Fonctions usuelles

Bernard Ycart

Vous connaissez depuis longtemps les fonctions trigonométriques, l'exponentielle et le logarithme. Notre premier objectif sera de démontrer rigoureusement leurs propriétés. Nous introduirons aussi les fonctions hyperboliques ainsi que les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques et hyperboliques. Pour comprendre les démonstrations, vous aurez besoin des notions de base de l'analyse : limites, continuité, dérivabilité et convexité.

Table des matières

19 novembre 2014

1 Cours

1.1 Fonctions puissance

Si n est un entier naturel, vous savez ce qu'est la puissance n-ième d'un nombre : le produit de ce nombre par lui-même n fois.

$$a^n = \underbrace{a\,a\,\ldots\,a}_{n \text{ facteurs}} \;.$$

Rappelons que pour tout a, $a^0 = 1$. Vous connaissez aussi la notation a^{-1} pour l'inverse de a, et vous savez donc calculer des puissances entières négatives.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \;.$$

À cause de la règle des signes, une puissance paire est toujours positive ou nulle. C'est la raison pour laquelle on ne définit de puissances fractionnaires que pour des réels positifs ou nuls. Le cas $a = 0$ n'est pas passionnant : pour tout x, $0^x = 0$. Dans ce qui suit, a désigne un réel *strictement positif*.

Proposition 1. *Etant donné un réel strictement positif a, et deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel strictement positif y tel que $y^q = a^p$. Ce réel est noté $a^{p/q}$.*

Ainsi :

$$a^{1/2} = \sqrt{a} \;, \quad a^{3/2} = (\sqrt{a})^3 = \sqrt{a^3} \;, \quad a^{2/3} = (\sqrt[3]{a})^2 = \sqrt[3]{a^2} \;.$$

Démonstration : c'est une application du théorème de la bijection. L'application qui à y associe y^q est continue et strictement croissante de $[0, +\infty[$ dans lui-même. C'est donc une bijection. $\square$

Nous rassemblons dans la proposition suivante les propriétés des puissances fractionnaires.

Proposition 2. *Soit a un réel strictement positif.*

1. *Soient $(p, q), (p', q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, deux couples d'entiers tels que $p/q = p'/q'$. Alors :*

$$a^{p/q} = a^{p'/q'} \;.$$

2. *Soient $(p, q), (p', q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, deux couples d'entiers. Alors :*

$$a^{p/q+p'/q'} = a^{p/q} a^{p'/q'} \;.$$

3. *Soit* $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ *un couple d'entiers. Alors :*
$$a^{-p/q} = \frac{1}{a^{p/q}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{p/q} .$$
4. *Soient* $(p,q),(p',q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$*, deux couples d'entiers tels que* $p/q < p'/q'$*. Alors :*
si $a > 1$*, alors* $a^{p/q} < a^{p'/q'}$*,*
si $a < 1$*, alors* $a^{p/q} > a^{p'/q'}$*.*

Démonstration : elle consiste à se ramener aux propriétés connues des puissances entières.

1.
$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \iff pq' = p'q .$$
Donc :
$$a^{pq'} = a^{p'q} \implies a^{pq'/qq'} = a^{p'q/qq'} \implies a^{p/q} = a^{p'/q'} .$$
2.
$$a^{p/q+p'/q'} = a^{(pq'+p'q)/qq'} = \left(a^{pq'+qp'}\right)^{1/qq'}$$
Or pq' et $p'q$ sont deux entiers. Donc :
$$(a^{pq'+qp'})^{1/qq'} = (a^{pq'}a^{p'q})^{1/qq'} = a^{pq'/qq'}a^{p'q/qq'} = a^{p/q}a^{p'/q'} .$$
3. En utilisant la relation précédente :
$$a^{p/q-p/q} = a^0 = 1 \implies a^{-p/q} = \frac{1}{a^{p/q}} = \left(\frac{1}{a^p}\right)^{1/q} = \left(\frac{1}{a}\right)^{p/q} .$$
4. Pour $a > 1$:
$$\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'} \implies pq' < qp' \implies a^{pq'} < a^{p'q} \implies a^{p/q} < a^{p'/q'} .$$
On passe de $a > 1$ à $a < 1$ par la propriété *3*.

□

Étant donné un rationnel r, il existe une infinité de manières de l'écrire comme rapport de deux entiers. Le point *1* de la proposition 2 montre que la puissance fractionnaire ne dépend que du rapport p/q. Nous avons donc défini a^r pour tout r *rationnel.* Nous allons étendre la définition à tous les x *réels.*

Définition 1. *Soit a un réel strictement positif. On appelle* fonction puissance *de base a la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :*
- *pour* $a \geqslant 1$ *:*
$$\forall x \in \mathbb{R} , \quad a^x = \sup\{\, a^r \,,\ r \in \mathbb{Q} \cap]-\infty, x[\,\} .$$

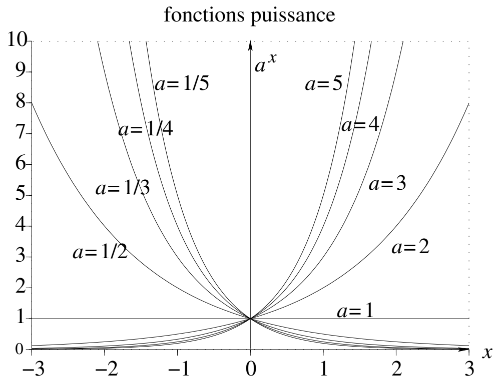

FIGURE 1 – Fonctions puissance $x \mapsto a^x$ pour plusieurs valeurs de a.

- *pour* $a \leqslant 1$ *:*
$$\forall x \in \mathbb{R}\ , \quad a^x = \inf\{\, a^r\ ,\ r \in \mathbb{Q} \cap]-\infty, x[\,\}\ .$$

La figure 1 montre le graphe des fonctions puissance pour plusieurs valeurs de a. Voici la liste des propriétés des fonctions puissances.

Théorème 1. *Soit a un réel strictement positif.*

1. *La fonction puissance de base a est un morphisme du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ vers le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, \times)$.*
$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ , \quad a^{x+y} = a^x a^y\ . \tag{1}$$
2. (a) *Si $a = 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ $a^x = 1$,*
   (b) *si $a > 1$, alors $x \mapsto a^x$ est strictement croissante, et :*
   $$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty\ ,$$
   (c) *si $a < 1$, alors $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante, et :*
   $$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0\ .$$
3. *La fonction $x \mapsto a^x$ est convexe.*
4. *La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable et sa dérivée est $x \mapsto L_a a^x$, où L_a est une constante.*
5. *La fonction $x \mapsto a^x$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration : elle consiste essentiellement à vérifier les propriétés souhaitées sur les rationnels, puis à les étendre aux réels par passage à la limite. Pour simplifier, nous supposons $a \geqslant 1$. Les démonstrations pour $a \leqslant 1$ s'en déduisent facilement.

1. Soient x et y deux réels. Soient (u_n) et (v_n) les suites des approximations décimales par défaut de x et y. Ce sont deux suites croissantes de rationnels, qui convergent respectivement vers x et y. La suite $(u_n + v_n)$ est elle-aussi une suite croissante de rationnels, et elle converge vers $x + y$. Or nous connaissons déjà la propriété pour les rationnels :
$$\forall n \in \mathbb{N}\ , \quad a^{u_n+v_n} = a^{u_n}\, a^{v_n}\ .$$
Par définition de la borne supérieure, et comme la fonction puissance est croissante pour les rationnels, les suites (a^{u_n}), (a^{v_n}) et $(a^{u_n+v_n})$ convergent respectivement vers a^x, a^y et a^{x+y}. D'où le résultat.
2. Soit x un réel, et (u_n) la suite de ses approximations décimales : 1^x est la limite de la suite (1^{u_n}). Or pour tout n, $1^{u_n} = 1$. D'où le résultat.
Passons au cas $a > 1$. Soient x et y deux réels tels que $x < y$. Il existe un rationnel r tel que $x < r < y$. Soient (u_n) et (v_n) les suites des approximations décimales par défaut de x et y. Il existe un certain rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n < r < v_n$. Pour $a > 1$, les suites (a^{u_n}) et (a^{v_n}) sont croissantes. et $a^{u_n} < a^r < a^{v_n}$. Par passage à la limite, $a^x \leqslant a^r < a^y$. Donc $x \mapsto a^x$ est strictement croissante pour $a > 1$. Toute fonction croissante admet une limite en $-\infty$ et en $+\infty$. Pour identifier ces limites, il suffit de considérer une suite tendant vers $-\infty$ et une suite tendant vers $+\infty$, par exemple les suites d'entiers $(-n)$ et (n). Or :
$$\lim_{n\to\infty} a^{-n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} a^{n} = +\infty\ .$$
D'où le résultat.
Pour $a < 1$, inutile de refaire les démonstrations : il suffit d'utiliser la formule $a^{-x} = 1/a^x$, conséquence de (1).
3. Nous souhaitons montrer que pour tout $x < y$, et pour tout $\lambda \in [0, 1]$,
$$a^{\lambda x+(1-\lambda)y} \leqslant \lambda a^x + (1-\lambda)a^y\ . \tag{2}$$
Il existe plusieurs démonstrations, mais l'auteur est tellement fan de celle qui suit, qu'il ne résiste pas au plaisir de vous la servir.
Nous allons d'abord montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ , \quad a^{(x_1+\cdots+x_n)/n} \leqslant \frac{1}{n}\Big(a^{x_1} + \cdots + a^{x_n}\Big)\ . \tag{3}$$
La démonstration de (3) est une récurrence curieuse. Observons d'abord que (3) est trivialement vraie pour $n = 1$. Montrons qu'elle est vraie pour $n = 2$. Par application de (1) et puisque $a^x > 0$, on a :
$$a^{(x_1+x_2)/2} = \sqrt{a^{x_1}a^{x_2}}\ .$$
Il est facile de vérifier que si α et β sont deux réels positifs, alors $\sqrt{\alpha\beta} \leqslant (\alpha+\beta)/2$, d'où (3) pour $n = 2$. Nous en déduisons ensuite que si (3) est vraie pour un entier

n, alors elle est vraie pour $2n$. Pour faciliter la lecture, nous notons f_a l'application $x \mapsto a^x$.

$$\begin{aligned}
f_a\left(\frac{x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{2n}\right)& \\
&= f_a\left(\frac{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}+\frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}}{2}\right)\\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(f_a\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)+f_a\left(\frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}\right)\right)\\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{f_a(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}+\frac{f_a(x_{n+1})+\cdots+f(x_{2n})}{n}\right)\\
&= \frac{f_a(x_1)+\cdots+f_a(x_n)+f_a(x_{n+1})+\cdots+f_a(x_{2n})}{2n}\;.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que si (3) est vraie pour un entier $m \geqslant 2$, alors elle est vraie pour $m-1$.

$$\begin{aligned}
f_a\left(\frac{x_1+\cdots+x_{m-1}}{m-1}\right) &= f_a\left(\frac{x_1+\cdots+x_{m-1}+\frac{x_1+\cdots+x_{m-1}}{m-1}}{m}\right)\\
&\leqslant \frac{1}{m}\left(f_a(x_1)+\cdots+f_a(x_{m-1})+f_a\left(\frac{x_1+\cdots+x_{m-1}}{m-1}\right)\right)\;.
\end{aligned}$$

Soit en regroupant les termes :

$$f_a\left(\frac{x_1+\cdots+x_{m-1}}{m-1}\right)\left(\frac{m-1}{m}\right) \leqslant \frac{1}{m}\Big(f_a(x_1)+\cdots+f_a(x_{m-1})\Big)\;,$$

d'où le résultat pour $m-1$. Maintenant, si (3) est vraie pour un entier n, elle est vraie pour $2n$, et d'après ce qui précède, aussi pour $2n-1$, $2n-2$, …, $n+1$. Elle est donc vraie pour tout n.

