}}} = 1$$

(on pourra considérer la composée des homothéties de centre M_i transformant A_i en A_{i+1}).

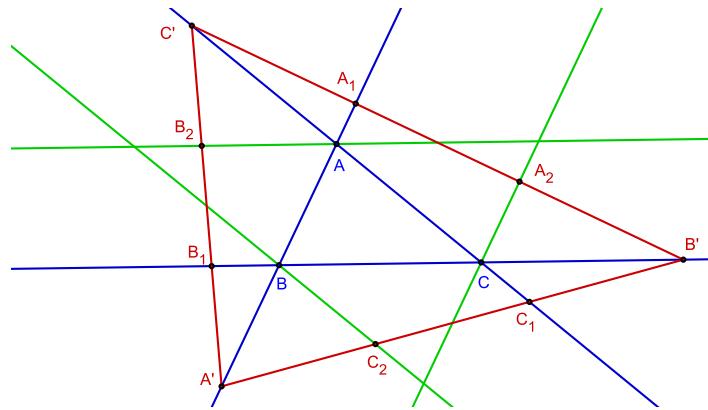
Exercice 43. *Théorème de Ceva*


Soit ABC un triangle non aplati, P, Q, R trois points situés respectivement sur les droites (BC) , (CA) et (AB) et distincts des sommets A, B, C . Alors les droites (AP) , (BQ) et (CR) sont concourantes ou parallèles si et seulement si :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1.$$

Indication : dans le cas des droites concourantes, on pourra par exemple appliquer le théorème de Ménélaüs à des triangles et des sécantes bien choisis.

Exercice 44. Soit ABC un triangle non aplati, A' le symétrique de A par rapport à B , B' le symétrique de B par rapport à C , C' le symétrique de C par rapport à A . Le but de l'exercice est de reconstruire le triangle ABC à partir du seul triangle $A'B'C'$.



1. Soit A_1 l'intersection des droites (AB) et $(B'C')$, B_1 l'intersection des droites (BC) et $(C'A')$, C_1 l'intersection des droites (CA) et $(A'B')$, A_2 l'intersection de la droite $(B'C')$ et de la parallèle à (AB) menée par C , B_2 l'intersection de la droite $(C'A')$ et de la parallèle à (BC) menée par A , C_2 l'intersection de la droite $(A'B')$ et de la parallèle à (CA) menée par B . Montrer en utilisant le théorème de Thalès que A_1 est le milieu de $[C'A_2]$ et que A_2 est le milieu de $[B'A_1]$. Démontrer des relations analogues pour les autres côtés du triangle $A'B'C'$.
 2. En déduire une construction du triangle ABC à partir du triangle $A'B'C'$.

Exercice 45. Soit, dans le plan affine E , ABC un triangle non aplati, $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ les médianes de ce triangle issues de A, B et C . On note

- s_1 la symétrie par rapport à Δ_A dans la direction de (BC)
 - s_2 la symétrie par rapport à Δ_B dans la direction de (CA)
 - s_3 la symétrie par rapport à Δ_C dans la direction de (AB)
 - $f = s_3 \circ s_2 \circ s_1$ la composée de ces trois symétries.

1. Déterminer les images par s_1 , s_2 , s_3 et f des points A , B , C .
 2. En déduire la nature géométrique de f .

Exercice 46. Soit, dans un plan affine E rapporté à un repère cartésien (O, \vec{i}, \vec{j}) , D la droite d'équation $x - y + 2 = 0$ et \vec{v} le vecteur de composantes $(2, 1)$. Exprimer les coordonnées (x', y') du projeté M' d'un point M de E sur la droite D dans la direction du vecteur \vec{v} en fonction des coordonnées (x, y) de M .

Exercice 47. Le plan affine est rapporté à un repère cartésien. Déterminer la nature géométrique des applications affines données en coordonnées par les formules :

1.
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} x' = -x - 2y - 2 \\ y' = x + 2y + 1 \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} x' = 3x - 4 \\ y' = 3y + 3 \end{cases}$$

Exercice 48. Le plan affine est rapporté à un repère cartésien (O, \vec{i}, \vec{j}) . Donner l'expression en coordonnées des applications affines suivantes :

- la symétrie centrale de centre $A(a, b)$;
- la symétrie par rapport à la droite d'équation $x + y = 1$, dans la direction du vecteur \vec{i} ;
- l'affinité de base la droite d'équation $x - y - 1 = 0$, de direction $\vec{v}(2, 1)$ et de rapport 2.

Exercice 49. Soit, dans l'espace affine E de dimension 3 rapporté à un repère cartésien $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, P le plan d'équation $2x - 3y + 8z - 4 = 0$ et \vec{D} la droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$. Donner l'expression en coordonnées de la projection sur P dans la direction \vec{D} , puis, pour tout réel λ , de l'affinité de base P , de direction \vec{D} et de rapport λ .

Exercice 50. Soit s une application affine d'un espace affine E dans lui-même vérifiant $s \circ s = id_E$.

1. Montrer que s est bijective.
2. Montrer que pour tout point M de E , le milieu du segment $[Ms(M)]$ est fixe par s .
3. Montrer que la partie linéaire \vec{s} de s est une symétrie vectorielle de \vec{E} .
4. Conclure que s est une symétrie affine de E .
5. Montrer par un contre-exemple qu'une transformation affine de E dont la partie linéaire est une symétrie vectorielle de \vec{E} n'est pas nécessairement une symétrie affine.

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1. Soit ABC un triangle non aplati, A' , B' , C' les milieux des segments $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

A $\overrightarrow{BC} = 2 \overrightarrow{B'C'}$.

B Les droites (AC) et $(A'C')$ sont parallèles.

C Il existe une homothétie de rapport $1/2$ transformant le triangle ABC en le triangle $A'B'C'$.

D Les segments $[A'B']$ et $[CC']$ ont même milieu.

E Les segments $[AA']$ et $[BB']$ ont même milieu.

Question 2. Soit ABC un triangle non aplati, A' , B' , C' les milieux des segments $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, M un point de coordonnées barycentriques réduites (α, β, γ) dans le repère affine (A, B, C) .

A M appartient à la droite (BC) si et seulement si $\alpha = 1$.

B M appartient à la droite $(B'C')$ si et seulement si $\beta = \gamma$.

C M appartient à la droite (AA') si et seulement si $\beta = \gamma$.

D M appartient à la parallèle à (BC) menée par A si et seulement si $\beta = -\gamma$.

E $ABCM$ est un parallélogramme si et seulement si $\beta = -\gamma$.