Soient p et q deux entiers positifs tels que $p < q$, et x, y deux réels tels que $x < y$. Appliquons (3) pour $n = q$, $x_1 = \cdots = x_p = x$, et $x_{p+1} = \cdots = x_q = y$. On obtient :

$$f_a\left(\frac{p}{q}x+\left(1-\frac{p}{q}\right)y\right) \leqslant \frac{p}{q}f_a(x)+\left(1-\frac{p}{q}\right)f_a(y)\;,$$

soit (2) pour $\lambda = \frac{p}{q}$. Donc (2) est vraie pour tout λ *rationnel*. On en déduit le résultat pour tout λ réel, en utilisant les approximations rationnelles comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois.

4. La dérivabilité se déduit de la convexité, en utilisant la propriété (1). Commençons par montrer que f_a est dérivable en 0. Considérons la fonction τ_0, qui à $h \in \mathbb{R}^*$ associe le taux d'accroissement :

$$\tau_0(h) = \frac{a^h - a^0}{h-0} = \frac{a^h-1}{h}\;.$$

La fonction f_a étant convexe, elle est continue et ses accroissements sont croissants. Donc la fonction τ_0 admet une limite à gauche et une limite à droite en 0. La fonction f_a est donc dérivable à gauche et à droite en 0. Nous devons montrer que les deux dérivées sont égales. Pour cela, calculons $\tau_0(-h)$, en utilisant (1).

$$\tau_0(-h) = \frac{a^{-h}-1}{-h} = \frac{\frac{1}{a^h}-1}{-h} = \frac{1}{a^h}\,\frac{1-a^h}{-h} = \frac{1}{a^h}\tau_0(h)\ .$$

Or quand h tend vers 0, $1/a^h$ tend vers 1, par continuité en 0. Donc la limite à gauche de τ_0 en 0 est égale à sa limite à droite, ce qui entraîne que f_a est dérivable en 0. Notons L_a la dérivée en 0.

Pour en déduire la dérivabilité en un point x quelconque de $\mathbb{R}$, il suffit d'appliquer une fois de plus la propriété (1) :

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = L_a\, a^x\ .$$

5. La dérivée étant proportionnelle à la fonction, elle est elle même dérivable. Donc f_a est indéfiniment dérivable et sa dérivée n-ième est $L_a^n\, f_a$.

$\square$

1.2 Logarithme et exponentielle

Il se trouve que le facteur par lequel on multiplie la fonction puissance de base a pour obtenir sa dérivée, cette constante que nous avons sournoisement notée L_a dans le théorème 1, est le *logarithme naturel*, ou *logarithme népérien* de a.

Définition 2. *Soit a un réel strictement positif. On appelle* logarithme naturel *de a, et on note* $\ln(a)$ *la dérivée en 0 de la fonction $x \mapsto a^x$.*

Théorème 2.

1. *Pour tout $a, b > 0$, on a :*

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)\ .$$

2. *Pour tout $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\ln(a^x) = x\ln(a)\ .$$

3. *La fonction* ln *est strictement croissante, et :*

$$\lim_{x\to 0^+}\ln(x) = -\infty\ , \quad \lim_{x\to +\infty}\ln(x) = +\infty\ .$$

Démonstration : Nous reprenons la notation de la section précédente pour les fonctions puissances : f_a désigne la fonction $x \mapsto a^x$.

1. Soient a et b deux réels strictement positifs. Considérons la fonction f_{ab}. On a :

$$f_{ab}(x) = (ab)^x = a^x b^x = f_a(x) f_b(x) .$$

On calcule la dérivée de f_{ab} en 0, en dérivant le produit $f_a f_b$:

$$\ln(ab) = f'_{ab}(0) = f'_a(0) f_b(0) + f_a(0) f'_b(0) = \ln(a) + \ln(b) .$$

2. Soit a un réel strictement positif et soient x, y deux réels quelconques.

$$f_a(xy) = a^{xy} = (a^x)^y = f_{a^x}(y) .$$

Fixons x, dérivons par rapport à y et prenons la dérivée en 0. On obtient :

$$x f'_a(0) = f'_{a^x}(0) ,$$

soit $x \ln(a) = \ln(a^x)$.

3. Fixons $a > 1$. D'après le point *2(b)* du théorème 1, la fonction f_a est strictement croissante. On en déduit d'une part que $\ln(a)$ est strictement positif, d'autre part que f_a est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. La relation $\ln(a^x) = x \ln(a)$ montre que la fonction réciproque de a^x est la fonction qui à $y \in \mathbb{R}^{+*}$ associe $\ln(y)/\ln(a)$. Cette fonction est donc strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$. Les limites en 0^+ et $+\infty$ se déduisent aussi du point *2(b)* du théorème 1.

□

Il nous reste à définir la fonction exponentielle, qui est la réciproque du logarithme. D'après le point *3* du théorème 2, il existe un réel unique, strictement supérieur à 1, dont le logarithme vaut 1. On le note e.

Définition 3. *On appelle* exponentielle*, et on note* exp*, la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe* e^x*, où* e *est l'unique réel tel que* $\ln(\mathrm{e}) = 1$*.*

Ainsi, on pourra noter l'exponentielle de x indifféremment e^x ou $\exp(x)$ (la seconde notation est préférable pour les grosses formules).

Théorème 3. *L'exponentielle est la réciproque du logarithme. Les deux fonctions sont strictement croissantes et dérivables.*

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \exp'(x) = \exp(x) \quad \textit{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}^{+*}\,,\ \ln'(y) = \frac{1}{y} .$$

Démonstration : Puisque $\ln(\mathrm{e}) = 1$, on a $\ln(\exp(x)) = x$, par le point *2* du théorème 2. La dérivée de l'exponentielle est donnée par le point *4* du théorème 1. On dérive le logarithme comme une fonction réciproque :

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln(y))} = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{y} .$$

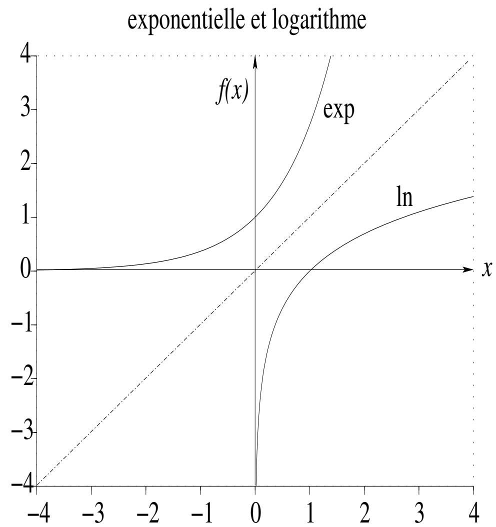

FIGURE 2 – Fonctions exp et ln.

□

La figure 2 montre les graphes des fonctions exp et ln. Comme elles sont réciproques l'une de l'autre, leurs graphes sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Comme nous l'avons vu dans la démonstration du théorème 2, le couple de fonctions réciproques $(\exp, \ln)$ n'est qu'un cas particulier. Pour tout $a > 0$, la fonction puissance de base a admet pour réciproque la fonction $x \mapsto \ln(x)/\ln(a)$, que l'on appelle le *logarithme en base a*.

Définition 4. *Soit a un réel strictement positif. On appelle* logarithme en base *a la fonction réciproque de la fonction puissance de base a. C'est la fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ qui à $x > 0$ associe :*

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} .$$

À part le logarithme en base e, qui est le logarithme naturel, les deux bases les plus utilisées sont $a = 10$ (logarithme décimal) et $a = 2$ (logarithme binaire). Par définition, le logarithme en base a de x est le nombre y tel que $a^y = x$. Ainsi :

$$\log_{10}(0.001) = -3 , \quad \log_{10}(100) = 2 , \quad \log_2 1/16 = -4 , \quad \log_2(1024) = 10 .$$

Il est facile de passer du logarithme en base a au logarithme naturel, de même qu'il est facile de passer de l'exponentielle à une autre fonction puissance, par la formule :

$$a^x = \exp(x \ln(a)) .$$

Nous terminons cette section par deux résultats d'approximation de l'exponentielle. Le premier se redémontre facilement, le second est absolument fondamental et doit être connu par cœur.

Théorème 4. *Pour tout réel x,*

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\;.$$

Démonstration : Pour la première limite, écrivons :

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp(n\ln(1+x/n)) = \exp\left(x\frac{\ln(1+x/n)}{x/n}\right)\;.$$

Or $\ln(1)=0$ et $\ln'(1)=1$. On en déduit :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \text{ et donc, } \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x/n)}{x/n} = 1\;.$$

Comme la fonction exp est continue, ceci entraîne bien :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\exp\left(x\frac{\ln(1+x/n)}{x/n}\right) = \exp(x)\;.$$

Nous démontrons la seconde formule à partir de la première, en utilisant la formule du binôme de Newton.

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} = 1+\frac{x}{1!}x+\frac{1(1-\frac{1}{n})x^2}{2!}+\cdots+\frac{1(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k}{n})x^k}{k!}+\cdots+\frac{x^n}{n^n}\;.$$

Supposons d'abord $x \geqslant 0$. Fixons $k\in\mathbb{N}^*$: pour tout $n \geqslant k$:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geqslant 1+\frac{x}{1!}+\frac{1(1-\frac{1}{n})x^2}{2!}+\cdots+\frac{1(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k}{n})x^k}{k!}\;.$$

Or pour k fixé :

$$\lim_{n\to\infty} 1(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k}{n}) = 1\;.$$

En passant à la limite en n, on en déduit que pour tout k :

$$\mathrm{e}^x \geqslant 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}\;.$$

Dans cette inégalité, le membre de droite est le terme général d'une suite croissante et majorée (par e^x), donc il converge, et :

$$\mathrm{e}^x \geqslant \lim_{k\to\infty} 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}\;.$$

D'autre part, observons que pour tout $k = 0, \ldots, n$,

$$1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n}\right) \leqslant 1 \; .$$

Donc :

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} \leqslant 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots+\frac{x^n}{n!} \; .$$

Puisque nous savons que le membre de droite converge, on en déduit par passage à la limite :

$$\mathrm{e}^x \leqslant \lim_{n\to\infty} 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!} \; .$$

D'où le résultat, pour x positif ou nul.

Pour x négatif, l'astuce consiste à faire disparaître les termes impairs en prenant la demi-somme de e^x et e^{-x} (nous verrons plus loin que cette demi-somme est le *cosinus hyperbolique* de x).

$$\frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor n\rfloor}\binom{n}{k}\frac{x^{2k}}{n^{2k}} \; .$$

Le même raisonnement que précédemment montre que :

$$\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2} = \lim_{n\to\infty} 1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{2n!} \; .$$

Par linéarité de la limite, on en déduit alors que :

$$\mathrm{e}^{-x} = \lim_{n\to\infty} 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!} \; .$$

□

Les résultats d'approximation permettent de calculer les exponentielles avec une précision arbitraire. Voici le nombre e arrondi à la cinquantième décimale.

$$\mathrm{e} = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369996$$

1.3 Fonctions circulaires

Le *cercle trigonométrique* (figure 3) est le cercle centré à l'origine et de rayon 1, dans le plan muni d'un repère orthonormé. Les angles sont mesurés en radians, à partir de l'axe des abscisses orienté vers la droite, et en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique). La demi-droite partant de l'origine O et d'angle θ coupe le cercle en un point M. Observons que la longueur de l'arc de cercle allant de I à M est égale à θ.