Question 3. Soit, dans un espace affine de dimension 3 rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, P_1 , P_2 , P_3 les trois plans d'équations respectives :

$$P_1 : 2x - y - z = 2$$

$$P_2 : y - z = 1$$

$$P_3 : 3x - y - 2z = 0.$$

A Les plans P_1 et P_3 sont parallèles.

B Il existe une droite contenue dans les trois plans P_1 , P_2 , P_3 .

C Le vecteur $(1, 1, 1)$ est un vecteur directeur de l'intersection de P_1 et P_2 .

D L'intersection $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ des trois plans P_1 , P_2 , P_3 est réduite à un point.

E Les intersections deux à deux des trois plans P_1 , P_2 , P_3 sont des droites parallèles.

Question 4. Soient A , B , C , D quatre points non coplanaires de l'espace affine de dimension 3, I , J , K , L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

A Les centres de gravité des quatre triangles ABC , BCD , CDA et DAB sont coplanaires.

B Le plan défini par les centres de gravité des triangles ABC , ACD , ABD est parallèle au plan (BCD) .

C Le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

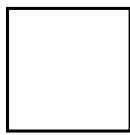
D Le plan défini par les centres de gravité des triangles ABC , ACD , ABD se déduit du plan (BCD) par une homothétie de centre A et de rapport $1/2$.

E La droite (IK) est parallèle à la droite (AD) .

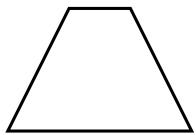
Question 5. Les parties suivantes du plan affine \mathbb{R}^2 sont convexes :

- A $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, y \leq 2\}$;
- B $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$;
- C $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$;
- D $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$;
- E $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 \leq 0\}$.

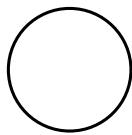
Question 6. On considère, dans le plan affine euclidien, les figures suivantes :



Q



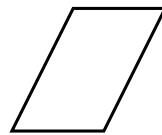
A



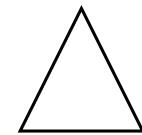
B



C



D



E

Il existe une transformation affine du plan transformant le carré Q en :

- A.
- B.
- C.
- D.
- E.

Question 7. Soient A et B deux points distincts d'un espace affine, s_A et s_B les symétries centrales de centres A et B , et $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

- A $s_A \circ s_B = t_{2\vec{u}}$.
- B $s_A \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_A$.
- C $s_A \circ t_{\vec{u}}$ est une symétrie centrale.
- D $s_A \circ s_B = s_B \circ s_A$.
- E $s_A \circ t_{\vec{u}} \circ s_A = t_{-\vec{u}}$.

Question 8. Soient f , g , h les applications du plan affine P rapporté à un repère cartésien (O, \vec{i}, \vec{j}) dans lui-même définies par les formules :

$$\begin{aligned} f : \quad & x' = y, \quad y' = x; \\ g : \quad & x' = -x - 2y - 2, \quad y' = x + 2y + 1; \\ h : \quad & x' = 3x - 4, \quad y' = 3y + 3. \end{aligned}$$

- A h est une homothétie de rapport 3.
- B f est une symétrie centrale.
- C $g \circ g = id_P$.

- D f est la symétrie par rapport à la droite d'équation $x + y = 0$ dans la direction du vecteur $(1, 1)$.
- E g est une projection affine.

Question 9. Soit, dans le plan affine E , $ABCD$ un parallélogramme et I le milieu de $[AC]$.

- A Il existe une translation t et une seule vérifiant $t(A) = B$ et $t(D) = C$.
- B Il existe une transformation affine f et une seule vérifiant $f(A) = B$ et $f(D) = C$.
- C L'identité est la seule transformation affine de E conservant globalement l'ensemble $\{A, B, C, D\}$.
- D Toute transformation affine de E conservant globalement l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ laisse fixe I .
- E Pour toute permutation σ des quatre points A, B, C, D , il existe une transformation affine f de E et une seule vérifiant $f(A) = \sigma(A)$, $f(B) = \sigma(B)$, $f(C) = \sigma(C)$, $f(D) = \sigma(D)$.

Question 10. Soit, dans l'espace affine E de dimension 3, $ABCD$ un tétraèdre non aplati et G l'isobarycentre de ses sommets.

- A Il n'existe pas de symétrie affine par rapport à un plan conservant globalement le tétraèdre.
- B Pour toute permutation σ des quatre points A, B, C, D , il existe une transformation affine f de E et une seule vérifiant $f(A) = \sigma(A)$, $f(B) = \sigma(B)$, $f(C) = \sigma(C)$, $f(D) = \sigma(D)$.
- C Il existe une symétrie centrale et une seule conservant globalement le tétraèdre.
- D Il y a exactement 6 symétries affines conservant globalement le tétraèdre.
- E Toute transformation affine de E conservant globalement le tétraèdre laisse fixe le point G .

Réponses : 1-BD 2-CD 3-CE 4-BC 5-AC 6-CD 7-CE 8-AE 9-AD 10-BE

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Questions de cours :

1. Soit ABC un triangle non aplati d'un plan affine E et M le point de coordonnées barycentriques $(1, -1, 1)$ dans le repère affine (A, B, C) de E . Montrer que le quadrilatère $ABCM$ est un parallélogramme.

2. Soit E un espace affine de dimension n rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.
Donner l'équation de la direction d'un hyperplan affine d'équation $a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux hyperplans affines d'équations respectives $a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ et $a'_0 + a'_1x_1 + \dots + a'_nx_n = 0$ soient parallèles.
3. Donner deux caractérisations de l'enveloppe convexe d'une partie non vide d'un espace affine.
4. Donner la nature géométrique de la composée de deux homothéties.
5. Montrer qu'une application affine f d'un espace affine E dans lui-même dont la partie linéaire est $-id_{\vec{E}}$ est une symétrie centrale.

Exercice 1 : Dans l'espace affine E de dimension 3 rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit Π le plan d'équation $2x - 3y + z + 1 = 0$ et \vec{v} le vecteur de composantes $(2, 1, -2)$. On note p la projection sur Π dans la direction du vecteur \vec{v} et s la symétrie par rapport au plan Π dans la direction de \vec{v} .

1. Écrire les coordonnées (x', y', z') du point $M' = p(M)$ en fonction des coordonnées (x, y, z) du point M .
2. En déduire la matrice P dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de la partie linéaire \vec{p} de p .
3. Calculer la matrice P^2 . Quel est le rang de P ?
4. Écrire les coordonnées (x'', y'', z'') du point $M'' = s(M)$ en fonction des coordonnées (x, y, z) du point M .
5. En déduire la matrice S dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de la partie linéaire \vec{s} de s . Calculer S^2 .
6. Soit α un réel. On rappelle que l'affinité a de base Π , de direction la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{v}$ engendrée par \vec{v} et de rapport α est l'application de E dans E définie par $\overrightarrow{p(M)a(M)} = \alpha \overrightarrow{p(M)M}$ pour tout point M de E . Écrire, pour tout couple (M, N) de points de E , le vecteur $\overrightarrow{a(M)a(N)}$ en fonction des vecteurs \overrightarrow{MN} et $\overrightarrow{p(M)p(N)}$.
7. En déduire que a est affine et exprimer sa partie linéaire \vec{a} en fonction de \vec{p} et de $id_{\vec{E}}$. Exprimer la matrice A de \vec{a} en fonction de la matrice P et de la matrice identité.
8. Déterminer un polynôme du second degré annulant A .