Par définition :

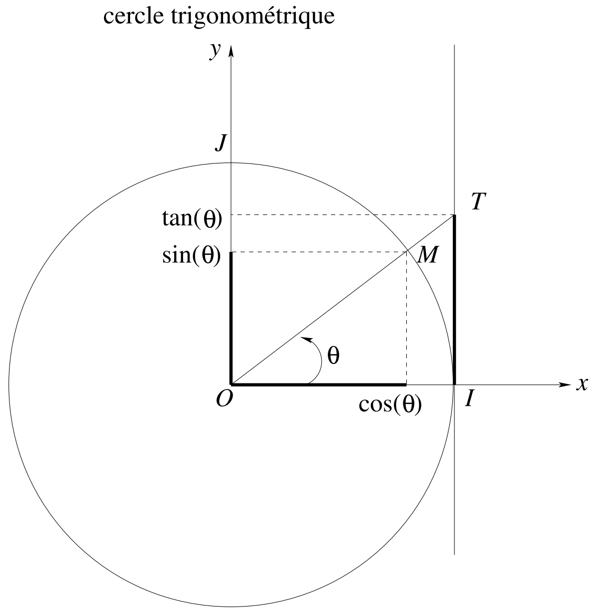

FIGURE 3 – Cercle trigonométrique, sinus, cosinus et tangente d'un angle.

- le *cosinus* de l'angle θ est l'abscisse du point M.
- le *sinus* de l'angle θ est l'ordonnée du point M.
- la *tangente* de l'angle θ est le rapport du sinus sur le cosinus.

Donc :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{OI} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{OJ}\ .$$

Sur la figure 3, la tangente est l'ordonnée du point T. Le théorème de Pythagore se traduit par :

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1\ .$$

Montrons tout de suite deux inégalités qui nous serviront plus tard à étudier la dérivée de ces fonctions.

Lemme 1. *Soit θ un angle tel que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Alors :*

$$\sin(\theta) \leqslant \theta \leqslant \tan(\theta)\ .$$

Démonstration : voir la figure 3 pour les notations. L'aire du triangle OIM vaut $\sin(\theta)/2$. L'aire du *secteur angulaire* OIM vaut $\theta/2$ (elle est proportionnelle à θ, et l'aire du cercle est π). L'aire du triangle OIT vaut $\tan(\theta)/2$. D'où le résultat. □

Deux angles qui diffèrent d'un multiple de 2π correspondent au même point sur le cercle, et donc aux mêmes valeurs des fonctions trigonométriques. Le cosinus et le sinus sont donc périodiques de période 2π (figure 4). La fonction tangente est définie pour tout angle dont le cosinus est non nul, à savoir tout angle différent de $\pi/2$ modulo π.

Elle est périodique de période π. Il est bon de connaître les relations suivantes, ou de savoir les retrouver rapidement en dessinant le cercle.

$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\cos(-x) = \cos(x)$	$\tan(-x) = -\tan(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$
$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$	$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$	$\tan(\pi + x) = \tan(x)$
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$	$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$	$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = 1/\tan(x)$
$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$	$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$	$\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -1/\tan(x)$

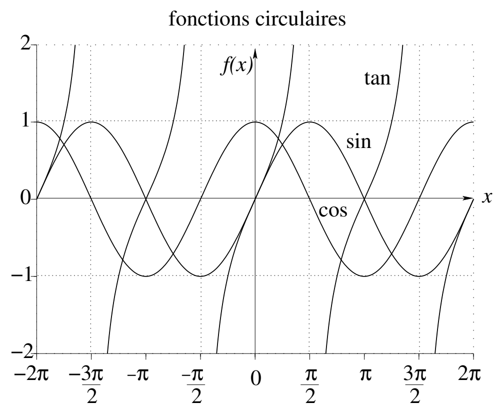

FIGURE 4 – Fonctions sinus, cosinus et tangente.

Nous ne vous conseillons pas d'apprendre par cœur des nuées de formules trigonométriques ; vous devez bien sûr retenir $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, et vous devez également connaître les formules d'addition qui suivent.

Proposition 3. *Soient a et b deux réels.*
- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

Démonstration : reportez-vous à la figure 5 pour les notations. Notons K le point d'intersection avec le cercle de la demi-droite d'angle a, L le point d'intersection de la demi-droite d'angle $a + \pi/2$, M le point d'intersection de la demi-droite d'angle $a + b$. Par définition :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(b)\,\overrightarrow{OK} + \sin(b)\,\overrightarrow{OL}\ .$$

Or :

$$\overrightarrow{OK} = \cos(a)\,\overrightarrow{OI} + \sin(a)\,\overrightarrow{OJ} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OL} = -\sin(a)\,\overrightarrow{OI} + \cos(a)\,\overrightarrow{OJ}\ .$$

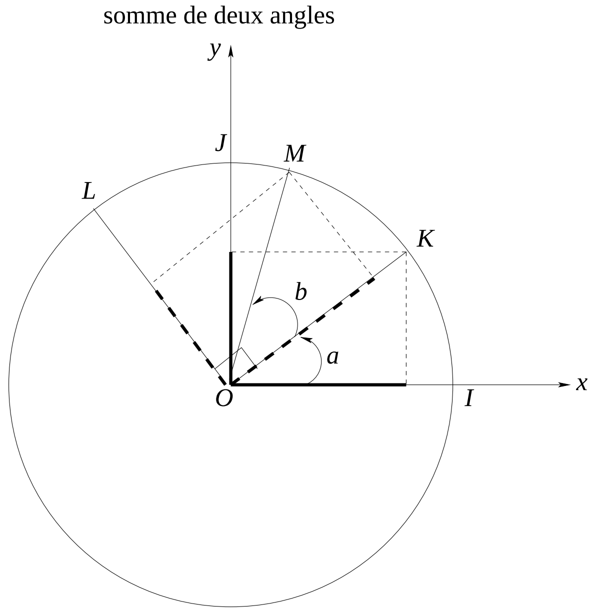

FIGURE 5 – Somme de deux angles.

En reportant ces expressions :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \cos(b)\Big(\cos(a)\,\overrightarrow{OI}+\sin(a)\,\overrightarrow{OJ}\Big)+\sin(b)\Big(-\sin(a)\,\overrightarrow{OI}+\cos(a)\,\overrightarrow{OJ}\Big)\\ &= \Big(\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\Big)\,\overrightarrow{OI}+\Big(\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)\Big)\,\overrightarrow{OJ}\ .\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Il ne nous reste plus qu'à démontrer la dérivabilité.

Proposition 4. *Les fonctions sinus et cosinus sont indéfiniment dérivables sur* $\mathbb{R}$*.*

$$\sin'(x)=\cos(x)\quad \textit{et}\quad \cos'(x)=-\sin(x)\ .$$

La fonction tangente est indéfiniment dérivable sur tout intervalle où elle est définie.

$$\tan'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)\ .$$

Démonstration : Nous commençons par la dérivabilité en 0 du sinus, en utilisant les inégalités du lemme 1. La fonction sinus étant impaire, nous pouvons nous contenter de limites à droite en 0. De $0\leqslant \sin(h)\leqslant h$, on déduit que sin est continue en 0, et puisque $\cos^2(h)+\sin^2(h)=1$, il en est de même de cos :

$$\lim_{h\to 0}\sin(h)=0\quad\text{et}\quad \lim_{h\to 0}\cos(h)=1\ .$$

D'autre part, pour tout $h > 0$:

$$\begin{aligned} & \sin(h) \leqslant h \leqslant \tan(h) \\ \Longrightarrow \quad & \frac{\sin(h)}{h} \leqslant 1 \leqslant \frac{1}{\cos(h)} \frac{\sin(h)}{h} \\ \Longrightarrow \quad & \cos(h) \leqslant \frac{\sin(h)}{h} \leqslant 1 \;. \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \;.$$

La fonction sinus est dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1$.

Passons maintenant au cosinus, toujours en 0. Écrivons :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cos(h) + 1} \frac{\cos^2(h) - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-\sin(h)}{\cos(h) + 1} \frac{\sin(h)}{h} \;.$$

Les résultats précédents permettent d'en déduire que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0$$

La fonction cosinus est dérivable en 0 et $\cos'(0) = 0$.

Il ne reste plus qu'à utiliser les formules de sommation pour calculer les dérivées en un point quelconque. Écrivons le taux d'accroissement de la fonction sinus en a, évalué en $a + h$:

$$\begin{aligned} \tau_a(a+h) &= \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} \\ &= \frac{1}{h}\Big(\sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h) - \sin(a) \Big) \\ &= \sin(a)\frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(a)\frac{\sin(h)}{h} \;. \end{aligned}$$

On sait que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \;.$$

Donc :

$$\lim_{h \to 0} \tau_a(a+h) = \cos(a) \;.$$

Écrivons maintenant le taux d'accroissement de la fonction cosinus en a, évalué en $a+h$:

$$\begin{aligned}\tau_a(a+h) &= \frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} \\ &= \frac{1}{h}\Big(\cos(a)\cos(h)-\sin(a)\sin(h)-\cos(a)\Big) \\ &= \cos(a)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(a)\frac{\sin(h)}{h}\ .\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{h\to 0} \tau_a(a+h) = -\sin(a)\ .$$

Les dérivées de sinus et cosinus sont elles mêmes dérivables, donc par récurrence ces deux fonctions sont indéfiniment dérivables.

On calcule la dérivée de la fonction tangente comme un quotient :

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)\ .$$

□

1.4 Fonctions circulaires réciproques

Les fonctions circulaires ne sont certes pas des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (figure 4). Il est cependant commode, principalement pour les calculs de primitives, de définir des réciproques partielles, en se restreignant à des intervalles sur lesquelles sin, cos et tan sont bijectives. Le choix de ces intervalles est arbitraire, et fixé par l'usage (figure 6).

Définition 5. *On appelle :*

- arc sinus *la bijection de* $[-1,1]$ *dans* $[-\pi/2,\pi/2]$*, qui à* x *associe l'angle compris entre* $-\pi/2$ *et* $\pi/2$ *dont le sinus est égal à* x*.*

$$\begin{array}{ccc} & \text{arcsin} & \\ [-1,1] & \longrightarrow & [-\pi/2,\pi/2] \\ x & \longmapsto & \arcsin(x) \end{array}$$

- arc cosinus *la bijection de* $[-1,1]$ *dans* $[0,\pi]$*, qui à* x *associe l'angle compris entre* 0 *et* π *dont le cosinus est égal à* x*.*

$$\begin{array}{ccc} & \text{arccos} & \\ [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ x & \longmapsto & \arccos(x) \end{array}$$

- arc tangente *la bijection de* $]-\infty,+\infty[$ *dans* $]-\pi/2,\pi/2[$, *qui à* x *associe l'angle compris entre* $-\pi/2$ *et* $\pi/2$ *dont la tangente est égale à* x.

$$\begin{array}{ccc} & \text{arctan} & \\ \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\pi/2,\pi/2[\\ x & \longmapsto & \arctan(x) \end{array}$$

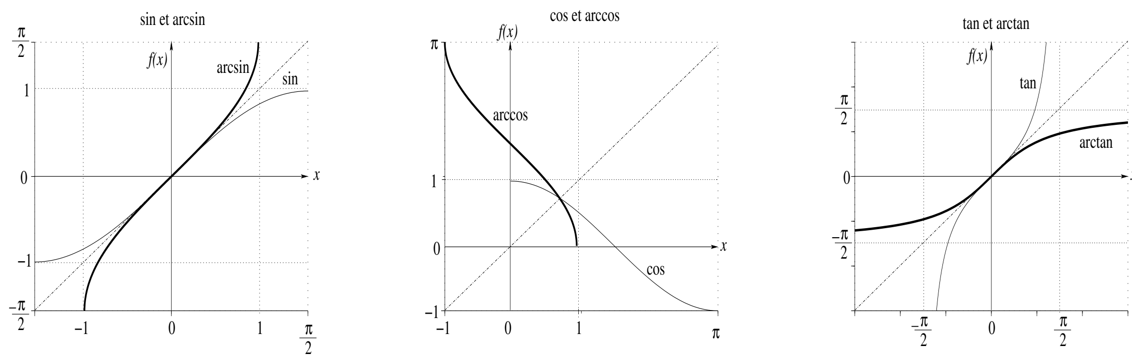

FIGURE 6 – Fonctions circulaires et leurs réciproques.

Le principal intérêt des fonctions circulaires réciproques réside dans leurs dérivées.

Proposition 5. *Les fonctions* arcsin, arccos *et* arctan *sont dérivables sur leur domaine de définition.*

- $\forall x \in]-1,1[\,,\quad \arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$
- $\forall x \in]-1,1[\,,\quad \arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$
- $\forall x \in \mathbb{R}\,,\quad \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\,.$

Démonstration : Il suffit d'appliquer la formule donnant la dérivée d'une fonction réciproque.

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

La dérivée de l'arc cosinus s'obtient de la même façon, ou bien en remarquant que :

$$\forall x \in]-1,1[\,,\quad \arcsin(x)+\arccos(x) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Pour l'arc tangente :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

□

1.5 Fonctions hyperboliques

Définition 6. *On appelle :*

- sinus hyperbolique *l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad \sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,.$$

- cosinus hyperbolique *l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $[1, +\infty[$*, définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\,.$$

- tangente hyperbolique *l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $]-1, 1[$*, définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,.$$

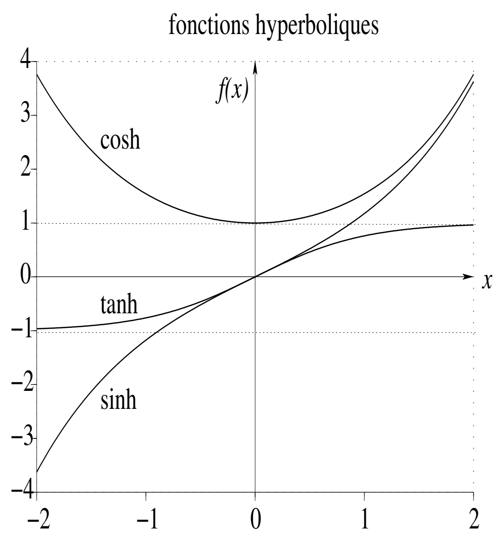

FIGURE 7 – Fonctions sinus, cosinus et tangente hyperboliques.

Bien évidemment les fonctions hyperboliques sont indéfiniment dérivables. Les expressions de leurs dérivées rappellent celles des fonctions circulaires.

$$\sinh'(x) = \cosh(x)\,, \quad \cosh'(x) = \sinh(x)\,, \quad \tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)\,.$$

Il est facile de vérifier la formule suivante.

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1\,.$$

Si on pose $X = \cosh(x)$ et $Y = \sinh(x)$, l'équation $X^2 - Y^2 = 1$ définit dans le plan une *hyperbole équilatère* (figure 8). Le cosinus et le sinus hyperboliques sont un paramétrage de cette hyperbole, tout comme le cosinus et le sinus ordinaires sont un paramétrage du cercle unité (d'équation $X^2 + Y^2 = 1$) : d'où la dénomination de fonctions *hyperboliques* et fonctions *circulaires*.

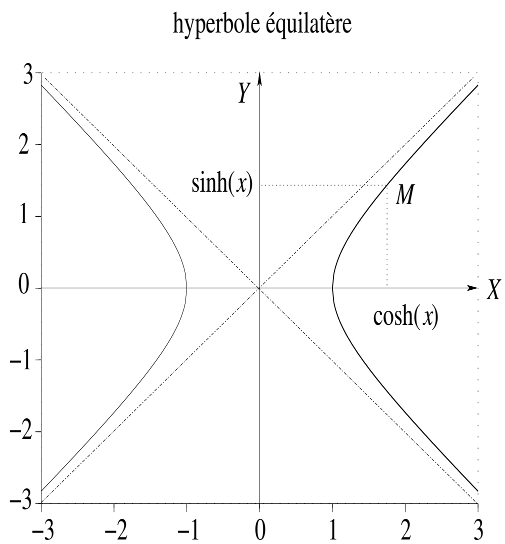

FIGURE 8 – Le cosinus et le sinus hyperboliques comme paramétrage de l'hyperbole d'équation $X^2 - Y^2 = 1$.

L'analogie entre fonctions circulaires et fonctions hyperboliques ne s'arrête pas à leur interprétation géométrique. Toutes les formules de trigonométrie circulaire ont leur pendant en trigonométrie hyperbolique. La raison en est la relation entre les fonctions circulaires, les fonctions hyperboliques, et l'exponentielle complexe, via les *formules d'Euler*.

fonctions circulaires		fonctions hyperboliques	
$\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$	$\sinh(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

1.6 Fonctions hyperboliques réciproques

Comme les fonctions circulaires, les fonctions hyperboliques ont leurs réciproques, qui servent elles aussi aux calculs de primitives (figure 9).

Définition 7. *On appelle :*

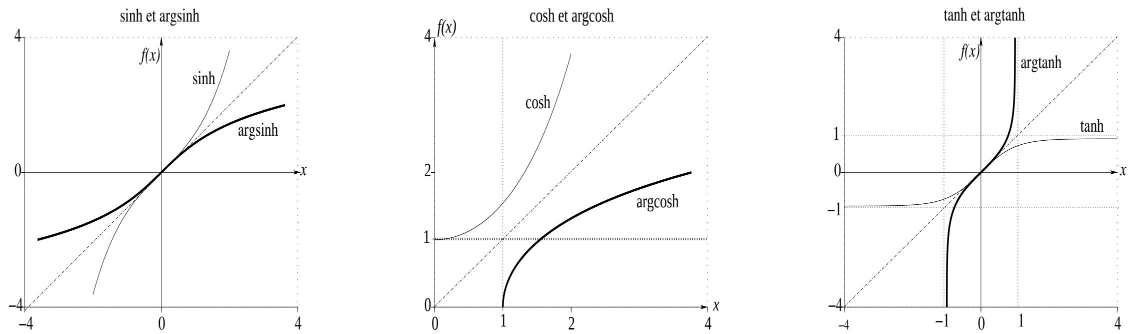

FIGURE 9 – Fonctions hyperboliques et leurs réciproques.

- argument sinus hyperbolique *la bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, qui à* x *associe le réel dont le sinus hyperbolique est égal à* x*.*

$$\begin{array}{rcl} & \text{argsinh} & \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{argsinh}(x)\ . \end{array}$$

- argument cosinus hyperbolique *la bijection de* $[1,+\infty[$ *dans* $[0,+\infty[$*, qui à* x *associe le réel positif dont le cosinus hyperbolique est égal à* x*.*

$$\begin{array}{rcl} & \text{argcosh} & \\ [1,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \text{argcosh}(x)\ . \end{array}$$

- argument tangente hyperbolique *la bijection de* $]-1,+1[$ *dans* $\mathbb{R}$*, qui à* x *associe le réel dont la tangente hyperbolique est égale à* x*.*

$$\begin{array}{rcl} & \text{argtanh} & \\ ]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{argtanh}(x)\ . \end{array}$$

Elles sont moins importantes que leurs analogues circulaires, car elles s'expriment de façon relativement simple à l'aide du logarithme.

Proposition 6.
- $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\quad \text{argsinh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})\ ,$
- $\forall x \in]1,+\infty[\ ,\quad \text{argcosh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})\ ,$
- $\forall x \in]-1,1[\ ,\quad \text{argtanh}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\ .$

Démonstration : Résolvons l'équation $\sinh(x) = y$.

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0\ .$$

L'équation $X^2-2yX-1=0$ a deux racines réelles, dont seule $y+\sqrt{y^2+1}$ est positive. Donc $x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$.

Résolvons l'équation $\cosh(x)=y$.

$$\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}=y \iff \mathrm{e}^{2x}-2y\mathrm{e}^x+1=0\ .$$

Pour $y\geqslant 1$, l'équation $X^2-2yX-1=0$ a deux racines réelles, dont seule $y+\sqrt{y^2-1}$ est supérieure à 1. Donc $x=\ln(y+\sqrt{y^2-1})$.

Résolvons l'équation $\tanh(x)=y$.

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=y \\ \Longrightarrow\quad & \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}=y \\ \Longrightarrow\quad & \mathrm{e}^{2x}=\frac{1-y}{1+y} \\ \Longrightarrow\quad & x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right)\ , \end{aligned}$$

puisque $(1+y)/(1-y)$ est strictement positif pour $y\in\,]-1,1[\,$. □

Ici encore, le principal intérêt réside dans les dérivées.

Proposition 7. *Les fonctions* argsinh*,* argcosh *et* argtanh *sont dérivables sur leur domaine de définition.*

- $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\qquad \operatorname{argsinh}'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ ,$
- $\forall x\in\,]1,+\infty[\ ,\quad \operatorname{argcosh}'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ ,$
- $\forall x\in\,]-1,1[\ ,\quad \operatorname{argtanh}'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}\ .$

Démonstration : On peut dériver directement l'expression en logarithme ou bien appliquer la formule donnant la dérivée d'une fonction réciproque.

$$\operatorname{argsinh}'(x)=\frac{1}{\sinh'(\operatorname{argsinh}(x))}=\frac{1}{\cosh(\operatorname{argsinh}(x))}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ .$$

$$\operatorname{argcosh}'(x)=\frac{1}{\cosh'(\operatorname{argcosh}(x))}=\frac{1}{\sinh(\operatorname{argcosh}(x))}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ .$$

$$\operatorname{argtanh}'(x)=\frac{1}{\tanh'(\operatorname{argtanh}(x))}=\frac{1}{1-\tanh^2(\operatorname{argtanh}(x))}=\frac{1}{1-x^2}\ .$$

□

Définir une primitive de $1/(1-x^2)$ uniquement sur $]-1,1[$ est un tantinet réducteur, puisque la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \ ,$$

a pour dérivée $x \mapsto 1/(1-x^2)$ en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

De même, définir une primitive de $1/\sqrt{x^2-1}$ seulement sur $]1,+\infty[$ ne suffit pas, puisque la fonction

$$x \longmapsto \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| \ ,$$

a pour dérivée $1/\sqrt{x^2-1}$ sur $]-\infty,-1[$ et sur $]1,+\infty[$.

C'est une raison suffisante pour vous conseiller de ne pas trop surcharger votre mémoire vive avec les fonctions hyperboliques réciproques.

2 Entraînement

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. Soit a un réel strictement positif, x et y deux réels quelconques. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $a^{x-y} = a^x/a^y$.
2. ☐ $a^{(x^y)} = a^{xy}$.
3. ☐ $a^{2xy} = a^{x^2}\, a^{y^2}$.
4. ☒ $a^{(x+y)/2} = \sqrt{a^x\, a^y}$.
5. ☒ $a^{-x+y/2} = \sqrt{a^y}/a^x$.
6. ☐ $a^{2x-y} = (a^x/a^y)^2$.

Vrai-Faux 2. Soient a et b deux réels strictement positifs. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $\ln(\sqrt{a/b}) = (1/2)(\ln(a) - \ln(b))$.
2. ☐ $\ln((ab)/2) = \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.
3. ☐ $\ln(a^b) = (\ln(a))^{\ln(b)}$.
4. ☒ $\ln((a^2)^b) = 2b\ln(a)$.
5. ☐ $\ln(a^2/b^2) = -2\ln(ab)$.
6. ☒ $\ln(a^2/b) = \ln(a) - \ln(b/a)$.

Vrai-Faux 3. Soit a un réel strictement positif. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ $\ln(\mathrm{e}^{\sqrt{a}}) = a/2$.
2. ☒ $\ln(a^{\mathrm{e}}) = \mathrm{e}\ln(a)$.
3. ☐ $\mathrm{e}^{\ln^2(a)} = a^2$.
4. ☐ $\mathrm{e}^{\ln(a/2)} = a - 2$.
5. ☒ $\ln(a^{\mathrm{e}+a}) = (\mathrm{e}+a)\ln(a)$.
6. ☒ $\mathrm{e}^{2\ln(a)-\ln(a)/2} = a^{3/2}$.