Exercice 2 :

Le but de l'exercice est d'étudier l'application m qui à un n -uplet (A_1, \dots, A_n) de points d'un espace affine E associe le n -uplet (B_1, \dots, B_n) , où $n \geq 2$ est un entier fixé et, pour $i = 1, \dots, n-1$, B_i est le milieu du segment $[A_i A_{i+1}]$ et B_n est le milieu du segment $[A_n A_1]$. On note, pour tout point A de E , s_A la symétrie centrale de centre A .

1. Montrer que la composée $s_B \circ s_A$ de deux symétries centrales est une translation dont on exprimera le vecteur en fonction de A et B . En déduire que la composée d'un nombre pair de symétries centrales est une translation.
2. Montrer que la composée d'un nombre impair de symétries centrales est une symétrie centrale.
3. Soit (A_1, \dots, A_n) un n -uplet de points de E et (B_1, \dots, B_n) les points définis précédemment. On définit, pour $k = 1, \dots, n$, des applications f_k de E dans E par $f_1 = s_{B_1}$ et $f_k = s_{B_k} \circ f_{k-1}$ pour $k \geq 2$. Déterminer $f_k(A_1)$ pour $1 \leq k \leq n$.
4. On suppose n impair.
 - a) Montrer que f_n est une symétrie centrale dont on précisera le centre. En déduire que l'application m est une bijection de l'ensemble des n -uplets de points de E sur lui-même.
 - b) Donner une construction des points A_i connaissant les points B_i .
5. On suppose n pair.
 - a) Montrer que f_n est une translation dont on écrira le vecteur en fonction des points B_1, \dots, B_n . En déduire une relation vérifiée par ces points.
 - b) Déterminer l'image de l'application m . Cette application est-elle injective ?

2.5 Corrigé du devoir

Questions de cours :

1. Le point M ayant $(1, -1, 1)$ comme coordonnées barycentriques normalisées dans le repère affine (A, B, C) , on a, pour tout point O de E :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}.$$

En particulier, pour $O = A$, on a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$, ce qui montre que $ABCM$ est un parallélogramme.

2. La direction de l'hyperplan affine d'équation $a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ est l'hyperplan vectoriel d'équation $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Deux hyperplans affines d'équations respectives $a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ et $a'_0 + a'_1x_1 + \dots + a'_nx_n = 0$ sont parallèles si et seulement si leurs directions sont confondues, i.e. si et seulement si il existe un réel λ non nul tel que $a'_i = \lambda a_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.
3. L'enveloppe convexe d'une partie A d'un espace affine E est le plus petit convexe de E contenant A . C'est l'intersection de tous les convexes de E contenant A . C'est aussi l'ensemble de tous les barycentres de systèmes de points pondérés de A affectés de coefficients tous positifs.
4. La composée de deux homothéties de rapports respectifs λ et μ est une homothétie de rapport $\lambda\mu$ si $\lambda\mu \neq 1$ et une translation si $\lambda\mu = 1$.

5. Soit A un point quelconque de E et O le milieu du segment $[Af(A)]$. La relation

$$\overrightarrow{f(O)f(A)} = \vec{f}(\overrightarrow{OA}) = -\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{Of(A)}$$

montre que $f(O) = O$. On a alors

$$\overrightarrow{Of(M)} = \overrightarrow{f(O)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{OM}) = -\overrightarrow{OM}$$

pour tout point M de E , ce qui montre que f est la symétrie centrale de centre O .

On pouvait naturellement aussi se contenter d'appliquer la proposition 32 au cas particulier $k = -1$.

Exercice 1 :

1. Le point $p(M)$ est l'intersection de la droite passant par M de vecteur directeur \vec{v} et du plan Π . Il existe donc un réel t tel que $\overrightarrow{Mp(M)} = t\vec{v}$. Les coordonnées de $p(M)$ sont $(x + 2t, y + t, z - 2t)$ et le point $p(M)$ appartient au plan Π , d'où la relation $2(x + 2t) - 3(y + t) + (z - 2t) + 1 = 0$. On en déduit $t = 2x - 3y + z + 1$ et

$$\begin{cases} x' = 5x - 6y + 2z + 2 \\ y' = 2x - 2y + z + 1 \\ z' = -4x + 6y - z - 2 \end{cases}$$

2. La matrice de \vec{p} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donc

$$P = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

3. La relation $p \circ p = p$ implique $\vec{p} \circ \vec{p} = \vec{p}$, d'où $P^2 = P$, ce qui peut naturellement se vérifier par le calcul. L'image de \vec{p} est le plan vectoriel $\overrightarrow{\Pi}$ direction du plan Π . La matrice P est donc de rang 2.
4. Le symétrique $s(M)$ du point M vérifie $\overrightarrow{Ms(M)} = 2\overrightarrow{Mp(M)} = 2t\vec{v}$, où $t = 2x - 3y + z + 1$ est le réel défini à la question 1, d'où

$$\begin{cases} x'' = 9x - 12y + 4z + 4 \\ y'' = 4x - 5y + 2z + 2 \\ z'' = -8x + 12y - 3z - 4 \end{cases}$$

On pouvait aussi remarquer que $s(M)$ est le symétrique de M par rapport à $p(M)$, d'où les relations $x'' = 2x' - x$, $y'' = 2y' - y$, $z'' = 2z' - z$.

5. La matrice de \vec{s} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donc

$$S = 2P - I = \begin{pmatrix} 9 & -12 & 4 \\ 4 & -5 & 2 \\ -8 & 12 & -3 \end{pmatrix}$$

Comme s est une symétrie, $s \circ s = id_E$, d'où $\vec{s} \circ \vec{s} = id_{\vec{E}}$ et $S^2 = I$.

6. Par la relation de Chasles

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a(M)a(N)} &= \overrightarrow{a(M)p(M)} + \overrightarrow{p(M)p(N)} + \overrightarrow{p(N)a(N)} \\ &= \alpha \overrightarrow{Mp(M)} + \overrightarrow{p(M)p(N)} + \alpha \overrightarrow{p(N)N} \\ &= \alpha(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{p(M)p(N)}) + \overrightarrow{p(M)p(N)} \\ &= \alpha \overrightarrow{MN} + (1 - \alpha) \overrightarrow{p(M)p(N)} \\ &= [\alpha id_{\vec{E}} + (1 - \alpha) \vec{p}](\overrightarrow{MN}) . \end{aligned}$$

7. Il en résulte que a est affine de partie linéaire $\vec{a} = \alpha id_{\vec{E}} + (1 - \alpha) \vec{p}$. D'où $A = \alpha I + (1 - \alpha)P$.

8. De la relation $P^2 = P$ découle

$$\begin{aligned} A^2 &= \alpha^2 I + 2\alpha(1 - \alpha)P + (1 - \alpha)^2 P^2 \\ &= \alpha^2 I + (1 - \alpha^2)P \end{aligned}$$

d'où $A^2 - (1 + \alpha)A + \alpha I = 0$. En particulier, pour $\alpha = -1$ on retrouve la relation $S^2 = I$ et pour $\alpha = 0$ la relation $P^2 = P$.

Exercice 2 :

1. La composée $t = s_B \circ s_A$ de deux symétries centrales est une translation, puisque c'est une transformation affine de partie linéaire l'identité. L'image par t de A est $A' = s_B(A)$. Il en résulte que t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AB}$.

Il en résulte immédiatement par récurrence que la composée d'un nombre pair de symétries centrales est une translation.

2. La composée d'un nombre impair k de symétries centrales est une symétrie centrale puisque sa partie linéaire est l'homothétie vectorielle de rapport $(-1)^k = -1$.

3. Les points A_1 et A_2 sont symétriques par rapport à B_1 , puisque B_1 est le milieu de $[A_1A_2]$. On a donc $f_1(A_1) = s_{B_1}(A_1) = A_2$.

Montrons par récurrence sur k que $f_k(A_1) = A_{k+1}$ pour $k = 1, \dots, n-1$. On vient de voir que la propriété est vraie pour $k = 1$. Si elle est vraie pour $k \leq n-2$, comme B_{k+1} est le milieu de $[A_{k+1}A_{k+2}]$, on a $s_{B_{k+1}}(A_{k+1}) = A_{k+2}$, d'où $f_{k+1}(A_1) = s_{B_{k+1}}(A_{k+1}) = A_{k+2}$. De même $f_n(A_1) = s_{B_n}(A_n) = A_1$.

4. a) Comme n est impair, f_n est une symétrie centrale. On vient de voir que $f_n(A_1) = A_1$. Il en résulte que A_1 est le centre de f_n , puisque le centre d'une symétrie centrale est son seul point fixe.

L'application f_n étant entièrement déterminée par les points B_1, \dots, B_n , il en résulte que la donnée de ces points détermine A_1 et, par récurrence, tous les points A_k , puisque $A_{k+1} = f_k(A_1)$. L'application m est donc injective.

Elle est également surjective, puisque, si A_k sont les points précédemment définis, B_k est le milieu de $[A_k A_{k+1}]$ pour tout $k = 1, \dots, n-1$, et B_n le milieu de $[A_n A_1]$. L'application m est donc bijective.

- b) Pour construire les points A_i connaissant les points B_i , il suffit de construire A_1 , les autres points A_i s'en déduisant par les symétries successives de centres B_1, B_2, \dots, B_{n-1} . Mais A_1 est le centre de la symétrie centrale f_n , donc le milieu du segment $[Mf_n(M)]$ pour tout point M de E . On l'obtient donc en choisissant n'importe quel point M de E (par exemple B_1), en construisant son image $f_n(M)$ et en prenant le milieu du segment $[Mf_n(M)]$.

5. a) Comme n est pair, f_n est une translation de vecteur la somme des vecteurs des translations $s_{B_{2k}} \circ s_{B_{2k-1}}$ pour $k = 1, \dots, n/2$, i.e. $2 \sum_{k=1}^{n/2} \overrightarrow{B_{2k-1}B_{2k}}$. Par ailleurs, la relation $f_n(A_1) = A_1$ montre que f_n a un point fixe, c'est donc l'identité. Le vecteur de la translation f_n est donc nul :

$$2 \sum_{k=1}^{n/2} \overrightarrow{B_{2k-1}B_{2k}} = \vec{0} \quad (*) .$$

- b) Il en résulte que l'application m n'est pas surjective, puisque son image est contenue dans l'ensemble des n -uplets de points (B_1, \dots, B_n) vérifiant la relation $(*)$.

Soit (B_1, \dots, B_n) un n -uplet de points vérifiant la relation $(*)$ et A_1 un point quelconque de E . Définissons par récurrence des points A_2, \dots, A_n par $A_{k+1} = s_{B_k}(A_k)$ pour $k = 1, \dots, n-1$. Pour tout $k = 1, \dots, n-1$, B_k est donc le milieu de $[A_k A_{k+1}]$ et il résulte de la relation $(*)$ que f_n est l'identité, d'où $f_n(A_1) = s_{B_n}(A_n) = A_1$. B_n est donc le milieu de $[A_n A_1]$ et le n -uplet (B_1, \dots, B_n) est l'image par m du n -uplet (A_1, \dots, A_n) .

Il en résulte que l'image de m est exactement l'ensemble des n -uplets de points (B_1, \dots, B_n) vérifiant la relation $(*)$.

L'application m n'est pas injective puisque le choix de A_1 dans la construction précédente est arbitraire.

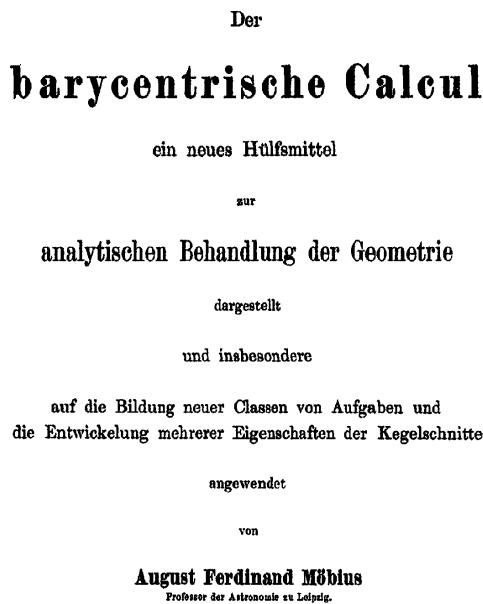
3 Compléments

3.1 Notations de Grassmann

Les notations $M + \vec{u}$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i M_i$ (pour $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$) sont parfois appelées *notations de Grassmann*.