Vrai-Faux 4. Soit x un réel quelconque. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $\sin(x - 3\pi) = -\sin(x)$.
2. ☐ $\sin(x + 3\pi) = \sin(x)$.
3. ☒ $\cos(3\pi - x) = -\cos(x)$.
4. ☒ $\cos(-x - 3\pi) = -\cos(x)$.

5. ☐ $\sin(x+3\pi) = \sin(x)$.
6. ☒ $\sin(x+3\pi/2) = -\cos(x)$.
7. ☐ $\cos(x-3\pi/2) = \sin(x)$.
8. ☒ $\cos(x+3\pi/2) = \sin(x)$.

Vrai-Faux 5. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $\sin(-7\pi/2) = 1$.
2. ☐ $\sin(5\pi/4) = \sqrt{2}/2$.
3. ☐ $\sin(8\pi/3) = -\sqrt{3}/2$.
4. ☒ $\cos(9\pi/2) = 0$.
5. ☐ $\cos(-7\pi/3) = -1/2$.
6. ☒ $\cos(-7\pi/4) = \sqrt{2}/2$.
7. ☒ $\tan(-7\pi/3) = -\sqrt{3}$.
8. ☒ $\tan(-7\pi/4) = 1$.
9. ☐ $\tan(-7\pi/6) = -\sqrt{3}/3$.

Vrai-Faux 6. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ $\lim\limits_{x\to-\pi/2^-} \tan(x) = -\infty$.
2. ☐ $\lim\limits_{x\to-\pi^+} \tan(x) = +\infty$.
3. ☒ $\lim\limits_{x\to5\pi/2^+} \tan(x) = -\infty$.
4. ☒ $\lim\limits_{x\to-5\pi/2^+} \tan(x) = -\infty$.
5. ☐ $\lim\limits_{x\to7\pi/2^-} \tan(x) = -\infty$.

Vrai-Faux 7. Soit x un réel quelconque. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$.
2. ☐ $\cos(2x) - \sin(2x) = (\cos(x)+\sin(x))^2 + 2\sin^2(x)$.
3. ☒ $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$.
4. ☐ $\cos(x) + \cos(3x) = 2\sin(x)\sin(2x)$.
5. ☐ $\sin(x) + \sin(3x) = 2\sin(x)\cos(2x)$.
6. ☒ $\sin(3x) - \sin(x) = 2\sin(x)\cos(2x)$.

Vrai-Faux 8. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ $\arccos(-1/2) = -\pi/3$.
2. ☒ $\arccos(-\sqrt{2}/2) = 3\pi/4$.
3. ☒ $\arcsin(-1/2) = -\pi/6$.
4. ☐ $\arcsin(\sqrt{3}/2) = 2\pi/3$.
5. ☒ $\arctan(-1) = -\pi/4$.
6. ☐ $\arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/6$.

Vrai-Faux 9. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $\forall x \in [-1,1]\,,\quad \sin(\arcsin(x)) = x$.
2. ☐ $\forall x \in [-\pi,\pi]\,,\quad \arcsin(\sin(x)) = x$.
3. ☒ $\forall x \in [-1,1]\,,\quad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
4. ☒ $\forall x \in [-1,1]\,,\quad \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
5. ☐ $\forall x \in [-\pi/2,\pi/2]\,,\quad \arcsin(\cos(x)) = \pi/2 - x$.
6. ☒ $\forall x \in [0,\pi/2]\,,\quad \arccos(\sin(x)) = \pi/2 - x$.
7. ☐ $\forall x \in [-\pi/2,\pi/2]\,,\quad \arctan(\sin(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
8. ☐ $\forall x \in [-1,1]\,,\quad \tan(\arccos(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
9. ☒ $\forall x \in\,]-1,1[\,,\quad \tan(\arcsin(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Vrai-Faux 10. Soit x un réel quelconque. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $\sinh(x) < \cosh(x)$.
2. ☒ $-1 < \tanh(x) < 1$.
3. ☐ $\cosh(2x) = 2\cosh(x) - 1$.
4. ☒ $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$.
5. ☐ $\sinh(x) + \cosh(-x) = \mathrm{e}^{-x}$.
6. ☒ $\sinh(2x) + \cosh(2x) = \mathrm{e}^{2x}$.
7. ☒ $\tanh(2x) = \dfrac{2\tanh(x)}{1+\tanh^2(x)}$.
8. ☐ $\cosh(x) + \cosh(3x) = 2\sinh(x)\sinh(2x)$.
9. ☒ $\sinh(x) + \sinh(3x) = 2\sinh(2x)\cosh(2x)$.
10. ☐ $\sinh(3x) - \sinh(x) = 2\cos(hx)\sinh(2x)$.

Vrai-Faux 11. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argcosh}(\cosh(x)) = x$.
2. ☒ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argsinh}(\sinh(x)) = x$.
3. ☒ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argtanh}(\tanh(x)) = x$.
4. ☒ $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\cosh(\operatorname{argcosh}(x)) = x$.
5. ☐ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argcosh}(\sinh(x)) = 1 - x$.
6. ☐ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argtanh}(\sinh(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
7. ☐ $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\tanh(\operatorname{argcosh}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.
8. ☒ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tanh(\operatorname{argsinh}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

2.2 Exercices

Exercice 1. 1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}} + \sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}} < 2\sqrt[n]{n} .$$

2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 7$:

$$\sqrt{n}^{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}^{\sqrt{n}} .$$

Exercice 2. Déterminer $x \in \mathbb{R}^{+*}$ vérifiant l'équation (E).

1. (E) $5(3^x) = 3(5^x)$.
2. (E) $x^x = \sqrt{2}/2$.
3. (E) $x^x = 3\sqrt{6}/4$.
4. (E) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.

Exercice 3. Déterminer le couple $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, vérifiant le système d'équations (S).

1. (S) $\left\{\begin{array}{lcl} 8^x & = & 10^y \\ 2^x & = & 5^y \, . \end{array}\right.$
2. (S) $\left\{\begin{array}{lcl} 2^{3x+2y} & = & 5 \\ 4^{2x} & = & 2^{2y+3} \, . \end{array}\right.$
3. (S) $\left\{\begin{array}{lcl} xy & = & 2^2 \\ \ln^2(x)+\ln^2(y) & = & \frac{5}{2}\ln^2(2) \, . \end{array}\right.$
4. (S) $\left\{\begin{array}{lcl} x^{x+y} & = & y^4 \\ y^{x+y} & = & x \, . \end{array}\right.$

Exercice 4.

1. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que :

$$\ln\left(\frac{a+b}{4}\right) = \frac{1}{2}\Big(\ln(a)+\ln(b)\Big) \iff a^2+b^2 = 14\,ab\ .$$

2. Soit a un réel strictement positif, différent de 1. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que :

$$\log_a(x) - \log_{a^2}(x) + \log_{a^4}(x) = \frac{3}{4}\ .$$

3. Déterminer l'ensemble des triplets de réels (a, b, c) tels que :

$$\log_{c+b}(a) + \log_{c-b}(a) = 2\log_{c+b}(a)\log_{c-b}(a)\ .$$

Exercice 5. Démontrer les formules de trigonométrie suivantes.

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)\ ;$$

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}\ ;\quad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}\ ;$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)\ ;\quad \tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}\ ;$$

$$\text{en notant : } t = \tan(x/2)\ ,\quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}\ ,\quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}\ ;$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}\ ;\quad \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}\ ;$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big)\ ;$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\Big)\ ;$$

$$\sin(a)+\sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\ ;$$

$$\cos(a)+\cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\ .$$

Exercice 6. On pose :

$$F = \Big\{\ \arcsin\,,\ \arccos\,,\ \arctan\ \Big\} \quad \text{et} \quad G = \Big\{\ \sin\,,\ \cos\,,\ \tan\ \Big\}\ .$$

1. Pour tout $f \in F$ et pour tout $g \in G$, donner une expression algébrique pour la composée $g \circ f$.

2. Pour tout $f \in F$ et pour tout $g \in G$, déterminer le domaine de définition de la composée $f \circ g$ et représenter son graphe.

Exercice 7. Vérifier que les égalités suivantes sont vraies pour tout réel x tel que les expressions écrites aient un sens.

1. $\arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$.
2. $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{x}{|x|}$.
3. $\sin(2\arctan(x)) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.
4. $\tan(3\arctan(x)) = \dfrac{3x - x^3}{1-3x^2}$.

Exercice 8. Déterminer $x \in \mathbb{R}$ vérifiant l'équation (E).

1. (E) $\arccos(x) = \arcsin(1/3) + \arcsin(1/4)$.
2. (E) $\arcsin(x) = \arcsin(2/5) + \arcsin(3/5)$.
3. (E) $\arcsin(\tan(x)) = x$.
4. (E) $\arcsin(2x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$.
5. (E) $\arccos(x) = 2\arccos(3/4)$.
6. (E) $2\arccos(x) = \arccos(|2x^2 - 1|)$.
7. (E) $\arccos(x) = \arcsin(1-x)$.
8. (E) $\arctan(x) = 2\arctan(1/2)$.
9. (E) $\arctan(x) + 2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x) = \pi/2$.
10. (E) $\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = \pi/2$.
11. (E) $\arctan(x) + \arctan(2x) = \pi/4$.

Exercice 9. Démontrer les formules de trigonométrie hyperbolique suivantes.

$$\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)\ ;$$

$$\sinh(a+b) = \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b)\ ;$$

$$\cosh(2a) = \cosh^2(a) + \sin^2(a) = 2\cosh^2(a) - 1 = 1 + 2\sinh^2(a)\ ;$$

$$\cosh^2(a) = \frac{\cosh(2a)+1}{2}\ ; \quad \sinh^2(a) = \frac{\cosh(2a)-1}{2}\ ;$$

$$\sinh(2a) = 2\sinh(a)\cosh(a)\ ; \quad \tanh(2a) = \frac{2\tanh(a)}{1-\tanh^2(a)}\ ;$$

$$\text{en notant : } t = \tanh(x/2)\ ,\ \sinh(x) = \frac{2t}{1-t^2}\ ,\ \cosh(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}\ ,\ \tanh(x) = \frac{2t}{1+t^2}\ ;$$

$$\tanh(a+b) = \frac{\tanh(a)+\tanh(b)}{1+\tanh(a)\tanh(b)}\ ; \quad \tanh(a-b) = \frac{\tanh(a)-\tanh(b)}{1-\tanh(a)\tanh(b)}\ ;$$

$$\sinh(a)\sinh(b) = \frac{1}{2}\Big(\cosh(a+b)-\cosh(a-b)\Big)\ ;$$

$$\sinh(a)\cosh(b) = \frac{1}{2}\Big(\sinh(a+b)+\sinh(a-b)\Big)\ ;$$

$$\sinh(a)+\sinh(b) = 2\sinh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right)\ ;$$

$$\cosh(a)+\cosh(b) = 2\cosh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right)\ .$$

Exercice 10. Soit n un entier. Démontrer que les égalités suivantes sont vraies pour tout réel x tel que les expressions écrites aient un sens.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cosh(kx) = \frac{\sinh((n+\frac{1}{2})x)+\sinh(x/2)}{2\sinh(x/2)}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sinh(kx) = \frac{\cosh((n+\frac{1}{2})x)+\cosh(x/2)}{2\sinh(x/2)}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)+\sin(x/2)}{2\sin(x/2)}$.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(kx) = \frac{-\cos((n+\frac{1}{2})x)+\cos(x/2)}{2\sin(x/2)}$.
5. $\displaystyle\frac{\sin(x)+\sin(nx)+\sin((2n-1)x)}{\cos(x)+\cos(nx)+\cos((2n-1)x)} = \tan(nx)$.
6. $\displaystyle\frac{\sinh(x)+\sinh(nx)+\sinh((2n-1)x)}{\cosh(x)+\cosh(nx)+\cosh((2n-1)x)} = \tanh(nx)$.

Exercice 11. On pose :

$$F = \Big\{\ \text{argsinh}\,,\ \text{argcosh}\,,\ \text{argtanh}\ \Big\} \quad \text{et} \quad G = \Big\{\ \sinh\,,\ \cosh\,,\ \tanh\ \Big\}\,.$$

1. Pour tout $f \in F$ et pour tout $g \in G$, donner une expression algébrique pour la composée $g \circ f$.
2. Pour tout $f \in F$ et pour tout $g \in G$, déterminer le domaine de définition de la composée $f \circ g$ et représenter son graphe.

Exercice 12. Vérifier que les égalités suivantes sont vraies pour tout réel x tel que les expressions écrites aient un sens.

1. $\text{argtanh}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \ln(x)$.

2. $\operatorname{argsinh}(3x+4x^3) = 3\operatorname{argsinh}(x)$.
3. $\cosh(2\operatorname{argtanh}(x)) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.
4. $\sinh\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{argcosh}(x)\right) = \sqrt{\dfrac{x-1}{2}}$.
5. $\operatorname{argcosh}\left(\sqrt{\dfrac{1+\cosh(x)}{2}}\right) = \dfrac{x}{2}$.
6. $2\operatorname{argtanh}(\tan(x)) = \operatorname{argtanh}(\sin(2x))$.

Exercice 13. Déterminer $x \in \mathbb{R}$ vérifiant l'équation (E).

1. (E) $\quad \operatorname{argsinh}(x) = \operatorname{argsinh}(2-x)$.
2. (E) $\quad \operatorname{argcosh}(4x^3-3x) - \operatorname{argcosh}(2x^2-1) = 1$.

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1. Soit a un réel strictement positif, et x un réel quelconque.

A $\sqrt{a^x} = a^{x/2}$.
B $(a^x)^x = a^{2x}$.
C $a^x\, a^{\sqrt{x}} = a^{3x/2}$.
D $\sqrt{a^x}/(a^x)^3 = a^{-3x/2}$.
E $\sqrt{(a^x)^3} = a^{3x/2}$.

Question 2. Soit a un réel strictement positif quelconque.

A $\ln(\sqrt{1/a^3}) = -\ln(a)$.
B $1/\ln(a) = -\ln(-a)$
C $\ln(a+\sqrt{a}) = (3/2)\ \ln(a)$.
D $\ln(a+\sqrt{a}) = (1/2)\ \ln(a)\ \ln(1+\sqrt{a})$.
E $\ln(a/\sqrt[3]{a}) = (2/3)\ \ln(a)$.

Question 3. Soit x un réel strictement positif quelconque.

A $\exp(\ln(x^2)) = 2x$.
B $\exp(x+\ln(x)) = x^x$.
C $\exp(x^2+\ln(x)) = x\mathrm{e}^{2x}$.
D $\exp(x\ln(x^2)) = x^{2x}$.

E $\exp(\ln(x)/2) = \sqrt{x}$.

Question 4. Soit x un réel quelconque.

A $\sin(x - 5\pi/2) = -\cos(x)$.

B $\cos(x - 5\pi/2) = -\sin(x)$.

C $\sin(x + 5\pi/2) = -\cos(x)$.

D $\sin(5\pi - x) = -\sin(x)$.

E $\cos(x - 5\pi) = -\cos(x)$.

Question 5.

A $\sin(-5\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

B $\tan(-5\pi/4) = 1$.

C $\sin(-5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$.

D $\tan(-5\pi/6) = -\sqrt{3}$.

E $\cos(5\pi/3) = 1/2$.

Question 6. Soit x un réel quelconque.

A $\cos(2x) - 2\sin^2(x) = 1$.

B $\cos(2x) = 1 - 2\cos^2(x)$.

C $\sin(3x) - \sin(x) = 2\sin(x)\cos(2x)$.

D $(\cos(x) + \sin(x))^2 = 1 + \sin(2x)$.

E $\cos(3x) - \cos(x) = 2\sin(x)\sin(2x)$.

Question 7.

A $\arccos(-1/2) = 2\pi/3$.

B $\arcsin(\sqrt{3}/2) = 2\pi/3$.

C $\arctan(0) = \pi$.

D $\arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$.

E $\arctan(-1/\sqrt{3}) = -\pi/3$.

Question 8.

A $\forall x \in [-\pi, \pi]\ ,\quad \arcsin(\sin(x)) = x$.

B $\forall x \in [-1, 1]\ ,\quad \cos(\arccos(x)) = x$.

C $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2]\ ,\quad \arccos(\sin(x)) = \pi/2 - x$.

D $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2]\ ,\quad \arcsin(\cos(x)) = \pi/2 - x$.

E $\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[\ ,\quad \arctan(1/\tan(x)) = \pi/2 - x$.

Question 9. Soit x un réel quelconque.

A $\sinh(x) + \cosh(x) = \mathrm{e}^x$.

B $\cosh(2x) = \cosh^2(x) - \sinh^2(x)$.

C $\sinh(2x) + 1 = (\cosh(x) + \sinh(x))^2$.

D $\cosh(3x) + \cosh(x) = 2\cosh(2x)\cosh(x)$.

E $\sin(3x) + \sinh(x) = 2\cosh(2x)\sinh(x)$.

Question 10. Soit x un réel quelconque.

A $\text{argcosh}(\cosh(x)) = x$.

B $\sinh(\text{argsinh}(x)) = x$.

C $\text{argsinh}(\cosh(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$.

D $\cosh(\text{argsinh}(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$.

E $\tanh(\text{argsinh}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Réponses : 1–AE 2–DE 3–DE 4–AE 5–AE 6–CD 7–AD 8–BC 9–AD 10–BD

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Questions de cours :

1. Soient a et b deux réels. Donner, sans démonstration, l'expression de $\sin(a + b)$ et $\cos(a + b)$ en fonction de $\sin(a)$, $\sin(b)$, $\cos(a)$ et $\cos(b)$.
2. Donner, sans démonstration, les limites suivantes.
$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} \; .$$
3. Utiliser les résultats des deux questions précédentes pour démontrer que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables, avec pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$\sin'(a) = \cos(a) \quad \text{et} \quad \cos'(a) = -\sin(a) \; .$$
4. Donner la définition des fonctions arc sinus et arc cosinus (sans oublier leur domaine de définition).
5. Soient α et β deux réels dans l'intervalle $[-1, 1]$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $\arcsin(\alpha) + \arcsin(\beta)$ pour que :
$$\arcsin(\alpha\sqrt{1 - \beta^2} + \beta\sqrt{1 - \alpha^2}) = \arcsin(\alpha) + \arcsin(\beta) \; .$$

Exercice 1 : Le but de l'exercice est de minimiser la quantité $x^y + y^x$, où x et y sont deux réels strictement positifs.

1. Montrer que la fonction $f \; : x \mapsto f(x) = x^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer sa dérivée.

2. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'elle admet un minimum unique, au point d'abscisse $1/\mathrm{e}$ et d'ordonnée $m = \mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}$.
3. Soient x et y deux réels tels que $0 < y \leqslant x < 1$. Montrer que : Montrer que :
$$x^y + y^x \geqslant m^{\frac{y}{x}} + m\frac{y}{x} \; .$$
4. Montrer que la fonction $\varphi \;: t \mapsto \varphi(t) = m^t + mt$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée, ainsi que sa dérivée seconde.
5. Montrer que pour tout $t \in]0,1]$, $m^t + mt > 1$.
6. En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$,
$$x^y + y^x > 1 \; .$$
7. Montrer que 1 est le plus grand des minorants (borne inférieure) de l'ensemble :
$$\{\, x^y + y^x \,;\; x, y \in \mathbb{R}^{+*} \,\} \; .$$

Exercice 2 : On considère la fonction f qui à $x \in \mathbb{R}$ associe :
$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \; .$$

1. Vérifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et calculer sa dérivée.
3. Représenter le graphe de f.
4. Montrer que :
$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} -2\arctan(x) - \pi & \text{si} & x \in]-\infty, -1] \\ 2\arctan(x) & \text{si} & x \in [-1, 1] \\ -2\arctan(x) + \pi & \text{si} & x \in [1, +\infty[\; . \end{array} \right.$$

Exercice 3 :

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x) \; .$$
En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
$$\cosh(x) = \frac{\sinh(2x)}{2\sinh(x)} \; .$$
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et pour tout entier n :
$$\prod_{k=0}^{n} \cosh(2^k x) = \frac{\sinh(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sinh(x)} \; .$$

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\tanh(2x) = \frac{2\tanh(x)}{1+\tanh^2(x)} \; .$$
En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
$$\tanh(x) = \frac{2}{\tanh(2x)} - \frac{1}{\tanh(x)} \; .$$
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et pour tout entier n :
$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \tanh(2^k x) = \frac{2^{n+1}}{\tanh(2^{n+1}x)} - \frac{1}{\tanh(x)} \; .$$

2.5 Corrigé du devoir

Questions de cours :

1. Pour tous réels a et b,
   - $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
   - $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.
2. $$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0 \; .$$
3. Écrivons le taux d'accroissement de la fonction sinus en a, évalué en $a+h$:
$$\begin{aligned} \tau_a(a+h) &= \frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} \\ &= \frac{1}{h}\Big(\sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h) - \sin(a) \Big) \\ &= \sin(a)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(a)\frac{\sin(h)}{h} \; . \end{aligned}$$
En utilisant les limites de la question précédente,
$$\lim_{h\to 0} \tau_a(a+h) = \cos(a) \; .$$
Écrivons maintenant le taux d'accroissement de la fonction cosinus en a, évalué en $a+h$:
$$\begin{aligned} \tau_a(a+h) &= \frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} \\ &= \frac{1}{h}\Big(\cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h) - \cos(a) \Big) \\ &= \cos(a)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(a)\frac{\sin(h)}{h} \; . \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{h\to 0} \tau_a(a+h) = -\sin(a) \; .$$

4. La restriction de la fonction sinus à $[-\pi/2, \pi/2]$ est une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ vers $[-1, 1]$. La fonction arc sinus est la bijection réciproque.

$$\begin{array}{rcl} & \text{arcsin} & \\ [-1,1] & \longrightarrow & [-\pi/2, \pi/2] \\ x & \longmapsto & \arcsin(x) \end{array}$$

La restriction de la fonction cosinus à $[0, \pi]$ est une bijection de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$. La fonction arc cosinus est la bijection réciproque.

$$\begin{array}{rcl} & \text{arccos} & \\ [-1,1] & \longrightarrow & [0, \pi] \\ x & \longmapsto & \arccos(x) \end{array}$$

5. Posons $a = \arcsin(\alpha)$ et $b = \arcsin(\beta)$. Observons que :

$$\sqrt{1-\alpha^2} = \cos(a) \quad \text{et} \quad \sqrt{1-\beta^2} = \cos(b) \; ,$$

puisque par définition de l'arc sinus, a et b appartiennent à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ (leur cosinus est positif ou nul). Donc :

$$\begin{array}{rcl} \arcsin(\alpha\sqrt{1-\beta^2} + \beta\sqrt{1-\alpha^2}) & = & \arcsin(\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)) \\ & = & \arcsin(\sin(a+b)) \; . \end{array}$$

Or :

$$\arcsin(\sin(a+b)) = \begin{cases} -\pi - (a+b) & \text{si} \quad a+b \in [-\pi, \pi/2] \\ (a+b) & \text{si} \quad a+b \in [-\pi/2, \pi/2] \\ \pi - (a+b) & \text{si} \quad a+b \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

Pour que :

$$\arcsin(\alpha\sqrt{1-\beta^2} + \beta\sqrt{1-\alpha^2}) = \arcsin(\alpha) + \arcsin(\beta) \; ,$$

il faut et il suffit que $\arcsin(\alpha) + \arcsin(\beta)$ appartienne à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$.