Hermann Günther Grassmann (1809-1877) était un mathématicien et linguiste allemand. Enseignant de lycée pendant la majeure partie de sa vie professionnelle, l'importance de ses travaux mathématiques n'a été reconnue que tardivement et c'est pour ses études de sanskrit et notamment sa traduction en allemand du Rig-Véda qu'il devint célèbre à la fin de sa vie.

On le considère aujourd'hui comme un des inventeurs du calcul vectoriel et de l'algèbre linéaire (bien que des notions analogues à celle de vecteur soient apparues de manière récurrente, à l'état d'ébauche dès le XVI^{ème} siècle, puis de manière plus formelle au début du XIX^{ème} siècle, chez d'autres auteurs, l'idée étant à chaque fois de définir des grandeurs qui aient, outre une mesure, une direction et un sens).



Le calcul barycentrique lui-même avait en fait été introduit, à peu près à la même époque, par August Ferdinand Möbius (1790-1868) dans son livre *Der barycentrische Calcül* (1827). Dans cet ouvrage, Möbius (sans doute plus connu aujourd'hui pour sa

découverte de la bande qui porte son nom, un exemple de surface non orientable plongée dans l'espace euclidien de dimension 3), introduisait non seulement les coordonnées barycentriques, mais aussi, en considérant le cas d'un système pondéré où la somme des poids est nulle, la notion de point à l'infini et les coordonnées projectives, ouvrant ainsi la voie à l'étude des relations entre espace affine et espace projectif.

3.2 Courbes de Bézier

Une application très concrète, en dehors de la mécanique d'où elle est issue, de la notion de barycentre est fournie par l'étude des courbes de Bézier.

Pierre Bézier (1910-1999) était ingénieur chez Renault quand il introduisit en 1962 ces courbes et les surfaces qui portent également son nom pour modéliser des pièces d'automobile. À peu près à la même époque, Paul de Casteljau menait des études analogues chez Citroën, principal concurrent en France de Renault, et découvrait un algorithme récursif pour construire ces courbes, algorithme qui porte aujourd'hui son nom. Ces travaux, couverts par le secret industriel, ne furent publiés qu'une dizaine d'années plus tard.

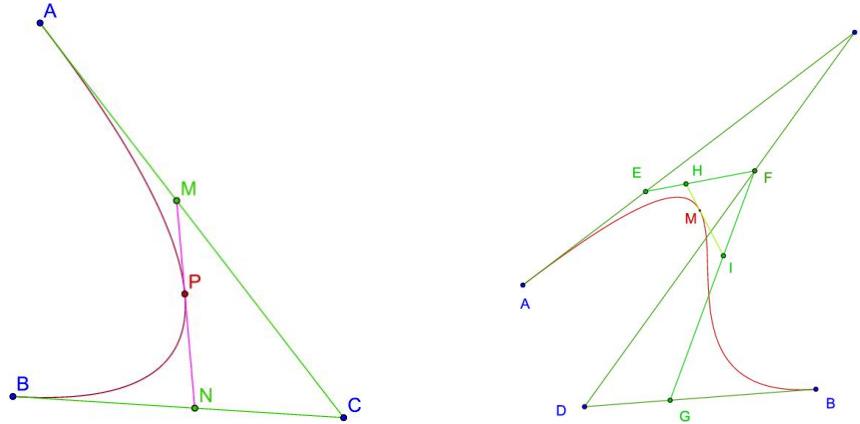


FIGURE 6 – Courbes de Bézier avec 3 et 4 points de contrôle

Pour simplifier, nous ne considérerons ici que le cas des courbes. Le problème d'interpolation le plus simple consiste à déterminer une courbe lisse passant par des points donnés et ayant une équation la plus simple possible. Bien sûr, s'il ne s'agit que de relier deux points donnés, la courbe la plus simple est le segment $[AB]$. Ce segment est l'ensemble des barycentres $(1-t)A + tB$ quand t parcourt l'intervalle $[0, 1]$. Quand on veut raccorder une suite de points, il faut pouvoir contrôler les tangentes aux points de raccordement. On ajoute pour cela un point de contrôle supplémentaire C , on note pour tout $t \in [0, 1]$, $M = (1-t)A + tC$, $N = (1-t)C + tB$, $P = (1-t)M + tN$, de sorte que $P = (1-t)^2A + 2t(1-t)C + t^2B$. On vérifie alors facilement que la courbe décrite par le point P quand t parcourt $[0, 1]$ est un arc de parabole joignant A à B , admettant comme tangente en A la droite (AC) et comme tangente en B la droite (BC) . Le

point de contrôle supplémentaire C permet donc de contrôler les tangentes aux deux extrémités de l'arc AB . Si on veut davantage de contrôle sur la forme de la courbe, on peut rajouter d'autres points de contrôle et itérer la construction précédente. La représentation paramétrique de la courbe obtenue fait alors intervenir les polynômes de Bernstein $B_{n,k}(t) = \binom{n}{k} (1-t)^k t^{n-k}$, qui apparaissent dans le développement de $[(1-t) + t]^n$ par la formule du binôme.

Comme toute application affine conserve les barycentres, pour construire l'image d'une courbe de Bézier par une application affine il suffit de prendre l'image des points de contrôle de la courbe initiale par l'application affine, l'image de la courbe de Bézier est alors la courbe de Bézier correspondant à ces points de contrôle, ce qui simplifie beaucoup la construction de cette image.

Les courbes de Bézier sont beaucoup utilisées dans les logiciels de dessin vectoriel et de création de polices de caractères. En particulier, le langage PostScript, dont le format pdf est largement issu, leur a accordé une grande place.

3.3 Perspective centrale et géométrie projective

Que ce soit sur le papier ou sur un écran d'ordinateur, une figure de l'espace est toujours représentée par une figure plane, c'est-à-dire par une projection de cette figure sur un plan.

Si on considère que l'œil de l'observateur est situé infiniment loin, les rayons projetant les différents points sont tous parallèles. La projection ainsi obtenue est donc une projection affine sur un plan, qu'on appelle aussi *projection parallèle*, en raison du parallélisme des projetantes, ou *projection cylindrique*, car les droites projetant le contour apparent d'un solide constituent un cylindre.

Cette projection affine apparaît aussi naturellement quand on étudie les ombres projetées par les rayons du soleil, car on peut considérer les rayons lumineux comme tous parallèles.

Par contre, si l'œil de l'observateur est situé à distance finie, les rayons projetants ne sont plus parallèles, mais convergent tous en un même point (l'œil de l'observateur). Il faut alors considérer un nouveau type de projection, appelé *perspective*, ou *projection centrale*, ou encore *projection conique*, car les rayons projetants constituent cette fois un cône de sommet l'œil de l'observateur. C'est aussi ce type de projection que l'on est amené à considérer si on étudie les ombres projetées par une source lumineuse située à distance finie.

L'étude systématique de la perspective a été entreprise à la Renaissance par les peintres et architectes italiens, en particulier Alberti (1404-1472), Masaccio (1401-1428), Piero della Francesca (vers 1415-1492). Elle s'est alors répandue à toute l'Europe, comme en témoigne la gravure de Dürer (1525) ci-dessous, où le peintre utilise un perspectographe, instrument lui permettant de réaliser une perspective de manière purement mécanique.



L'étude mathématique en a été systématisée au XVII^{ème} siècle par Desargues (voir section 3.4) et a fini par donner naissance à une nouvelle forme de géométrie : la géométrie projective.

Ses idées sont tombées dans un relatif sommeil durant tout le XVIII^{ème} siècle, les mathématiciens de cette époque étant surtout occupés à développer les perspectives ouvertes par l'introduction du calcul différentiel et intégral, et ce n'est qu'au début du XIX^{ème} siècle que l'étude de la géométrie projective reprendra vraiment, sous l'impulsion de mathématiciens français (Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, 1822) et allemands (Steiner¹, Möbius, Plücker), avant de s'établir définitivement sur des bases solides à la fin de ce siècle.

Les projections centrales ne sont pas des applications affines : si elles conservent l'alignement, elles ne conservent ni le parallélisme (des droites parallèles dans l'espace se rejoignent sur le tableau au point de fuite, commun à toutes les droites ayant même direction), ni les barycentres (le milieu d'un segment non parallèle au plan du tableau n'est pas projeté en le milieu de son image). En conséquence, dans un plan projectif, il n'y a pas de droites parallèles : deux droites distinctes se coupent toujours en un point et un seul.

3.4 Desargues dans le plan et dans l'espace

Le théorème de Desargues peut s'énoncer dans le plan affine sous la forme suivante :

Théorème 5. *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles non aplatis d'un même plan affine. On suppose A et A' (resp. B et B' , resp. C et C') distincts. Alors les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

- les trois couples de droites $((BC), (B'C'))$, $((CA), (C'A'))$ et $((AB), (A'B'))$ sont constitués de droites sécantes en des points α , β , γ et les trois points α , β , γ sont alignés (figure 7) ;

1. Jacob Steiner (1796-1863) était suisse, mais a essentiellement travaillé en Allemagne.

- les trois couples de droites $((BC), (B'C'))$, $((CA), (C'A'))$ et $((AB), (A'B'))$ sont constitués de droites parallèles ;
- l'un des trois couples de droites $((BC), (B'C'))$, $((CA), (C'A'))$ et $((AB), (A'B'))$ est constitué de droites parallèles, les deux autres de droites sécantes et la droite joignant les deux points d'intersection définis par ces couples est parallèle à la direction commune des droites du premier couple.

Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont alors dits *homologiques*.

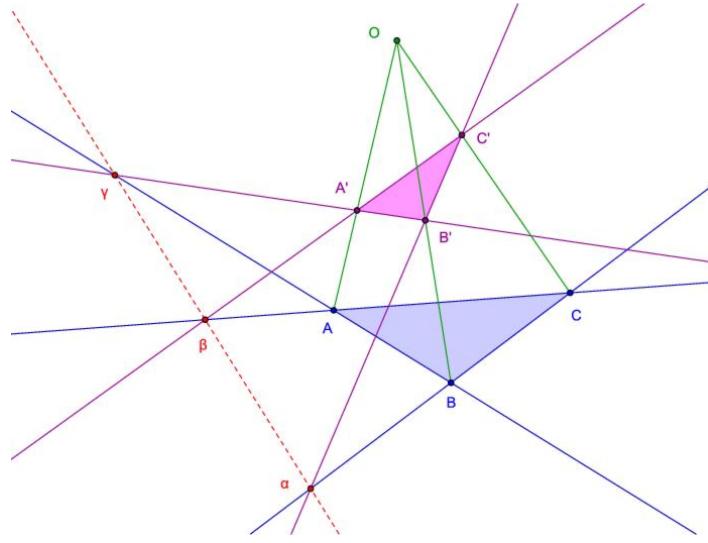


FIGURE 7 – Le théorème de Desargues

On a étudié le cas particulier où les trois couples considérés sont constitués de droites parallèles à l'exercice 37 .

Le cas général peut également s'étudier avec les théorèmes classiques de la géométrie plane, mais une façon plus agréable de procéder est de considérer la figure 7 comme une projection plane d'une figure de l'espace.

Considérons pour cela, dans l'espace affine de dimension 3, un tétraèdre $OABC$, et un plan Π ne passant pas par O coupant les trois droites (OA) , (OB) et (OC) en A' , B' et C' distincts de A , B , C . Les droites (BC) et $(B'C')$ (resp. (CA) et $(C'A')$, (AB) et $(A'B')$) sont coplanaires. Supposons-les sécantes en des points α , β et γ (le cas de droites parallèles se traiterait de manière analogue). Les trois points α , β et γ sont alors alignés. En effet, les plans (ABC) et Π se coupent suivant une droite Δ et les points α , β et γ appartiennent tous trois à Δ .

Pour obtenir la partie directe du théorème de Desargues dans le plan, il suffit alors de considérer la figure plane 7 comme la projection sur le plan d'une figure de l'espace.

En fait, cette démonstration traduit le fait que le théorème de Desargues est fondamentalement un théorème de géométrie projective. Dans un plan projectif, deux droites

distinctes se coupent toujours en un point et un seul (des droites parallèles dans le plan affine se coupent en un point à l'infini) et l'énoncé du théorème prend alors la forme beaucoup plus simple suivante :

Théorème 6. *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles non aplatis d'un même plan projectif. On suppose A et A' (resp. B et B' , resp. C et C') distincts et les droites (AA') , (BB') et (CC') distinctes. Alors les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si les points d'intersection des trois couples de droites $((BC), (B'C'))$, $((CA), (C'A'))$ et $((AB), (A'B'))$ sont alignés.*

Girard Desargues (1591-1661) était un mathématicien et architecte lyonnais. C'est à lui que revient le mérite d'avoir développé pour la première fois d'une manière cohérente la géométrie projective en étudiant la perspective centrale (*Exemple de l'une des manières universelles du S.G.D.L. touchant la pratique de la perspective sans employer aucun tiers point, de distance ny d'autre nature, qui soit hors du champ de l'ouvrage*, 1636) et les sections planes des cônes de révolution (*Brouillon Project d'une Atteinte aux Evènemens des Rencontres du Cone avec un Plan, par L.S.G.D.L.*, paru à Paris en 1639, avec Privilège).