Exercice 1 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, écrivons :

$$f(x) = x^x = \exp(x\ln(x)) \; .$$

La fonction $x \mapsto x\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme produit de fonctions dérivables, et sa dérivée en x est $\ln(x)+1$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme composée de fonctions dérivables et sa dérivée en x est :

$$f'(x) = (\ln(x) + 1)\exp(x\ln(x)) \; .$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\exp(x\ln(x)) > 0$. Le signe de f' est celui de $\ln(x)+1$: négatif si $x \leqslant 1/\mathrm{e}$, positif si $x \geqslant 1/\mathrm{e}$. La fonction f est donc décroissante sur $[0, 1/\mathrm{e}]$, croissante sur $[1/\mathrm{e}, +\infty]$. Elle admet un minimum unique, au point d'abscisse $1/\mathrm{e}$. L'ordonnée correspondante est :
$$m = (1/\mathrm{e})^{1/\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}} \; .$$
3. Pour x et y tels que $0 < y \leqslant x < 1$, écrivons :
$$x^y = (x^x)^{\frac{y}{x}} \quad \text{et} \quad y^x = \left(\frac{y}{x}\right)^x x^x \; .$$
Comme $y/x \leqslant 1$ et $x < 1$,
$$\left(\frac{y}{x}\right)^x \geqslant \frac{y}{x} \; .$$
D'après la question précédente, $x^x \geqslant m$. Donc :
$$x^y + y^x \geqslant m^{\frac{y}{x}} + m\frac{y}{x} \; .$$
4. La fonction φ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions indéfiniment dérivables.
$$\varphi'(t) = \ln(m)m^t + m \quad \text{et} \quad \varphi''(t) = \ln^2(m)m^t \; .$$
5. La dérivée seconde φ'' est strictement positive, donc φ' est croissante sur $[0, 1]$. Or $\varphi'(0) = \ln(m) + m = \mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}} - 1/\mathrm{e} > 0$. Donc φ' est strictement positive sur $[0, 1]$, donc φ est strictement croissante. Or $\varphi(0) = 1$. Donc, pour tout $t \in]0, 1]$, $\varphi(t) = m^t + mt > 1$.
6. Si $x \geqslant 1$, alors pour tout $y > 0$, $x^y \geqslant 1$ et $x^y + y^x > 1$. De même si $y \geqslant 1$, alors $x^y + y^x > 1$. Nous devons donc considérer seulement le cas où x et y sont strictement inférieurs à 1. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $0 < y \leqslant x < 1$. Or d'après la question 3,
$$x^y + y^x \geqslant m^{\frac{y}{x}} + m\frac{y}{x} \; ,$$
et d'après la question 5,
$$m^{\frac{y}{x}} + m\frac{y}{x} > 1 \; .$$
D'où le résultat.
7. D'après la question précédente, 1 est un minorant de l'ensemble. Pour montrer que c'est la borne inférieure, nous devons vérifier que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que :
$$x^y + y^x \leqslant 1 + \varepsilon \; .$$
Il suffit pour cela de prendre $x = 1$ et $y = \varepsilon$.

Exercice 2 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2 \geqslant 0$$
Donc :
$$-2x \leqslant 1 + x^2 \quad \text{et} \quad 1 + x^2 \geqslant 2x \;,$$
soit,
$$-1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1 \;.$$
La fonction $x \mapsto 2x/(1+x^2)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. La fonction arc sinus est définie et continue sur $[-1,1]$ Donc la composée f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $x \mapsto 2x/(1+x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction arc sinus est dérivable sur $]-1,1[$. Or $2x/(1+x^2)$ ne prend les valeurs 1 et -1 que pour $x = 1$ et $x = -1$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$,
$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|} \;.$$

3. La fonction f est croissante pour $x \in [-1,1]$, décroissante ailleurs. Elle tend vers 0 en $-\infty$ et $+\infty$. Elle est impaire et donc son graphe est symétrique par rapport à l'origine. Il est représenté sur la figure 10.

4. Sur l'intervalle $[-1,1]$, $|1-x^2| = 1 - x^2$, et la dérivée de f vaut :
$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \;.$$
La fonction f a la même dérivée que la fonction $x \mapsto 2\arctan(x)$. Donc ces deux fonctions sont égales à une constante près. Comme elles prennent toutes les deux la valeur 0 en $x = 0$, elles sont égales.
Sur les intervalles $]-\infty,-1]$ et $[1,+\infty[$, $|1-x^2| = -1 + x^2$, et la dérivée de f vaut
$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2} \;.$$
La fonction f a la même dérivée que la fonction $x \mapsto -2\arctan(x)$. Donc les deux fonctions sont égales à une constante près. Comme $-2\arctan(-1) = \pi/2$ et $f(-1) = -\pi/2$, pour $x \in]-\infty,-1]$, $f(x) = -2\arctan(x) - \pi$.
De même, $-2\arctan(1) = -\pi/2$ et $f(1) = \pi/2$, donc pour $x \in [1,+\infty[$, $f(x) = -2\arctan(x) + \pi$.

Exercice 3 :

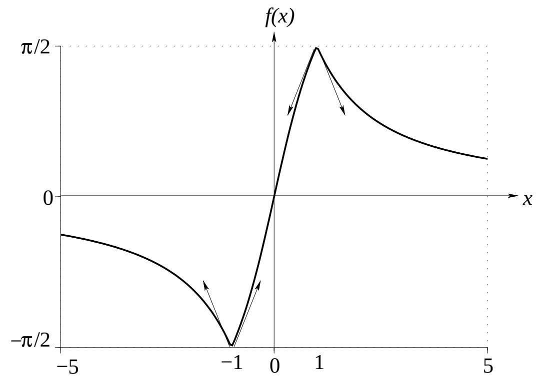

FIGURE 10 – Fonction $x \mapsto \arcsin(2x/(1+x^2))$.

1. Par définition :
$$\sinh(2x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{2} = 2\left(\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) = 2\sinh(x)\cosh(x)\ .$$
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\sinh(x) \neq 0$, donc on peut diviser par $2\sinh(x)$ la relation prédente, ce qui donne :
$$\cosh(x) = \frac{\sinh(2x)}{2\sinh(x)}\ .$$
2. Notons P_n le produit proposé, et effectuons une démonstration par récurrence. Pour $n = 0$, $P_0 = \cosh(x)$, et la formule est celle de la question précédente. Supposons-la vraie au rang n. Alors :
$$P_{n+1} = P_n \cosh(2^{n+1}x) = \frac{\sinh(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sinh(x)}\,\frac{\sinh(2^{n+2}x)}{2\sinh(2^{n+1}x)}\ ,$$
en appliquant l'hypothèse de récurrence à P_n, et la formule de la question précédente à $\cosh(2^{n+1}x)$. Donc :
$$P_{n+1} = \frac{\sinh(2^{n+2}x)}{2^{n+2}\sinh(x)}\ .$$

La formule est vraie au rang $n+1$. Elle est donc vraie pour tout n, par récurrence.

3. Par définition :
$$\tanh(2x) = \frac{\sinh(2x)}{\cosh(2x)}$$
Or $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$ (question 1), et :
$$\cosh(2x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}}{2} = \left(\frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) \;.$$
Comme $\cosh(x)$ ne s'annule pas :
$$\tanh(2x) = \frac{2\sinh(x)\cosh(x)}{\cosh^2(x) + \sinh^2(x)} = \frac{2\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}}{1 + \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}} = \frac{2\tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)} \;.$$
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\tanh(x)$ et $\tanh(2x)$ sont non nuls. En prenant l'inverse de la formule précédente :
$$\frac{1}{\tanh(2x)} = \frac{1 + \tanh^2(x)}{2\tanh(x)} = \frac{1}{2\tanh(x)} + \frac{\tanh(x)}{2} \;,$$
soit,
$$\tanh(x) = \frac{2}{\tanh(2x)} - \frac{1}{\tanh(x)} \;.$$

4. Notons S_n la somme proposée, et effectuons une démonstration par récurrence. Pour $n = 0$, $S_0 = \tanh(x)$ et la formule est celle de la question précédente. Supposons-la vraie au rang n. Alors :
$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + 2^{n+1}\tanh(2^{n+1}x) \\ &= \frac{2^{n+1}}{\tanh(2^{n+1}x)} - \frac{1}{\tanh(x)} + \frac{2^{n+2}}{\tanh(2^{n+2}x)} - \frac{2^{n+1}}{\tanh(2^{n+1}x)} \;, \end{aligned}$$
en appliquant l'hypothèse de récurrence à S_n, et la formule de la question précédente à $\tanh(2^{n+1}x)$. Donc :
$$S_{n+1} = \frac{2^{n+2}}{\tanh(2^{n+2}x)} - \frac{1}{\tanh(x)} \;.$$
La formule est vraie au rang $n+1$, elle est donc vraie pour tout n, par récurrence.

3 Compléments

3.1 La trigonométrie des cordes

Claude Ptolémée (90-168) était né à Ptolémaïs, en Haute-Egypte, d'où son nom. Vers 150, il compila l'ensemble des connaissances astronomiques de son temps dans une œuvre magistrale, la *Composition Mathématique*, rebaptisée plus tard *Almageste* (« le très grand ») par les savants arabes. Ce traité reprend et amplifie les connaissances d'Hipparque de Nicée (180-125 av. JC). Le système astronomique géocentrique de l'Almageste, restera en vigueur jusqu'à la révolution copernicienne, à la Renaissance.

Calculer des distances en fonction d'angles observés est l'activité de base de l'astronomie. Mais pour cela, les astronomes de l'antiquité préféraient les *cordes* à nos sinus et cosinus actuels. La notion de *corde* qui (sous-)*tend* un *arc* de cercle est sans doute plus naturelle. Dans un cercle de rayon 1, notons $\text{cord}(\theta)$ la longueur de la corde qui sous-tend un arc de cercle d'angle θ. La figure 11 devrait vous convaincre que :

$$\text{cord}(\theta) = 2\sin(\theta/2)\ .$$

Dans le livre I, chapitre 9 de l'Almageste, on trouve le théorème suivant.

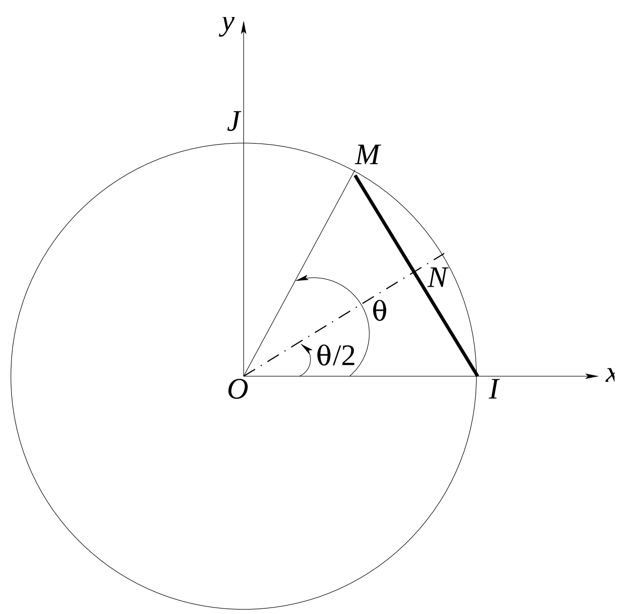

FIGURE 11 – La *corde* d'un angle θ est le double du sinus de l'angle moitié.

Théorème 5 (de Ptolémée)**.** *Dans un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.*

Nous vous laissons le plaisir de démontrer que ce théorème est équivalent à la formule de sommation des sinus :

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\ .$$

Il permit à Ptolémée de construire une table de cordes, précise au demi-degré.