Si la définition des coniques comme sections planes d'un cône ou d'un cylindre de révolution était en effet connue depuis l'antiquité (les *Coniques*, d'Apollonius de Perge (v.262-v.190 av. J.-C.), qui leur a donné leurs noms), il lui revient l'idée que cette définition permet de mettre en correspondance point par point une ellipse et une hyperbole : si on considère les sections d'un même cône par deux plans (figure 8), toute génératrice de ce cône coupe chacune de ces sections en un point et un seul (à l'exception peut-être d'une ou deux d'entre elles) et il suffit d'associer à tout point de la première section le point correspondant de la seconde.

Ainsi, d'un point de vue projectif, toutes les coniques sont les mêmes.

Les conséquences en sont importantes, puisque certains théorèmes démontrés par exemple pour le cercle (ceux qui ne font intervenir que des propriétés de concours ou d'incidence) restent vrais pour toutes les coniques. C'est ainsi qu'il suffit de démontrer le théorème de Pascal (voir l'*hexagramme mystique*, dans le chapitre sur les coniques) pour un cercle, le résultat s'en déduisant pour toutes les autres coniques.

Pour définir le plan projectif, il ajoutait au plan ordinaire des points à l'infini, si bien que deux droites distinctes se coupent toujours en un point et un seul (deux droites parallèles se coupant en un point à l'infini, comme leurs images dans une perspective centrale se coupent en le point de fuite de leur direction).

Il était connu et apprécié des plus grands mathématiciens de son époque (Descartes, Pascal, Fermat), mais son œuvre, rédigée le plus souvent sous forme de brouillons, qu'il signait S.G.D.L. (le Sieur Girard Desargues, Lyonnais), dans un style jugé parfois obscur par ses contemporains, n'a pas connu la postérité qu'elle méritait.

Il est l'auteur de deux autres « Brouillons Projects » : l'un concernant la coupe des pierres, l'autre la gnomonique (l'art de construire les cadans solaires). Il faut remarquer que, d'un point de vue mathématique, un cadran solaire fournit un autre exemple de

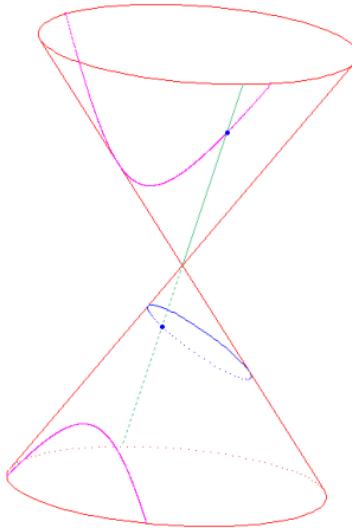


FIGURE 8 – Sections planes d'un cône de révolution.

projection centrale : c'est dans ce cas la pointe du style (la tige dont l'ombre indique l'heure en se déplaçant) qui joue le rôle de l'œil de l'observateur, le plan de projection étant celui du cadran et l'objet le soleil.

3.5 Birapport

On a vu à l'exercice 32 qu'étant donné deux triplets (D_1, D_2, D_3) et (D'_1, D'_2, D'_3) de droites distinctes et concourantes d'un même plan affine, il existait toujours une transformation affine de ce plan transformant D_1 en D'_1 , D_2 en D'_2 et D_3 en D'_3 . Du point de vue de la géométrie affine, tous les triplets de droites distinctes et concourantes sont donc équivalents (de même que tous les triangles non aplatis le sont, puisque, étant donné deux triangles non aplatis ABC et $A'B'C'$, il existe toujours une transformation affine du plan et une seule transformant A en A' , B en B' et C en C').

Il n'en va plus de même si on considère des quadruplets de droites concourantes. On peut en effet associer à tout tel quadruplet un nombre, appelé *birapport* ou *rapport anharmonique* des quatre droites, qui est invariant par toute transformation affine.

On commence par définir le *birapport* $[A, B, C, D]$ de quatre points distincts alignés A, B, C, D comme le réel

$$[A, B, C, D] = \frac{\overline{AC} \overline{BD}}{\overline{AD} \overline{BC}}.$$

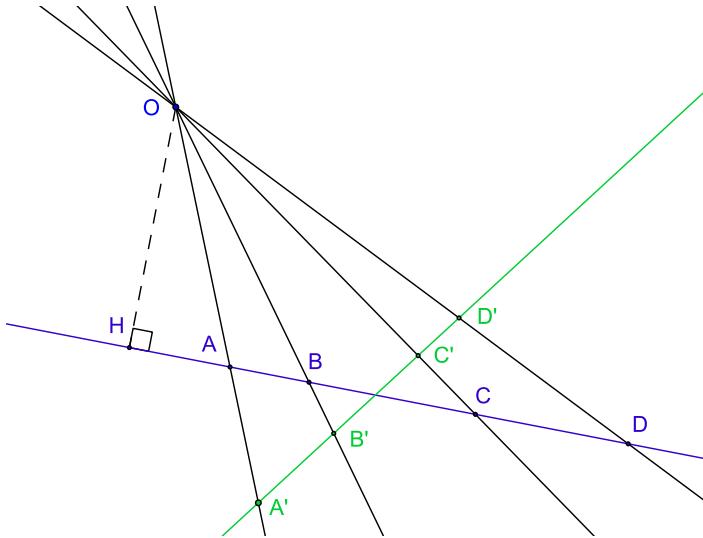
Ce réel ne dépend pas du choix du vecteur directeur de la droite portant ces points, mais il dépend de l'ordre des points.

Soit maintenant, dans un plan affine E , quatre droites distinctes concourantes en un même point O et coupant deux droites Δ et Δ' en des points A, B, C, D et A', B', C', D' .

B', C', D' . Orientons E et munissons-le d'un produit scalaire. Soit alors H le projeté orthogonal de O sur Δ et \vec{v} un vecteur directeur unitaire de Δ tel que le système $(\overrightarrow{OH}, \vec{v})$ soit direct. On a alors, en prenant les déterminants dans une base orthonormée directe :

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) &= OA \times OC \times \sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \\ &= \det(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA}, \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC}) \\ &= \det(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{HC}) + \det(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{OH}) \\ &= \det(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) \\ &= \det(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{AC}) \\ &= OH \times \overline{AC},\end{aligned}$$

ce nombre étant le double de l'aire algébrique du triangle OAC .



Il en résulte que

$$[A, B, C, D] = \frac{\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \sin(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})}{\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) \sin(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})}.$$

Mais $\sin(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OC'}) = \varepsilon_A \varepsilon_C \sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$, où ε_A (resp. ε_C) vaut 1 si les points A et A' (resp. C et C') sont du même côté de O , -1 sinon. En écrivant des formules analogues pour les autres termes, on en déduit que $[A, B, C, D] = [A', B', C', D']$. Ce nombre ne dépend donc pas de la sécante Δ . On l'appelle *birapport des quatre droites* $(OA), (OB), (OC), (OD)$. Comme toute transformation affine conserve les rapports de mesures algébriques pour des points alignés, elle conserve a fortiori le birapport.

3.6 La formule d'Euler pour les polyèdres

On doit à Leonhard Euler (1707-1783) la formule suivante : si un polyèdre convexe de l'espace a s sommets, a arêtes et f faces, alors $s - a + f = 2$.

Il existe de nombreuses démonstrations de cette formule, issues de domaines très divers des mathématiques, plus ou moins complètes et plus ou moins rigoureuses. Une des plus simples consiste à choisir un point O à l'intérieur du polyèdre, et à projeter le polyèdre sur une sphère de centre O par une projection centrale de centre O . Les faces du polyèdre se projettent selon des polygones sphériques convexes et on utilise alors la formule de Girard donnant l'aire d'un tel polygone en fonction de ses angles (voir la partie *Géométrie sphérique* dans le chapitre *Géométrie euclidienne*).

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle fait appel à des notions euclidiennes (la sphère, les aires) alors que le problème de départ est purement affine.

Mais les démonstrations purement affines qu'ont données de cette formule beaucoup d'auteurs, en prétendant parfois l'étendre à des polyèdres non convexes, se sont souvent révélées sinon fausses, du moins incomplètes, en considérant comme « évidentes » des propriétés intuitives sans en donner réellement de justification.

C'est justement en tentant d'étendre cette formule à des polyèdres plus généraux (non convexes) que l'on s'est progressivement aperçu des failles de certains raisonnements admis jusque-là par la communauté mathématique. Un point fondamental est qu'il n'est pas si facile de définir avec précision ce qu'on entend par *Polyèdre* (non nécessairement convexe) dans l'espace.

De fait, la formule d'Euler est aussi une formule sur les graphes planaires, i.e. les graphes dessinés dans le plan. À un tel graphe, on peut aussi associer le nombre s de ses sommets, le nombre a de ses arêtes et le nombre f de ses faces (i.e. de domaines connexes du plan délimités par ses arêtes, y compris la face extérieure non bornée). Ces nombres vérifient la relation d'Euler.

D'une manière intuitive, on peut facilement passer d'un polyèdre convexe de l'espace à un graphe planaire, par exemple en le projetant sur un plan par une projection centrale bien choisie, ou en considérant ses arêtes comme élastiques et en l'étirant sur un plan, et se ramener à établir la formule pour les graphes planaires (par exemple par récurrence sur le nombre d'arêtes ou de sommets), mais il n'est pas facile de justifier complètement toutes les étapes de cette démarche.

Toutes ces considérations ont conduit à généraliser la caractéristique d'Euler (le nombre $s - a + f$) à des objets géométriques plus généraux. C'est ainsi que H. Poincaré (1854-1912) a introduit en 1893 ce qui s'appelle aujourd'hui la *caractéristique d'Euler-Poincaré* qui étend la caractéristique d'Euler à des polyèdres tracés sur des surfaces.

En fait, R. Descartes (1596-1650), dans un manuscrit non publié, *De Solidorum Elementis*, dont l'original a disparu, mais dont on a retrouvé une copie en 1860 dans les papiers laissés à sa mort par Leibniz (1646-1716), avait énoncé une formule très proche, mais il n'est pas clair qu'il ait eu connaissance de la formule d'Euler telle qu'elle est formulée aujourd'hui.

La version de Descartes est la suivante :

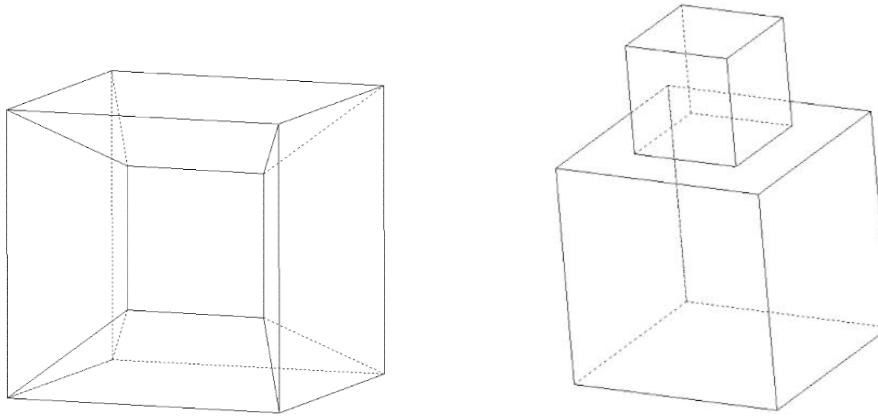


FIGURE 9 – Deux exemples de polyèdres pour lesquels la formule d’Euler est fausse.

« L’angle droit étant pris pour unité, la somme des angles de toutes les faces d’un polyèdre convexe est égale à quatre fois le nombre de sommets diminué de 2. »

Cette relation équivaut à la formule d’Euler si on se souvient que la somme des angles d’un polygone convexe à n sommets est $(n-2)\pi$. En effet la formule de Descartes dit que la somme des angles de toutes les faces du polyèdre est $2\pi(s-2)$; mais si on numérote les faces de 1 à f et si on note n_i le nombre de sommets (ou de côtés) de la face i , cette somme vaut $\sum_{i=1}^f (n_i-2)\pi$ ou encore $(2a-2f)\pi$ en remarquant que $\sum_{i=1}^f n_i = 2a$ (chaque arête du polyèdre est comptée deux fois dans la somme, puisqu’elle apparaît dans deux faces), d’où $2\pi(s-2) = 2\pi(a-f)$, qui est exactement la formule d’Euler.

3.7 Le théorème fondamental de la géométrie affine

Toute transformation affine conserve l’alignement et transforme une droite en une droite. On peut se demander si cette propriété caractérise les transformations affines. C’est le cas dans le plan affine réel :

Théorème 7. *Toute bijection du plan affine réel sur lui-même qui transforme toute droite en une droite est une transformation affine .*

Ce théorème reste vrai dans un espace affine E quelconque, à condition de prendre quelques précautions :

1. il faut avoir $\dim E \geq 2$ (si $\dim E = 1$, toute bijection de E sur E vérifie trivialement la condition et il est facile de construire des bijections de E sur E qui ne sont pas affines) ;
2. il faut que le corps de base n’admette pas d’autre automorphisme de corps que l’identité (si $E = \mathbb{C}^n$, l’application qui à (z_1, \dots, z_n) associe $(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$ transforme toute droite en une droite, mais n’est pas affine).