Les mathématiciens et astronomes arabes ne se contentèrent pas de recopier, traduire et transmettre l'œuvre de Ptolémée. Ils la prolongèrent sur bien des points. Citons en particulier Abu al Wafa et Al Biruni, qui systématisèrent l'usage du cercle trigonométrique (de rayon 1), ainsi que Al Khwarizmi et Al Battani, qui imposèrent l'usage des demi-cordes (notre sinus de l'angle moitié), emprunté aux astronomes indiens (notamment Aryabhata (476-550)).

L'œuvre d'Al Battani (858-929) « le Ptolémée arabe », fut traduite en latin, et rééditée au XV^e siècle par Johann Müller (1436-1476), qui étant natif de Königsberg, prit le nom de Regiomontanus. Léonard de Pise (Fibonacci 1175–1250) semble être le premier à avoir utilisé le mot latin *sinus* qui semble venir du latin signifiant « repli ». En réalité, « corde » en sanscrit se dit « jiva », et « jiba » en arabe signifie aussi « poche, repli de vêtement ». Un mauvaise traduction semble être l'origine de ce glissement sémantique plutôt heureux, eût égard à la forme sinueuse de la sinusoïde... qui ne fut tracée et étudiée en tant que telle que plusieurs siècles plus tard !

3.2 Napier ou Neper ?

En son temps, son nom devait s'écrire *Jhone Neper* (d'où les logarithmes *népériens*), parfois aussi Napeir, Nepair, Nepeir, Napare, Naipper, mais probablement pas *John Napier* (1550-1617) comme de nos jours. Il était né en Ecosse, au château de Merchiston, près d'Edimbourg. On en sait assez peu sur ses années de formation : il est probable qu'il ait étudié à l'Université de Paris, peut-être aussi en Italie et en Hollande. On sait aussi qu'il était un protestant convaincu, auteur d'un livre de théologie, « The plaine discovery of the whole revelation of St. John », qu'il écrivit selon sa préface « ...for preventing the apparent danger of Papistry arising within this Island ». Il gérait ses terres agricoles, auquelles il appliquait assidument sa capacité d'invention. Ses champs étaient voisins d'un domaine royal, dans lequel étaient élevées des colombes, qui venaient régulièrement ruiner ses semailles. Il eut l'idée de fabriquer des appâts constitués de morceaux de pain trempé dans du whisky (écossais), qu'il éparpilla dans ses champs ensemencés, mais aussi dans un champ voisin rempli de pièges. Les colombes imbibées se laissèrent piéger en grande quantité, et Napier n'accepta de les rendre au domaine royal que contre remboursement de ses graines.

À part la théologie et l'administration de son domaine, John Napier avait pour hobby les mathématiques. Les logarithmes apparaissent dans *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* en 1614. Voici un extrait de la préface, qui semble avoir été écrit pour vous.

> Très illustre amateur de mathématiques, comme rien n'est aussi pénible que la pratique des mathématiques, parce que la logique est d'autant plus freinée, retardée, que les multiplications, les divisions, et les extractions de racines carrées ou cubiques portent sur des grands nombres ; qu'elle est sou-

> mise à l'ennui de longues opérations et beaucoup plus encore à l'incertitude des erreurs, j'ai entrepris de rechercher par quel procédé sûr et rapide on pourrait éloigner ces obstacles. Dans ce but, j'en ai examiné soigneusement une grande quantité, les uns après les autres, et enfin j'en ai trouvé plus d'un, clair et d'un emploi facile... À la vérité, aucun, parmi les autres, n'est plus utile que l'un d'eux ; par son moyen, on rejette les nombres utilisés dans les multiplications, les divisions et les extractions de racines lorsqu'elles sont difficiles et prolixes, et on les remplace par d'autres nombres, que j'ai pris soin de leur adjoindre, et l'on achève le calcul par des additions, des soustractions, des divisions par deux et par trois seulement...

Le mot « logarithme » a été forgé par Napier lui-même pour traduire « nombre de raisons », « raison » étant pris au sens de rapport dans une suite géométrique. Il les définit comme « des nombres qui correspondent à des nombres proportionnels et ont des différences égales ».

Dans les temps de superstitions où il vivait, les connaissances et le comportement de Napier eurent tôt fait de le rendre suspect, et la rumeur commença a circuler qu'il était en cheville avec les forces du mal. D'après la biographie d'un de ses descendants, Napier lui-même aimait en en rajouter, en se promenant avec un coq couvert de suie, ou bien seulement vêtu de sa chemise et de sa coiffe de nuit. Le bon peuple croyait volontiers qu'il passait son temps en grande conversation avec le diable, plutôt que de faire des maths.

3.3 Logarithmes des nombres négatifs et imaginaires

Au XVII^e et XVIII^e siècles, les mathématiciens sont encore très réticents devant les nombres négatifs, presque autant que devant les nombres imaginaires. Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) en 1702, parlant des racines imaginaires de $x^4 + a^4$, les appelle « un recours merveilleux de l'intelligence divine, une naissance non naturelle dans le royaume de la pensée, presque un amphibium entre l'être et le non-être ».

Concernant les logarithmes, ce sont les nombres négatifs, avant les imaginaires, qui font l'objet de discussions passionnées. La correspondance entre Leibniz et Jean Bernoulli (1667-1748) est très significative.

Lettre de Leibniz à Bernoulli (mars 1712) :

> ... et si l'on peut dire que -1 et des expressions semblables signifient moins que rien, cependant on ne peut leur donner d'autre rapport qu'imaginaire... De ceci, je prouve entre autres qu'aucun logarithme ne répond à ce rapport ou à un semblable...

Ce à quoi Bernoulli répond :

> ... Je ne suis pas d'accord avec toi lorsque tu dis que le rapport de -1 à 1 ou de 1 à -1 est imaginaire et que tu en déduis que aucun logarithme ne répond à ce rapport. Ainsi, moi je prouve le contraire de cela. Soit x un

> nombre variable, croissant de manière infiniment petite, dont le logarithme est $l.x$; je dis que $l.x$ lui-même répond à $-x$ de même qu'à x ; on a la différentielle du logarithme d'un nombre en divisant la différentielle de ce nombre par ce même nombre ;
>
> $$\mathrm{d}x : x \;=\; -\mathrm{d}x : -x \;=\; \mathrm{d}l. - x\ .$$
>
> Donc $l.x = l. - x$.

Mais Leibniz (un peu agacé, car il est tout de même l'inventeur du calcul différentiel) n'accepte pas l'argument :

> ... Je m'étonne que toi, avec ta pénétration d'esprit, tu ne vois pas qu'on ne peut pas donner de logarithme à -2 parce qu'on ne peut pas donner de logarithme à $\sqrt{-2}$, qui est la moitié du précédent. Mais, tu dis, la différentielle du nombre $-x$, qui est $-\mathrm{d}x$, divisée par le nombre $-x$ donnera un élément logarithmique $-\mathrm{d}x : -x$ ou $\mathrm{d}x : x$. Mais cette règle, que la différentielle divisée par le nombre donne la différentielle du logarithme et n'importe quoi d'autre sur la nature et la construction des logarithmes n'a pas lieu pour les nombres négatifs.

Il faudra attendre Euler (1707-1783) pour qu'on sache enfin qui avait raison : aucun des deux !

> Pour éclaicir ces propositions, qui ne paraissent nullement admissibles, et lever toute espèce de doute, il faut établir un autre paradoxe ; à savoir que tout nombre a une infinité de logarithmes, parmi lesquels il n'y en a qu'UN qui soit réel. Ainsi, quoique le logarithme de l'unité soit zéro, elle en a cependant une infinité d'autres qui sont imaginaires, à savoir $2l.(-1)$, $3l.(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2})$, $4l.(\frac{-1\pm\sqrt{-1}}{2})$, et d'autres sans nombre que fait connaître l'extraction des racines. Cette opinion est beaucoup plus vraisemblable que la précédente ; car en supposant $x = l.a$, on aura $a = \mathrm{e}^x$ et par conséquent $a = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! \ldots$ et comme cette équation a un nombre infini de dimensions, il n'est pas étonnant que x ait de même un nombre infini de racines.

Et de fait puisque tout nombre complexe non nul s'écrit sous forme exponentielle $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arg(z)+2k\pi)}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il admet bien une infinité de logarithmes :

$$\log(z) = \ln(|z|) + \mathrm{i}(\arg(z) + 2k\pi)\ , \quad k \in \mathbb{Z}\ .$$

3.4 Euler et les fonctions

Leonhard Euler (1707-1783) est considéré comme le mathématicien le plus prolifique de tous les temps. Il ne s'est pas contenté des mathématiques : physique, chimie, biologie, botanique, médecine, philosophie, architecture navale, latin, grec, l'étendue de ses connaissances était prodigieuse. Il était puissamment aidé par une mémoire hors du commun : capable de réciter l'Énéïde de Virgile, du début à la fin, il pouvait retrouver la première et la dernière ligne de chaque page des éditions dans lesquelles il l'avait lue. Son plus grand tour de force est sans doute d'avoir produit presque la moitié de son travail pendant les dix-sept dernières années de sa vie, alors qu'il était complètement aveugle !

Vous devez à Euler l'essentiel de ce chapitre. Voici ce qu'il écrit dans la préface de son « Introduction à l'analyse infinitésimale ».

> Je me suis surtout étendu sur les fonctions de variables, parce qu'elles font l'objet de l'analyse infinitésimale... Je les ai d'abord divisées en algébriques et en transcendantes. Les premières sont composées de quantités variables combinées entre elles par les opérations ordinaires de l'algèbre, et les secondes dépendent d'autres opérations, ou des mêmes combinaisons que les précédentes, mais répétées une infinité de fois... Je me suis attaché à découvrir des propriétés et à trouver la somme de plusieurs séries infinies, dont quelques unes paraissaient de nature à faire croire presque qu'elles ne pourraient être trouvées sans le secours d'un calcul infinitésimal. Telles sont les séries, dont les sommes sont exprimées ou par les logarithmes ou par les arcs de cercle. Ces sortes de quantités qui sont transcendantes, puisqu'elles sont représentées par la surface de l'hyperbole et du cercle, font partie des matières qu'on a coutume de traiter dans l'analyse infinitésimale. Passant ensuite des puissances aux quantités exponentielles, qui sont elles-mêmes des puissances, dont les exposants sont variables, leur développement m'a fourni une idée fort naturelle et à la fois féconde des logarithmes ; d'où il m'a été facile de conclure leurs différents usages, en même temps que j'ai pu en déduire toutes les séries infinies, qui représentent ordinairement ces quantités ; ce qui m'a donné enfin un moyen très expéditif de construire les tables de logarithmes. Je me suis semblablement conduit dans l'examen des arcs de cercle ; genre de quantités qui, quoique très différent des logarithmes leur est cependant si intimement lié, que lorsqu'une de ces quantités paraît devenir imaginaire, elle se change en l'autre.

Euler a introduit beaucoup des notations que nous utilisons encore pour les fonctions et les nombres complexes. Voici le passage où apparaît pour la première fois le nombre e.

> ... Comme on peut prendre à volonté la base a pour établir un système de logarithmes, nous pouvons la prendre telle que k devienne égale à 1, supposons donc $k = 1$, la série trouvée ci-dessus deviendra $a = 1 + 1 + \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{1.2.3}$ etc., dont les termes convertis en décimales et ajoutés donnent pour a cette valeur $2,718281828459045235360 28$ dont le dernier chiffre est encore exact.
>
> Les logarithmes calculés sur cette base s'appellent naturels ou hyperboliques, parce qu'ils peuvent représenter la quadrature de l'hyperbole. Au

> reste, pour abréger, nous désignerons constamment ce nombre par la lettre e, qui indiquera par conséquent la base des logarithmes naturels ou hyperboliques à laquelle répond la valeur de $k = 1$.

Appréciez au passage le calcul à la main de 24 chiffres significatifs du nombre e « dont le dernier est encore exact ».